

Viorel Vlad

# Teste rezolvate de matematică clasa a XI-a Pregătire pentru Bacalaureat

Specializarea Matematică-Informatică (M1)

# TEST

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

## Testul nr. 1

### SUBIECTUL I

**(30 puncte)**

- 5p** 1. Determinați numărul real  $x$  știind că numerele 2020,  $x$  și 2022 sunt în progresie aritmetică.
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $(f \circ f)(x) = x + 2020$  pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x-3} = \sqrt{2}$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor să fie mai mare decât 51.
- 5p** 5. Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  știind că, în reperul cartezian  $xOy$ , punctul de intersecție a dreptelor  $x - (a + 1010)y + 2021 = 0$  și  $x + by - 5 = 0$  este  $A(a, 2)$ .
- 5p** 6. Demonstrați că  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1}{\operatorname{ctgx}}$ , pentru orice  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

### SUBIECTUL al II-lea

**(30 puncte)**

- 5p** 1. În mulțimea  $\mathcal{S}_3$  a permutărilor de 3 elemente, se consideră permutarea:  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 5p** a) Să se verifice dacă permutarea este pară
- 5p** b) Să se calculeze  $\sigma^{2022}$
- 5p** c) Să se rezolve ecuația  $x^2 = \sigma$  cu  $x \in \mathcal{S}_3$ .
- 5p** 2. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , și matricea  $J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 5p** a) Să se calculeze  $A(1)^{2021}$ .
- 5p** b) Să se calculeze determinantul matricei  $J_3 + A(1) + A(1)^t$ .
- 5p** c) Dacă  $B(x) = A(x) + J_3$ , să se calculeze  $B(1) + B(2) + \dots + B(2021)$ .

### SUBIECTUL al III-lea

**(30 puncte)**

- 5p** 1. S Se consideră șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definit astfel:  $x_0 = \sqrt{2}$ ,  $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ ,  $\forall n \geq 1$
- a) Să se studieze mărginirea.

**Teste rezolvate de matematică clasa a XI-a**  
Pregătire pentru Bacalaureat – Specializarea Matematică – Informatică (M1)

**5p**

b) Să se studieze monotonia.

**5p**

c) Să se studieze convergența și să se calculeze limita.

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2021^{x+1} - 3, & x \leq -1 \\ 2x^3 + (a-3)x - 4, & x > -1 \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$

**5p**

a) Determinați numărul real  $a$  pentru care funcția este continuă în  $x = -1$ .

