

**Emil Stoica**

# **TRIGONOMETRIA**

**Elementele de bază  
în rezolvarea de exerciții și probleme**

**Culegere de exerciții și probleme  
aplicative**

**PENTRU GIMNAZIU ȘI LICEU**

**CORINT**

*În memoria profesorului SIMON PETRU*

## PREFAȚĂ

Dintotdeauna, și mai ales în ultimii ani, s-a scris și s-a publicat o mare varietate de culegeri de exerciții și probleme care acoperă toate capitolele matematicii, atât pentru fixarea și aprofundarea materialului expus în lecțiile predate în școli, cât și pentru pregătirea examenelor de admitere la liceu, a examenului de bacalaureat sau a examenelor de admitere în diverse forme specializate de învățământ, inclusiv învățământul superior.

Aceste culegeri au fost și sunt considerate materialul cel mai solicitat în pregătirea elevilor, practica rezolvării de exerciții și probleme fiind de o indiscutabilă utilitate în vederea susținerii majorității formelor de examinare; această practică este și obiectivul principal în toate formele de pregătire, individuală sau, mai ales, asistată (de tip „meditații”).

Rezolvarea de exerciții și probleme constă însă în punerea în aplicare a unor instrumente care sunt furnizate doar de teoria matematicii, absolut și evident indispensabile oricărei tentative de a aborda — fundamentat, creativ și nu mecanic — practica rezolvării a ceea ce propun culegerile amintite.

Publicațiile sintetice de tip „Tabele și formule matematice”, prin forma foarte concentrată a conținutului, nu pot constitui un material de studiu, fiind foarte utile doar după parcurgerea acestuia.

În aceste condiții (și în mod curent), baza pregătirii teoretice a elevilor o constituie manualele școlare, care urmăresc (cronologic, cu inevitabila dispersie) o programă analitică eșalonată pe toată perioada pregătirii școlare.

În fața unui examen, elevii au la dispoziție și utilizează în general, pentru partea teoretică, doar multitudinea manualelor școlare; acestea oferă un bogat conținut informațional (foarte util primului contact), dar sunt de o eficiență redusă pentru un scop recapitulativ sau de sinteză, pentru aprofundare; la fel, în practica rezolvării de exerciții și probleme.

În PARTEA I, lucrarea de față își propune să ofere, într-o formă compactă, dar nu sumară și evitând intenționat o prezentare sofisticată, sinteza elementelor teoretice de bază ale instrumentarului practic din TRIGONOMETRIE; la provocarea „CE” a culegerilor de exerciții și probleme se intenționează a se da răspunsul „CU CE” și „CUM”.

Scopul principal urmărit este punerea la dispoziția elevilor (și nu numai) a unui material ușor accesibil și unitar, sintetic, însă suficient de detaliat încât să poată constitui un material de însușire, de aprofundare sau de recapitulare — cu aplicare practică directă și prin studiu individual — a informațiilor furnizate în mai mulți ani de școlarizare.

Fără stăpânirea acestor informații (evident greșit catalogate uneori ca doar „teorie sterilă”), tentativa rezolvării practice de exerciții și probleme este un demers aproape inutil sau, cel mult, mecanic.

Prezentarea noțiunilor teoretice este însoțită de exemple și sugestii de aplicare, dându-se soluții sau metode de rezolvare a celor mai frecvent întâlnite cazuri în practica rezolvării de exerciții și probleme; din acest punct de vedere, lucrarea constituie un GHID PRACTIC aplicativ, care poate fi consultat și utilizat eficient chiar în timpul rezolvării unui exercițiu sau a unei probleme concrete.

În PARTEA a II-a sunt prezentate exerciții și probleme aplicative, cu indicații de rezolvare și răspunsuri corelate cu, și cu trimitere la PARTEA I, precum și exerciții și probleme aplicative fără indicații și răspunsuri.

Modul de prezentare vizează un nivel mediu de pregătire prealabilă, urmărind eficiența percepției, înțelegerea fondului noțiunilor (cu scop aplicativ în practica rezolvării de exerciții și probleme) și intenționând ca lucrarea să fie utilă cel puțin majorității cititorilor, atât în pregătirea școlară curentă, cât și, mai ales, în pregătirea premergătoare diverselor forme de testare sau examinare.

