c o l e c ț i a

concursuri școlare

Editura Paralela 45 este recunoscută de
Consiliul Național al Cercetării Științifice (CNCS)

Referent științific: conf. dr. ing. Alexandru Nicolae Tudosie – Universitatea din Craiova

Redactare: Amalia Mărășescu
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Ionuț Broștianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
STRETCU, DANIEL
Probleme de colorare pentru pregătirea concursurilor de matematică /
Daniel Stretcu ; cuv. înainte de conf. dr. ing. Alexandru Nicolae Tudosie. -
Ed. a 2-a, rev. - Pitești : Paralela 45, 2017
Conține bibliografie
ISBN 978-973-47-2486-4

I. Tudosie, Alexandru Nicolae (pref.)

51

prof. dr. DANIEL STRETCU

Probleme de colorare

pentru pregătirea concursurilor de matematică

Cuvânt-înainte de conf. dr. ing. Alexandru Nicolae Tudosie

Ediția a II-a, revizuită

Editura Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Colorarea suprafeţelor, deşi la început a fost doar o chestiune aparent simplă, de estetică, de talent artistic, a devenit, în decursul anilor, o problemă complexă, cu multiple ramificaţii şi implicaţii în alte domenii, pentru a cărei soluţionare a fost nevoie să se dezvolte un întreg aparat matematic, dublat, în zilele noastre, de utilizarea instrumentelor de calcul, devenind, în acest mod, obiect de studiu al matematicii şi al informaticii.

Cu satisfacţie am constatat că specialiştii români (matematicieni, informaticieni, ingineri) s-au înscris, la rândul lor, printre cei care au contribuit şi contribuie, pe diverse paliere ale ştiinţei şi cercetării, la dezvoltarea acestui domeniu, iar lucrarea de faţă constituie o nouă dovadă în acest sens.

Concepută ca o culegere de probleme ierarhizate pe grade de dificultate, de la simplu la complex, cartea domnului prof. dr. Daniel Stretcu şi-a propus şi a reuşit să exploreze progresiv şi sistematic un segment atipic şi mai puţin familiar al matematicii, venind în întâmpinarea cererii multor rezolvitori de probleme, a pasionaţilor de matematică sau chiar a specialiştilor în domeniu.

Lucrarea este rodul muncii pasionate, ca profesor de matematică, a autorului şi este bazată pe experienţa sa de aproape trei decenii; munca de zi cu zi cu generaţiile de elevi (la clasă sau la cercurile de matematică) i-a fost imbold şi sursă de inspiraţie, iar motivaţia i-a fost sporită de succesele acestora la concursurile locale, naţionale şi internaţionale, ca şi de reuşitele lor în carieră.

conf. dr. ing. Alexandru Nicolae TUDOSIE
Universitatea din Craiova

INTRODUCERE

Pavarea, pardosirea, parchetarea, mozaicarea au fost operaţii cunoscute şi aplicate de vechii egipteni, babilonieni, de popoarele din Orient şi de grecii antici. Efectul acestor operaţii creşte atunci când materialul folosit nu are o singură culoare, ci este colorat diferit. Fascinaţia pentru combinarea culorilor a fost transpusă în matematică încă din Antichitate, astfel apărând o serie de probleme de acoperire (pavare), precursoare ale celor ce astăzi sunt numite **probleme de colorare.**

Sunt demne de amintit în evoluţia apariţiei şi rezolvării acestor probleme acoperirea unei suprafeţe plane cu poligoane regulate de acelaşi tip, rezolvată de Pitagora; acoperirea planului cu poligoane convexe de tipuri diferite, rezolvată de Kepler şi, nu în ultimul rând, celebra *Teoremă a celor patru culori* formulată de studentul Francis Guthrie (cunoscută începând cu anul 1852): „*Se poate colora o hartă oarecare cu patru culori astfel încât oricare două ţări, care au frontieră comună şi care nu se reduc la un punct, să aibă culori diferite?*" ce a fost confirmată abia în 1976 de W. Haken şi K. Appel, cu ajutorul calculatorului electronic.

