

# CUPRINS

1. Cuvânt înainte .....	3
2. Programa pentru evaluarea națională la matematică .....	4
3. Repere teoretice și exemple .....	16

## ARITMETICĂ ȘI ALGEBRĂ

3.A1. Mulțimi de numere .....	16
3.A2. Mulțimi .....	22
3.A3. Operații în mulțimi de numere .....	25
3.A4. Rapoarte, proporții, proporționalitate, probabilități .....	34
3.A5. Calcul algebric .....	41
3.A6. Ecuații și sisteme de ecuații .....	48
3.A7. Intervale și inecuații .....	54
3.A8. Funcții .....	61

## GEOMETRIE

3.G1. Punct, dreaptă, plan .....	65
3.G2. Paralelism și perpendicularitate .....	67
3.G3. Unghiuri în plan .....	72
3.G4. Triunghi, patrulater convex, cerc; clasificări .....	78
3.G5. Congruența triunghiurilor. Metoda triunghiurilor congruente .....	82
3.G6. Relația de asemănare; poligoane asemenea .....	85
3.G7. Linii importante în triunghi .....	89
3.G8. Descrierea și identificarea triunghiurilor isoscel și echilateral .....	92
3.G9. Descrierea și identificarea paralelogramelor .....	95
3.G10. Relații metrice în triunghiul dreptunghic .....	100
3.G11. Poligoane regulate .....	106
3.G12. Poliedre: reprezentări, desfășurări, proprietăți .....	108
3.G13. Corpuri de rotație: reprezentări, desfășurări, proprietăți .....	114
3.G14. Măsurare și măsuri .....	116

## 4. Recapitulare prin exerciții și probleme

	<i>Enunțuri</i>	<i>Soluții</i>
4.1. Mulțimea numerelor reale .....	119	231
4.2. Calcul algebric .....	123	233
4.3. Funcții .....	125	234
4.4. Ecuații, inecuații și sisteme de ecuații .....	126	235
4.5. Elemente de organizarea datelor .....	129	236
4.6. Măsurare și măsuri .....	130	236
4.7. Triunghiul .....	131	237
4.8. Patrulaterul convex .....	132	237
4.9. Cercul .....	135	238
4.10. Puncte, drepte, plane, unghiuri, corpuri geometrice .....	136	239

## Reducerea termenilor asemenea

**Termenii asemenea** conțin aceleași litere la aceleași puteri. Pentru a efectua adunarea sau scăderea expresiilor algebrice, *se reduc termenii asemenea*.

Reducerea termenilor asemenea constă în adunarea sau scăderea coeficienților lor.

**Exemple**

$$8x + 9,5x = (8 + 9,5)x = 17,5x;$$

$$7y - 12y = (7 - 12)y = -5y$$

În expresiile  $12a + 8$  sau  $3y - 4z$  nu se pot reduce termenii.

La operațiile cu expresii algebrice sunt valabile aceleași reguli ca și la calculul cu numere.

Termenii unei sume pot fi scriși în orice ordine (comutativitatea adunării).

**Exemple**

$$8x - 3x - 8x + 10x = 8x - 8x - 3x + 10x = 7x;$$

$$9a - 4b + 2a = 9a + 2a - 4b = 11a - 4b$$

• Dacă înaintea unei paranteze este semnul „+”, se elimină parantezele păstrând termenii cu semnul lor.

• Dacă înaintea unei paranteze este semnul „-”, se elimină parantezele schimbând semnele termenilor din paranteză.

**Exemple**

$$9a + (8a - 16a) = 9a + 8a - 16a =$$

$$= 17a - 16a = a;$$

$$3b - (7b - 10b) = 3b - 7b + 10b =$$

$$= -4b + 10b = 6b$$

• Dacă sunt mai multe variabile, scriem variabilele în ordine alfabetică și reducem termenii asemenea.

• Dacă apar puteri, ele se scriu în ordine descrescătoare.

**Exemplu**

$$5x + 9x^2 + 12y - 11x - 7y =$$

$$= (5 - 11) \cdot x + (12 - 7) \cdot y + 9x^2 =$$

$$= 9x^2 - 6x + 5y$$

## Factor comun. Scrierea unei expresii ca produs

Dacă într-o sumă, mai mulți termeni apar înmulțiți cu același număr, acela se poate da factor comun. *Suma se transformă astfel într-un produs.*

**Exemple**

$$8xy + 12ab = 4 \cdot 2xy + 4 \cdot 3ab = 4(2xy + 3ab);$$

$$21a^4x - 28a^3x^3y = 7a^3x \cdot 3 - (7a^3x) \cdot (4x^2y) =$$

$$= 7a^3x(3 - 4x^2y);$$

$$a^2 + a = a \cdot a + a \cdot 1 = a(a + 1)$$

Se poate da factor comun în mai multe etape, pentru a realiza o *descompunere în factori*.