*Autorul*

## CUPRINS

### PARTEA I. Elementele de bază

<b>1. CONSIDERAȚII ȘI ELEMENTE PRELIMINARE</b> .....	9
Unitățile de măsură pentru arce / unghiuri .....	10
Funcții.....	12
Logaritmarea; logaritmul .....	13
Numere complexe.....	14
<b>2. CERCUL TRIGONOMETRIC</b> .....	17
<b>3. DEFINIREA FUNCȚILOR TRIGONOMETRICE</b> .....	18
Domeniile de valori ale funcțiilor trigonometrice .....	22
Funcțiile trigonometrice inverse .....	23
<b>4. VARIAȚIA FUNCȚILOR TRIGONOMETRICE</b> .....	24
Tabel sintetic .....	25
<b>5. EXPRIMAREA RECIPROCĂ</b>	
<b>A FUNCȚILOR TRIGONOMETRICE</b> .....	26
Prin sinus și cosinus.....	27
Prin tangenta și cotangenta .....	28
Exemple de aplicații .....	29
<b>6. VALORI ALE FUNCȚILOR TRIGONOMETRICE</b> <b>PENTRU VALORI REPREZENTATIVE DE ARCE</b> .....	32
<b>7. FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE</b> <b>ALE ARCELOR NEGATIVE</b> .....	33
<b>8. REDUCEREA LA PRIMUL CADRAN</b> .....	34
Arce complementare ( $90^\circ - \alpha$ ; cadranul 1) .....	35
Arce în cadranul 2 ( $90^\circ + \alpha$ ) .....	36
Arce suplementare ( $180^\circ - \alpha$ ; cadranul 2).....	37
Arce în cadranul 3 ( $180^\circ + \alpha$ ; $270^\circ - \alpha$ ).....	38
Arce în cadranul 4 ( $270^\circ + \alpha$ ).....	40
Tabel sintetic .....	41
Exemple de aplicații .....	42

<b>9. RELAȚII ȘI FORMULE TRIGONOMETRICE</b> .....	43
Funcțiile trigonometrice ale sumelor algebrice de arce.....	43
Funcțiile trigonometrice ale arcelor duble sau triple.....	44
Funcțiile trigonometrice ale arcelor pe jumătate.....	45
Exprimarea prin $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .....	45
Formule calculabile prin logaritmi.....	46
Transformarea sumelor și diferențelor în produse.....	46
Transformarea produselor în sume.....	47
Alte formule.....	47
Transformări condiționate.....	48
Exemple de aplicații.....	49
<b>10. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII TRIGONOMETRICE. Metode de rezolvare</b> .....	52
Exemple de aplicații.....	57
<b>11. REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR</b> .....	60
Triunghiuri oarecare.....	60
Triunghiuri dreptunghice.....	64
Tabel sintetic.....	65
Exemple de aplicații.....	67

## PARTEA a II-a. Culegere de exerciții și probleme aplicative

<b>12. EXERCITII ȘI PROBLEME</b> cu indicații de rezolvare.....	70
Funcții, relații și formule trigonometrice.....	70
Ecuații trigonometrice.....	77
Geometrie, rezolvare trigonometrică.....	82
Algebră, rezolvare trigonometrică.....	89
<b>13. EXERCITII ȘI PROBLEME</b> fără indicații de rezolvare.....	91
Bibliografie.....	95

## PARTEA I. Elementele de bază

### CONSIDERAȚII ȘI ELEMENTE PRELIMINARE

Matematica nu este abstractă! Abstractul este doar forma și mediul în care matematica produce și evoluează dar, dintotdeauna, matematica a plecat de la și s-a întors – prin ceea ce a produs – la concretul fizic, fiind astfel un exponent al gândirii și imaginației intelectuale precum și, poate, cel mai productiv instrument în evoluția, dirijată de om, a lumii fizice.

Matematica realizează astfel legătura bi-sens dintre realul fizic concret și „realul” abstract (având, ca fundamentare și elemente de legătură, principiile logicii): se „inspiră” din concret, „creează” în abstract și valorifică în același concret fizic de la care a pornit.