Evident, astăzi prin probleme de colorare nu înţelegem doar probleme de acoperire, problematica dezvoltându-se şi spre zone mai abstracte, iar soluţiile acestora se obţin cu ajutorul matematicii şi al informaticii.

Ideea scrierii acestei cărţi a venit de la dificultăţile întâmpinate de un număr mare de elevi la concursurile şcolare în rezolvarea problemelor de colorare, dificultăţi cauzate şi de inexistenţa unor lucrări care să descrie complet această temă.

Problemele de colorare se caracterizează prin natura lor atipică, ce impune din partea rezolvitorilor ingeniozitate, perseverenţă în căutarea soluţiilor, dar şi o anumită experienţă în acest domeniu.

Cartea se adresează tuturor categoriilor de elevi, de la începători până la cei care vor să obţină performanţe la concursurile şi olimpiadele de matematică şi de informatică. Astfel se explică faptul că vom întâlni în această lucrare atât probleme uşoare (unele fiind *clasice*), cât şi numeroase probleme cu grad înalt de dificultate. Volumul acesta se adresează în principal elevilor de gimnaziu şi celor din clasele a noua şi a zecea, interesaţi să participe la concursuri matematice şi la olimpiade şcolare, până la cel mai înalt nivel, cum sunt olimpiadele internaţionale şi balcaniadele. Pe de altă parte, considerăm că această culegere este utilă şi profesorilor de matematică şi de informatică în susţinerea unor cursuri opţionale şi pregătirea elevilor pentru participarea la diverse competiţii.

Cititorul interesat va găsi în paginile acestei cărţi o abordare metodică şi sistematică a problematicii enunţate, lucrarea fiind structurată în şapte capitole.

Primul capitol cuprinde probleme de colorare mai uşoare, întâlnite la diferite concursuri, menite să trezească interesul elevilor pentru studiul acestui tip de probleme.

Capitolul al doilea conţine probleme de colorare a tablelor, inclusiv table de şah, de la cele mai mici dimensiuni până la cele mai mari. Acestea constituie tipul de probleme cel mai frecvent întâlnit în concursurile şcolare.

În capitolul al treilea sunt prezentate problemele de colorare a cercului, iar apoi probleme în care apar diverse poligoane într-o ordine crescătoare a numărului de laturi.

Colorarea planului şi spaţiului euclidian este studiată în diferite cazuri particulare în capitolul al patrulea.

Capitolul al cincilea se referă la problemele de colorare în care apar cubul şi diferite paralelipipede sau prisme.

Capitolul al şaselea este un capitol cu totul special, dedicat introducerii în studiul problemelor de colorare a grafurilor. Desigur, tema acestui capitol depăşeşte programa şcolară şi, din acest motiv, la sfârşitul cărţii am introdus un apendix necesar pentru familiarizarea cu noţiunile folosite aici.

La final, capitolul al şaptelea prezintă probleme şi jocuri diverse care nu se încadrează în vreuna din temele precedente.

Modul recomandat de parcurgere a cărţii de faţă trebuie să fie unul interactiv, elevul nefiind invitat ca imediat după citirea problemei să se uite la soluţiile acesteia. El trebuie să încerce singur o metodă de rezolvare şi, dacă această metodă nu este găsită, poate să treacă la partea de soluţii.

Mulţumesc tuturor celor care, prin consideraţiile lor, au contribuit la creşterea calităţii acestei cărţi (ediţia a doua) şi aştept în continuare observaţii la adresa de e-mail: stretcud@yahoo.com sau pe datele de contact ale editurii.

prof. dr. DANIEL STRETCU

Capitolul 5

PROBLEME DE COLORARE A CUBURILOR, A PARALELIPIPEDELOR ȘI A PRISMELOR

5.1 Colorăm cu roşu vârfurile unui cub şi cu albastru centrele feţelor sale. Există un drum care să treacă prin toate punctele colorate o singură dată, mergând doar de-a lungul diagonalelor feţelor?