**Exemplu**

$$\underline{3ax} + \underline{7ay} - \underline{6bx} - \underline{14by} = a(3x + 7y) + b(-6x - 14y) =$$

$$= a(3x + 7y) - 2b(3x + 7y) =$$

$$= (3x + 7y)(a - 2b)$$

Adesea se dovedește util să punem în evidență factorul comun (-1) pentru a putea continua calculele.

**Exemple**

$$x(a - b) + y(b - a) = x(a - b) + y \cdot (-1) \cdot (-b + a) =$$

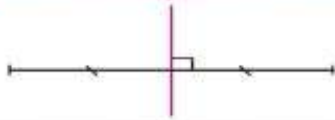
$$= x(a - b) - y(a - b) = (x - y) \cdot (a - b)$$

Observație: Nu contează în care paranteză dăm factor comun pe (-1)!



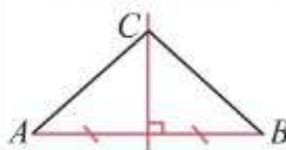
## Mediatoare și bisectoare în triunghi

Se numește **mediatoarea unui segment** dreapta perpendiculară pe segment și care trece prin mijlocul acestuia.



### Proprietatea mediatoarei unui segment

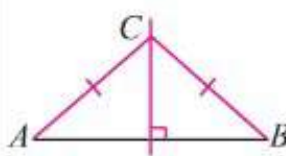
Dacă un punct este situat pe mediatoarea unui segment, atunci acel punct este egal depărtat de capetele segmentului.



*Ipoteză*  
 $C \in$  mediatoarei lui  $AB$   
*Concluzie*  
 $CA = CB$

### Reciproca proprietății mediatoarei unui segment

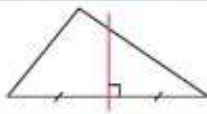
Dacă un punct este egal depărtat de capetele unui segment, atunci punctul se găsește pe mediatoarea acelui segment.



*Ipoteză*  
 $CA = CB$   
*Concluzie*  
 $C \in$  mediatoarei lui  $AB$

Se numește **mediatoare în triunghi** mediatoarea unei laturi a triunghiului.

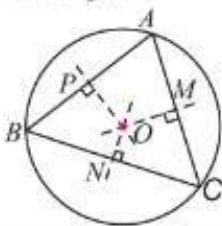
### Exemplu



### Teoremă

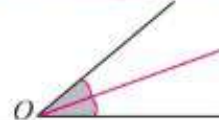
Mediatoarele unui triunghi sunt concurente în **centrul cercului circumscris** triunghiului.

### Exemplu



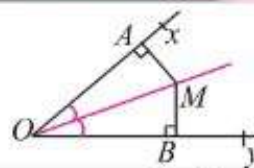
*Ipoteză*  
 $O \in$  mediatoarei lui  $AB$   
 $O \in$  mediatoarei lui  $BC$   
*Concluzie*  
 $OA = OB = OC = R$

Se numește **bisectoarea unui unghi** semidreapta interioară unghiului care separă unghiul în două unghiuri congruente.



### Proprietatea bisectoarei unui unghi

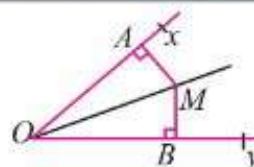
Dacă un punct este situat pe bisectoarea unui unghi, atunci acel punct este egal depărtat de laturile unghiului.



*Ipoteză*  
 $M \in$  bisectoarei  $\sphericalangle xOy$   
*Concluzie*  
 $d(M; Ox) = d(M; Oy)$

### Reciproca proprietății bisectoarei unui unghi

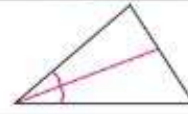
Dacă un punct situat în interiorul unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului, atunci acel punct aparține bisectoarei unghiului.



*Ipoteză*  
 $d(M; Ox) = d(M; Oy)$   
 $M$  interior  $\sphericalangle xOy$   
*Concluzie*  
 $M \in$  bisectoarei  $\sphericalangle xOy$

Se numește **bisectoare în triunghi** intersecția dintre bisectoarea unui unghi al triunghiului și interiorul triunghiului.