Având aceeași geneză și evoluând în același fel, GEOMETRIA studiază (în esență, dar nu numai) figurile geometrice, ca ansamble de elemente geometrice. Pentru a răspunde necesităților practice, pe lângă analiza calitativă a acestora, GEOMETRIA trebuie să dispună și de posibilitatea determinării cantitative, prin calcul, a măsurii elementelor geometrice, componente ale figurilor geometrice și intercorelate, ca măsuri, în ansamblul acestora.

TRIGONOMETRIA s-a născut și s-a dezvoltat în GEOMETRIE, inițial ca parte integrantă a acesteia și asigurând acestei discipline matematice instrumente și mijloace de calcul puternice, care permit determinarea cantitativă a măsurii tuturor elementelor unei figuri geometrice, fiind cunoscute măsurile unora dintre aceste elemente și nu cu necesitate elemente identice tipologic.

Deși relativ limitate, GEOMETRIA dispunea de instrumente de calcul cantitativ și fără aportul TRIGONOMETRIEI (relații metrice, etc). Două exemple, comune, în acest sens:

1. fiind cunoscute măsurile a două unghiuri ale unui triunghi se poate determina, prin calcul aritmetic, măsura celui de-al treilea unghi, suma măsurilor unghiurilor într-un triunghi fiind constantă ( $180^\circ$ );

2. fiind cunoscute lungimile a două laturi ale unui triunghi dreptunghic, se poate determina, prin calcul algebric, lungimea laturii a treia, prin teorema lui Pitagora.

În ambele cazuri sunt implicate elemente geometrice identice tipologic (doar unghiuri sau doar segmente de dreaptă).

Cunoscând, ca măsuri, doar unghiurile unui triunghi, triunghiul este nedeterminat, problema având o infinitate de soluții (toate triunghiuri

asemenea); determinarea printr-o eventuală soluție unică impune precizarea măsurii a cel puțin unui element liniar (latură).

Suntem deci frecvent în situația de a calcula măsurile unor unghiuri și segmente de dreaptă cunoscând (fiind date) măsuri ale celorlalte unghiuri și/sau segmente de dreaptă într-o figură geometrică.

În acest moment intervine TRIGONOMETRIA prin definirea **funcțiilor trigonometrice**, ca propriu fundament (dezvoltat ulterior) și ca prim pas în abordarea și soluționarea unei astfel de situații.

Prin modul, deloc întâmplător, în care sunt definite funcțiile trigonometrice, acestea realizează în esență:

- alocarea unui număr abstract, adimensional (fără „unitate de măsură”) fiecărei măsurii de arc / unghi (cu „unitate de măsură”), pe care o reflectă univoc, iar acest număr poate fi utilizat ca atare în calcule;

- legătura între măsuri de arce / unghiuri și lungimi de segmente, permițând corelarea cantitativă între cele două tipuri de elemente, liniare și unghiulare.

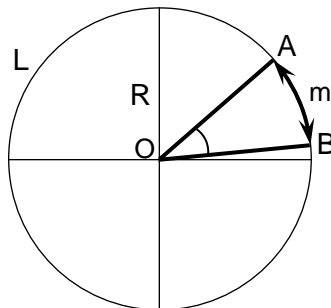
Tot nu întâmplător și deoarece figurile geometrice pot fi descompuse într-un număr (finit sau infinit) de triunghiuri, funcțiile trigonometrice se definesc într-un triunghi și se referă, în primă instanță, la triunghiuri (de unde și etimologia cuvântului „TRIGONOMETRIE”).

NOTĂ: în cazul multor probleme de geometrie, rezolvarea trigonometrică poate fi mai simplă și mai rapidă decât rezolvarea geometrică!

Evoluând nu doar ca resursă pentru GEOMETRIE, ci și în interiorul său, TRIGONOMETRIA și-a dobândit propria personalitate și statutul entitativ în matematică, având aplicabilitate și în alte discipline ale acesteia (vezi ALGEBRA, numerele complexe).

### Unitățile de măsură pentru arce / unghiuri

Se consideră un cerc de rază  $R$  (oarecare), cu centrul în punctul  $O$ .





Notăm cu  $L$  lungimea acestui cerc.