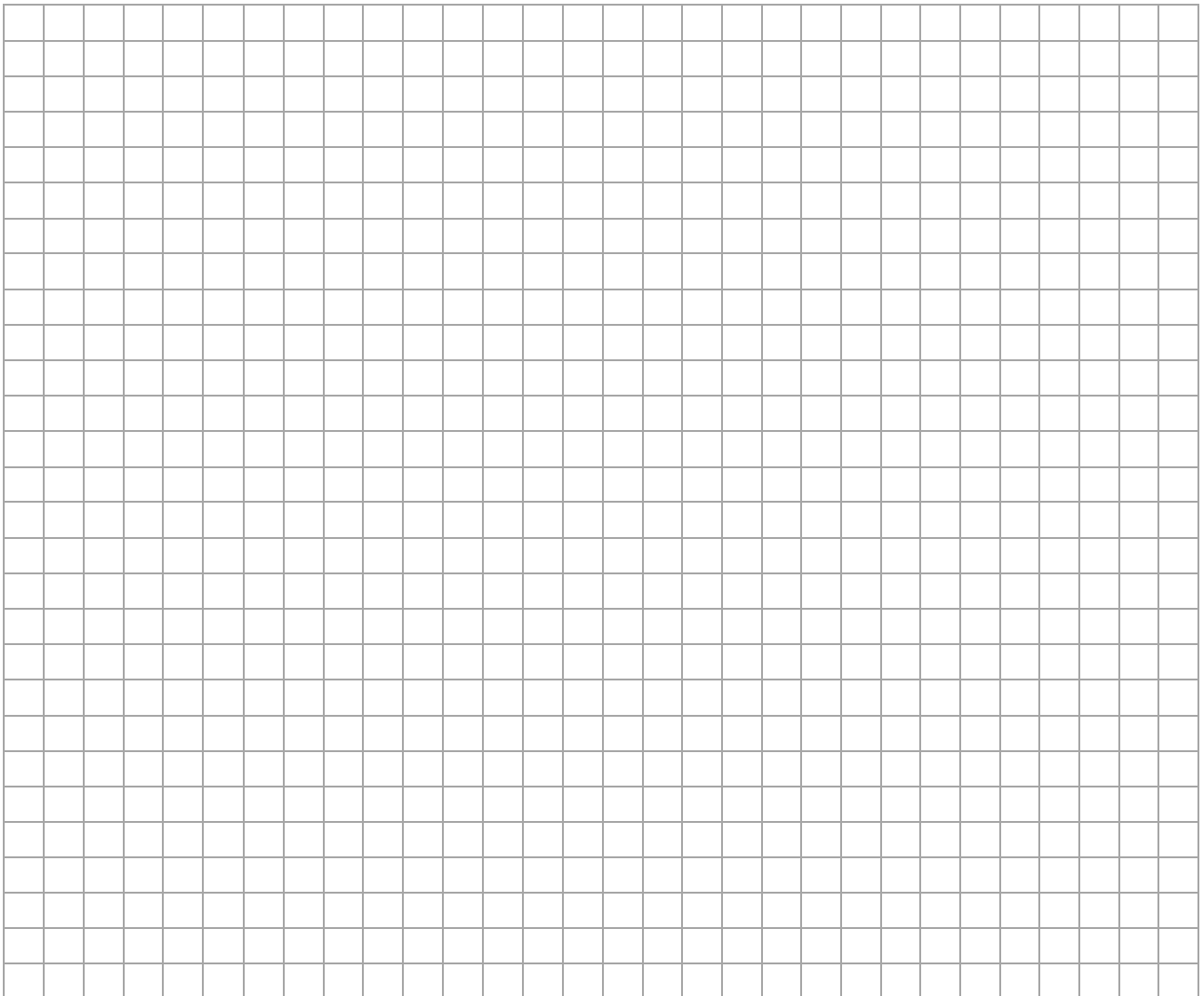
**5p**

b) Să se rezolve ecuația  $f(x) = -2$ , pentru  $x \leq -1$ .

**5p**

c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ , pentru  $a=3$ .

**SUCCES!**



# SUGESTIE DE REZOLVARE

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**Testul nr. 1**

**SUBIECTUL I**

**(30 puncte)**

<b>1.</b>	Condiția ca trei numere reale să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice: $x = \frac{2020+2022}{2} \Rightarrow 2x = 4042 \Rightarrow x = 2021$ .
<b>2.</b>	$(f \circ f)(x) = x + 2020 \Rightarrow f(f(x)) = x + 2020 \Rightarrow f(x) + a = x + 2020 \Rightarrow (x + a) + a = x + 2020 \Rightarrow 2a = 2020 \Rightarrow a = 1010$ .
<b>3.</b>	$2^{x-3} = \sqrt{2} \Rightarrow 2^{x-3} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$
<b>4.</b>	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile. Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor mai mare decât 51 sunt: 69, 78, 79, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99. Deci avem 10 cazuri favorabile.  Probabilitatea este: $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$
<b>5.</b>	Deoarece $A(a, 2)$ este punctul de intersecție al celor două drepte, coordonatele punctului verifică cele două ecuații. Se formează sistemul: $\begin{cases} a - (a + 1010) \times 2 + 2021 = 0 \\ a + b \times 2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2a - 2020 + 2021 = 0 \\ a + 2b - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + 1 = 0 \\ a + 2b - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = (5 - a)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = (5 - 1)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$
<b>6.</b>	$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1}{\operatorname{ctgx}}$ , pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{2 \times \sin x \times \cos x}{((\cos x)^2 + (\sin x)^2) + ((\cos x)^2 - (\sin x)^2)} = \frac{1}{\frac{\cos x}{\sin x}}$ pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{2 \times \sin x \times \cos x}{2 \times (\cos x)^2} = \frac{\sin x}{\cos x}$ pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$ pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ Adevărat.