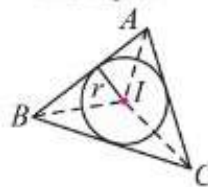
### Exemplu



### Teoremă

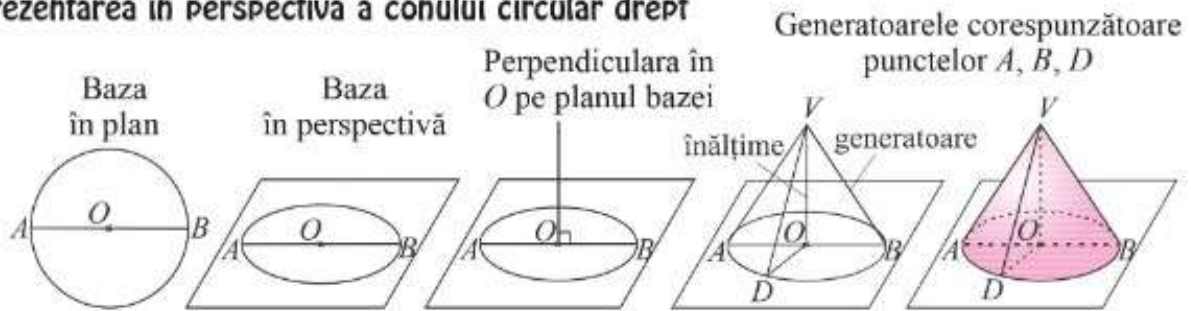
Bisectoarele unui triunghi sunt concurente în **centrul cercului înscris în triunghi** (tangent celor trei laturi).

### Exemplu



*Ipoteză*  
 $C(I, r)$  înscris în  $\triangle ABC$   
 $AI, BI$  – bisectoare  
*Concluzie*  
 $d(I, BC) = d(I, AC) = d(I, AB) = r$

## Reprezentarea în perspectivă a conului circular drept

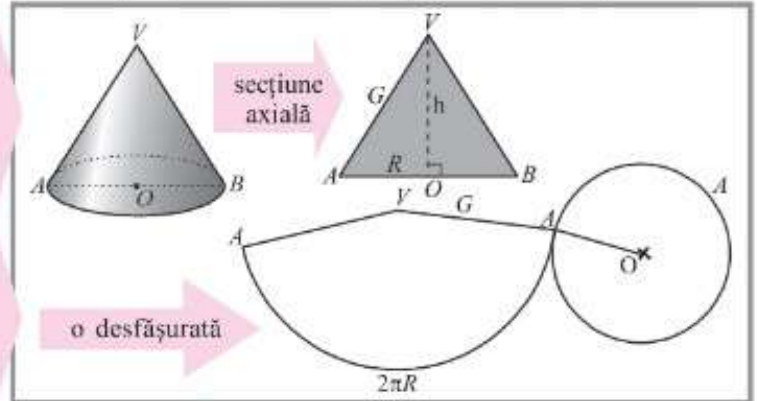


### Con circular drept

Notăm lungimile următoarelor segmente:

- raza bazei:  $OA = OB = R$
- înălțimea:  $VO = h$
- generatoarea:  $VA = VB = G$

- Aria laterală =  $\pi RG$
- Aria totală =  $\pi RG + \pi R^2$
- Volumul =  $\frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h$



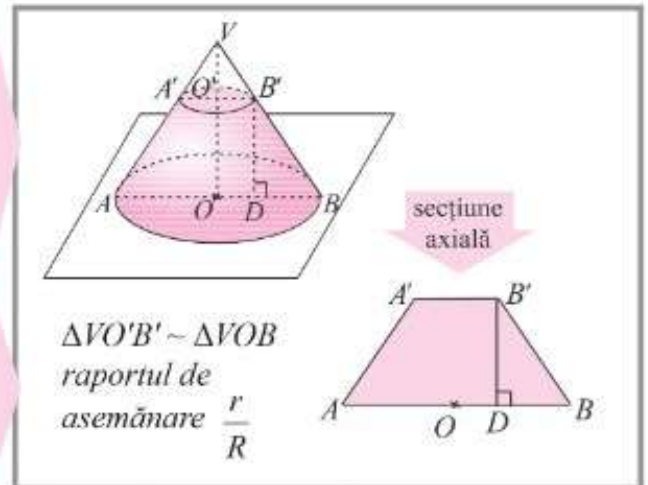
**Trunchiul de con circular drept** este corpul obținut prin secționarea unui con circular drept cu un plan paralel cu planul bazei. Se desenează conul din care provine trunchiul.