5.2 Putem împacheta 249 de cărămizi de dimensiuni $1 \times 1 \times 4$ într-o cutie $10 \times 10 \times 10$, feţele cărămizilor fiind paralele cu feţele cutiei?

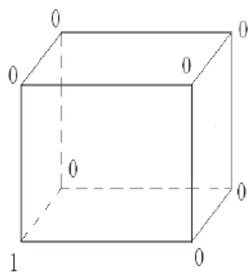
5.3 Colorăm fiecare faţă a unui cub cu câte o altă culoare. Câte colorări distincte există?

5.4 Un cub de latură n, cu $n \in \mathrm{N}^*$, se vopseşte şi apoi se împarte în cubuleţe de latură 1. Câte dintre cubuleţe vor avea:
i) nicio faţă vopsită? ii) o faţă vopsită? iii) două feţe vopsite? iv) trei feţe vopsite?

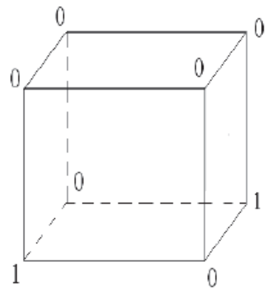
5.5 Un cub se vopseşte cu trei culori: roşu, galben şi albastru, astfel încât feţele opuse să aibă aceeaşi culoare. În câte moduri putem efectua vopsirea cubului? Generalizaţi, înlocuind cubul cu o prismă patrulateră regulată şi, respectiv, un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile distincte două câte două.

5.6 Pentru ce valori naturale a, b, c putem obţine o cutie $a \times b \times c$, compusă din cuburi unitate, fiecare faţă a cubului unitate având câte o culoare (deci se folosesc 6 culori), astfel încât fiecare faţă a cutiei să aibă o culoare şi culorile unitate să fie lipite numai cu feţele având aceeaşi culoare?

5.7 În fiecare vârf al unui cub este înscris un număr, ca în figura alăturată. La fiecare pas se adaugă o unitate la două numere înscrise pe aceeaşi muchie a cubului. Arătaţi că nu se poate să obţinem ca toate cele opt numere să fie egale.

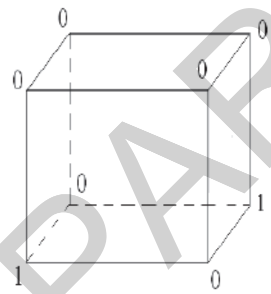


5.8 În vârfurile unui cub aşezăm 0 şi 1, ca în figura următoare:



Apoi, la fiecare pas, se adaugă câte o unitate la cele două numere scrise pe o aceeaşi muchie. Studiaţi dacă, după un număr de paşi, cele opt numere scrise în vârfuri pot deveni egale.

5.9 În vârfurile unui cub aşezăm 0 şi 1, ca în figura următoare:



La fiecare pas se adaugă o unitate la două numere înscrise pe aceeaşi muchie a cubului. Arătaţi că nu se poate să obţinem ca toate cele opt numere din vârfurile cubului să fie egale.

Daniel Stretcu

5.10 Fie prisma triunghiulară regulată $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$, având toate muchiile, precum şi diagonalele feţelor laterale colorate cu roşu sau albastru. În fiecare triunghi care se formează, exceptând bazele, există atât o latură roşie, cât şi o latură albastră. Arătaţi că toate cele 6 muchii ale bazelor sunt colorate cu aceeaşi culoare.

Concursul ,,Florica T. Câmpan", 2011

5.11 O furnică se mişcă pe suprafaţa unui cub de latură 1, mergând de la un vârf la altul pe câte o muchie sau pe o diagonală a feţei. Găsiţi lungimea celui mai lung drum de la un vârf la cel opus dacă drumul nu se autointersectează şi prin fiecare vârf furnica trece cel mult o dată.

Adrian Nemeș

CUPRINS