Pentru oricare cerc și independent de raza sa  $R$ , raportul  $\frac{L}{R}$  este constant și valoric același, având

$$\frac{L}{R} = 2\pi \quad (L = 2\pi R; \quad \pi = \frac{\text{Lungime cerc}}{\text{Diametru cerc}} = 3,1415928 \dots).$$

În cercul dat considerăm:

un arc de cerc,  $\overset{\frown}{AmB}$ ;

unghiul la centru  $\overset{\wedge}{AOB}$ , care subîntinde arcul de cerc  $\overset{\frown}{AmB}$ .

Avem (pentru orice arc și unghi la centru care îl subîntinde):

$$\text{măsura } \overset{\wedge}{(AOB)} = \text{măsura } \overset{\frown}{(AmB)}$$

Unitățile de măsură pentru arce sunt (orice  $R$ , implicit  $L$ ):

– arcul de 1 grad ( $1^\circ$ ),

arcul a cărui lungime este  $\frac{L}{360}$ ;

– arcul de 1 radian ( $1 \text{ rad}$ ),

arcul a cărui lungime este egală cu lungimea razei  $R$ .

Rezultă că măsura unui cerc este de  $360^\circ$  sau  $2\pi \text{ rad}$ .

Unitățile de măsură pentru unghiuri sunt:

– unghiul de 1 grad ( $1^\circ$ ),

unghiul la centru care subîntinde arcul de 1 grad;

– unghiul de 1 radian ( $1 \text{ rad}$ ),

unghiul la centru care subîntinde arcul de 1 radian.

Submultiplii arcului / unghiului de 1 grad ( $1^\circ$ ) sunt:

arcul / unghiul de 1 minut ( $1'$ )

arcul / unghiul de 1 secundă ( $1''$ )

cu:  $1 \text{ grad } (1^\circ) = 60 \times [1 \text{ minut } (1')] = 60 \times [60 \times 1 \text{ secundă } (1'')]$

De notat: considerând oricâte cercuri concentrice cu raze  $R$  (și, implicit, lungimi  $L = 2\pi R$ ) diferite, un unghi la centru subîntinde în cercurile respective arce de lungimi diferite (dependente de raza  $R$ ), dar cu aceeași măsură, exprimată în grade sau în radiani.

Cunoscând măsurile  $\alpha$  și  $\beta$  (exprimate în grade sau radiani) a, respectiv, două arce / unghiuri date, se definesc cele două arce / unghiuri ca fiind:

„complementare”, dacă:  $\alpha + \beta = 90^\circ$  sau  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  rad;

„suplementare”, dacă:  $\alpha + \beta = 180^\circ$  sau  $\alpha + \beta = \pi$  rad.

### Funcții

În sens matematic, funcția este un procedeu bine determinat, prin care, pornind de la elementele unei mulțimi, se creează / generează elemente care aparțin unei noi mulțimi. Funcția stabilește astfel o corespondență determinată între cele două mulțimi.

Considerând elementele  $a \in A$ , printr-un procedeu, simbolizat  $f$ , se generează elementele  $b \in B$ , dependente de elementele  $a$  prin procedeu  $f$ , ceea ce se scrie:

$$b = f(a)$$

Relația de mai sus conține trei componente:

elementele „sursă”:  $a$  .....

..... procedeu:  $f$  .....

..... elementele „destinație”:  $b$

( $b$  rezultă din aplicarea lui  $f$  asupra lui  $a$ ).

Condiția de unicitate: oricărui element  $a$  i se asociază, prin  $f$ , un element unic  $b$ .

Pentru funcția  $f$  se definesc:

- variabila independentă, orice element din mulțimea  $A$ ;
- variabila dependentă / valoarea funcției, orice element din mulțimea  $B$ ;
- domeniul de definiție al funcției, mulțimea  $A$ ;
- codomeniul / domeniul de valori ale funcției, mulțimea  $B$ .

Se spune:

funcția  $f$  este definită pe  $A$ , cu valori în  $B$ ,

și se scrie

$$f : A \rightarrow B$$

De notat: condițiile de existență ale procedurii / funcției impun restricții asupra domeniului de definiție; întotdeauna, primul pas în analiza unei funcții date este stabilirea domeniului său de definiție!