### Trunchiul de con circular drept

Notăm lungimile următoarelor segmente:

- raza bazei mici:  $O'B' = r$
- raza bazei mari:  $OB = R$
- înălțimea trunchiului:  $O'O' = h_i$
- generatoarea trunchiului:  $BB' = G_i$
- $G_i^2 = h_i^2 + (R - r)^2$

- Aria laterală =  $\pi G_i(R + r)$
- Aria totală = aria laterală + ariile bazelor =  $\pi G_i(R + r) + \pi R^2 + r^2$
- Volumul =  $\frac{\pi h_i}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$



**Sfera** este corpul obținut prin rotația completă a unui semicerc în jurul propriului său diametru.

### Sfera

Notăm lungimile următoarelor segmente:

- raza sferei:  $OA = OB = R$
- diametrul sferei:  $AB = 2R$

• Sfera nu se poate desfășura într-un plan.

- Aria sferei =  $4\pi R^2$ ; • Volumul sferei =  $\frac{4\pi R^3}{3}$

Cerc ecuator = cercul obținut prin intersecția sferei cu un plan care trece prin centrul sferei.





## 4. RECAPITULARE PRIN EXERCIȚII ȘI PROBLEME

### 4.1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I. Pentru următoarele exerciții, alege răspunsul corect (un singur răspuns din patru este corect).

- Se consideră  $A = \{2, -2, -1, 1\}$ . Cel mai mic număr din mulțimea  $A$  este:  
A)  $-1$       B)  $2$       C)  $1$       D)  $-2$
- Se consideră mulțimile  $A = \{0, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, a, 3\}$  și  $A \cap B = \{2, 3\}$ . Valoarea numărului  $a$  este:  
A)  $0$       B)  $2$       C)  $3$       D)  $1$
- Fie mulțimile  $A = \{1, 2, 3\}$  și  $B = \{1, 3, 4\}$ . Mulțimea  $A \cup B$  este egală cu:  
A)  $\{1, 2, 3, 4\}$       B)  $\{1, 2, 3\}$       C)  $\{1, 3, 4\}$       D)  $\{1, 3\}$
- Cel mai mic divizor natural par al numărului  $80$  este egal cu:  
A)  $2$       B)  $80$       C)  $4$       D)  $40$
- Cel mai mic multiplu comun al numerelor  $2$  și  $15$  este egal cu:  
A)  $1$       B)  $5$       C)  $36$       D)  $12$
- Suma divizorilor naturali ai numărului  $6$  este egală cu:  
A)  $11$       B)  $2$       C)  $1$       D)  $-2$
- Dintre numerele naturale  $a = 1239$ ,  $b = 1234$ ,  $c = 5231$ ,  $d = 4325$  cel divizibil cu  $3$  este:  
A)  $b$       B)  $a$       C)  $d$       D)  $c$
- Cel mai mare număr natural par de trei cifre este egal cu:  
A)  $999$       B)  $989$       C)  $998$       D)  $990$
- Cel mai mic număr natural impar format din două cifre diferite este numărul:  
A)  $11$       B)  $97$       C)  $13$       D)  $10$
- Cel mai mic număr întreg mai mare decât  $-28,7$  este egal cu:  
A)  $-28$       B)  $-27$       C)  $-30$       D)  $-25$
- Cel mai mare număr întreg mai mic decât  $-13,2$  este egal cu:  
A)  $-13$       B)  $-14$       C)  $-12$       D)  $-15$
- Pe 12 decembrie temperatura din București a fost  $-12,3$  °C. Cea mai mare temperatură, număr întreg, mai mică decât  $-12,3$  °C este egală cu:  
A)  $-12$       B)  $-14$       C)  $-13$       D)  $-11$
- Dacă  $\frac{a}{25} = \frac{7}{b}$ , atunci numărul  $a$  este egal cu:  
A)  $7$       B)  $14$       C)  $15$       D)  $10$
- Dacă  $\frac{a}{8} = \frac{14}{35}$ , atunci  $ab - 56$  este egal cu:  
A)  $-8$       B)  $8$       C)  $0$       D)  $7$
- Dacă  $\frac{5}{x} = \frac{y}{6}$ , atunci  $100 - 3xy$  este egal cu:  
A)  $0$       B)  $10$       C)  $-10$       D)  $1$