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 puncte)**

<b>1. a)</b>	Perechea $(i, j)$ se numeste inversiune a permutării $\sigma$ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Numărul inversiunilor îl notăm $m(\sigma)$ . $m(\sigma) = 1 + 1 = 2, \varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = (-1)^2 = 1$ , deci $\sigma$ este permutare pară.
--------------	--

**Teste rezolvate de matematică clasa a XI-a**  
Pregătire pentru Bacalaureat – Specializarea Matematică – Informatică (M1)

<b>b)</b>	$\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(\sigma(1)) & \sigma(\sigma(2)) & \sigma(\sigma(3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \sigma^2 \circ \sigma =$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e, \sigma^{2022} = (\sigma^3)^{674} = e^{674} = e.$
<b>c)</b>	<p>Dacă <math>x \in \mathcal{S}_3</math> ar fi o permutare impară, atunci <math>x^2 = e</math>. Deci <math>x = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 3 \\ 2 &amp; 3 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p>
<b>2. a)</b>	$A(1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A(1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{Deci } A(1)^{2021} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<b>b)</b>	$J_3 + A(1) + A(1)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Determinantul matricei este egal cu 0.</p>
<b>c)</b>	$B(x) = A(x) + J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ $1+2+\dots+2021 = \frac{2021 \times (2021+1)}{2} = \frac{2021 \times 2022}{2} = 2021 \times 1011 = 2043231$ $B(1) + B(2) + \dots + B(2021) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \dots +$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2021 & 1 & 0 \\ 2021 & 2021 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 & 0 & 0 \\ 2043231 & 2021 & 0 \\ 2043231 & 2043231 & 2021 \end{pmatrix}$

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 puncte)**

<b>1. a)</b>	<p>Observăm că <math>x_0, x_1 \in (0,2)</math>. Demonstrăm prin inducție propoziția:  <math>P(n): 0 &lt; x_n &lt; 2, \forall n \in \mathbb{N}</math>          Etapa de verificare: <math>P(0): 0 &lt; x_0 &lt; 2</math>, afirmația este adevărată.          Etapa de demonstrație: <math>P(n) \Rightarrow P(n+1)</math>  <math>P(n+1): 0 &lt; x_{n+1} &lt; 2</math> este afirmația care trebuie demonstrată, în condițiile în care <math>P(n)</math> este adevărată.  <math>0 &lt; x_{n+1} &lt; 2</math> se scrie cu ajutorul relației de recurență <math>0 &lt; \sqrt{2+x_n} &lt; 2</math>          Cum <math>P(n)</math> este adevărată obținem <math>0 &lt; \sqrt{2+x_n} &lt; \sqrt{2+2} &lt; \sqrt{4} = 2</math>          Deci <math>P(n)</math> este adevărată <math>\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \Rightarrow</math> șirul este mărginit.</p>
--------------	---

**Teste rezolvate de matematică clasa a XI-a**

Pregătire pentru Bacalaureat – Specializarea Matematică – Informatică (M1)

<b>b)</b>	Avem $x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n \leq \sqrt{2 + x_n} \Leftrightarrow x_n^2 \leq 2 + x_n \Leftrightarrow x_n^2 - x_n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x_n^2 - 1) - (x_n + 1) \leq 0 \Leftrightarrow (x_n + 1)(x_n - 1 - 1) \Leftrightarrow (x_n + 1)(x_n - 2) \leq 0$ , adevarat deoarece $0 < x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$ . Deci șirul este monoton crescător.
<b>c)</b>	Conform rezultatelor de la a) și b), șirul este monoton crescător și mărginit superior. Deci șirul este convergent. Fie $l$ limita șirului. $x_{n+1} \leq \sqrt{2 + x_n}$ , trecând la limită $\Leftrightarrow l \leq \sqrt{2 + l} \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0, l_1 = -1$ (nu convine) și $l_2 = 2$ (limita șirului)
<b>2. a)</b>	Funcția este continuă în $x = -1, \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (2021^{x+1} - 3) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (2x^3 + (a - 3)x - 4) = f(-1) \Leftrightarrow -2 = -3 - a = -2 \Leftrightarrow a = -1$ .
<b>b)</b>	$f(x) = -2$ , pentru $x \leq -1 \Leftrightarrow 2021^{x+1} - 3 = -2 \Leftrightarrow 2021^{x+1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .
<b>c)</b>	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+1)^3 - 4}{2x^3 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x - 2}{2x^3 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(2 + \frac{6}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{2}{x^3})}{x^3(2 - \frac{4}{x^3})} = \frac{2}{2} = 1$ .