Funcția inversă a unei funcții date  $f : A \rightarrow B$  se notează cu  $f^{-1}$  și este funcția  $f^{-1} : B \rightarrow A$  adică este procedeul prin care, cunoscând o valoare  $b$  a funcției, se determină valoarea variabilei independente  $a$  care a generat-o prin  $f$ .

### Logaritmare; logaritmul

$$\log_a P = n \quad \text{astfel încât (deoarece)} \quad a^n = P.$$

$$\log_a P = \log_b P \quad \text{implică} \quad a = b$$

$$\log_a A = \log_a B \quad \text{implică} \quad A = B$$

$$\log_a 1 = 0 \quad (a^0 = 1 \text{ pentru orice } a)$$

$$\log_a a = 1 \quad (a^1 = a \text{ pentru orice } a)$$

$$\log_a (A \times B) = \log_a A + \log_a B$$

$$\text{deci: } \log_a A^m = m \log_a A \quad \text{și implicit: } \log_a \sqrt[n]{A^m} = \frac{m}{n} \log_a A$$

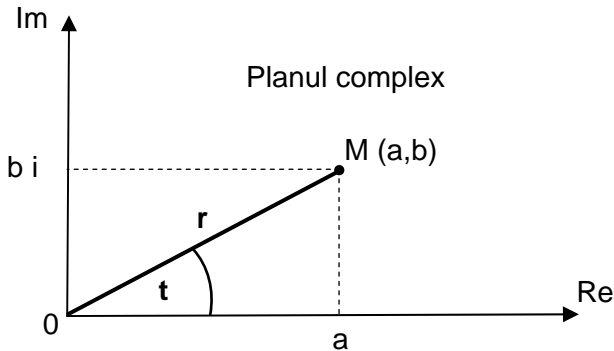
$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

### Numere complexe

$i = \sqrt{(-1)}$ , unitatea imaginară.

#### Forma algebrică a numerelor complexe

$$z = a + b i$$



Rezultă:  $a = r \cos t$  și  $b = r \sin t$

respectiv  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  și  $t = \arctg \frac{b}{a}$

Aceste relații permit conversia coordonatelor polare  
„modul”  $r$ , „argument”  $t$   
în coordonate carteziene

$(a, b)$

și reciproc, deci

$$z = a + b i = r \cos t + i r \sin t = r (\cos t + i \sin t).$$

Forma de scriere

$$z = r (\cos t + i \sin t)$$

reprezintă forma trigonometrică a numerelor complexe.

Puterile naturale ale unității imaginare i:

$$i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = -i$$

$$i^4 = 1; i^5 = i; i^6 = -1; i^7 = -i$$

.....

$$i^n = i^r \quad \text{cu } r = 0, 1, 2, 3 \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

Operații în forma algebrică

Dacă  $z = a + b i$ ,  $z^* = a - b i$  este „conjugatul” lui  $z$ .

$$z \times z^* = a^2 + b^2$$

adică  $z \times z^* \in \mathbb{R}$  și  $z \times z^* \geq 0$ .

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i = a + b i$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i = a + b i$$

$$z = z_1 / z_2 = z_1 z_2^* / z_2 z_2^* = z_1 z_2^* / (a_2^2 + b_2^2) =$$

$$= [(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i] / (a_2^2 + b_2^2) =$$

$$= [(a_1 a_2 + b_1 b_2) / (a_2^2 + b_2^2)] + [(a_2 b_1 - a_1 b_2) / (a_2^2 + b_2^2)] i =$$

$$\quad \backslash \dots \dots \dots a \dots \dots \dots / \quad \backslash \dots \dots \dots b \dots \dots \dots /$$

$$= a + b i.$$

$z_1 = z_2$  implică  $a_1 = a_2$  și  $b_1 = b_2$ .

Pentru un număr real  $a \in \mathbb{R}$  avem:

$$a > 0 \quad r = |a|, t = 0;$$

$$a < 0 \quad r = |a|, t = \pi$$

Pentru un număr imaginar  $bi$  avem:

$$b > 0 \quad r = |b|, t = \pi / 2;$$

$$b < 0 \quad r = |b|, t = 3 \pi / 2$$