

EDITURA PARALELA 45



Redactare: Olimpia Filip, Andreea Cîrstea
Tehnoredactare: Ovidiu Mictar
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

ANDREI, GHEORGHE

Partea întreagă [x] : partea fracționară {x} / Gheorghe Andrei,
Constantin Caragea ; pref. de Radu Gologan. - Pitești : Paralela 45, 2018
2 vol.

ISBN 978-973-47-2693-6

Vol. 2 : x=[x]+{x}. - 2018. - Conține bibliografie. - ISBN
978-973-47-2695-0

- I. Caragea, Constantin
- II. Gologan, Radu N. (pref.)

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2018

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate
intelectuală.

Gheorghe ANDREI

Constantin CARAGEA

PARTEA ÎNTREAGĂ $[x]$
PARTEA FRAȚIONARĂ $\{x\}$

$$x = [x] + \{x\}$$

VOLUMUL II

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ[®]
supersucces



Editura Paralela 45

CUPRINS

	Enunțuri	Soluții
Prefață	7	
Introducere	9	
Capitolul XIII Elemente de aritmetică	11-17	18-40
Capitolul XIV Sume	41-57	58-110
Capitolul XV Inegalități.....	111-118	119-150
Capitolul XVI Șiruri	151-169	170-222
Capitolul XVII Funcții	223-238	239-302
Capitolul XVIII Probleme diverse	303-312	313-349
Capitolul XIX Paragrafe speciale	350-410	
Bibliografie	411	

PREFAȚĂ

De-a lungul a aproape jumătate de secol, profesorii constănțeni Gheorghe Andrei și Constantin Caragea au șlefuit matematic mințile a mii de foști elevi, nu neapărat atunci avizi de matematică, dar azi intelectuali de vază, unii dintre ei făcând cinste României pe multe continente. Alții sunt în prezent matematicieni renumiți, ce duc mai departe faima școlii românești de matematică.

Profesorii Andrei și Caragea sunt renumiți azi și prin numărul însemnat de culegeri de probleme apărute în ultimii patruzeci de ani, dar și prin problemele propuse la toate etapele olimpiadelor românești.

Culegerea de față este dedicată unui subiect important în toate domeniile matematicii: partea întreagă și partea fracționară a unui număr. De această noțiune sunt legate importante probleme, unele încă deschise, din teoria numerelor, algebră, analiză matematică. De exemplu, chestiunile legate de ordinul de aproximare a unui număr irațional cu un număr rațional conțin încă multe probleme deschise.

Cele nouăsprezece capitole ale cărții fac o trecere prin toate domeniile matematicii unde apare noțiunea de parte întreagă sau parte fracționară. Acestea conțin peste 1700 de probleme, prezentate gradat și având, în fiecare capitol, un preambul teoretic complet.

O recomand cu mare căldură elevilor care nu neglijează matematica, dar, în primul rând, profesorilor de matematică din gimnaziu și liceu. Vor găsi suficient material spre a delecta mințile deschise ale copiilor.

Radu Gologan

INTRODUCERE

Cartea este o adevărată megaculegere de probleme care se adresează elevilor și profesorilor pasionați de matematică, în dorința de a obține performanțe sporite.

Ea are rolul de a ușura activitatea de căutare și selectare a problemelor cu partea întregă și partea fracționară din diferite culegeri și publicații de matematică, întrucât această megaculegere este destul de cuprinzătoare. Ea reprezintă un izvor și un stimulator de abordare creatoare a altor probleme pe această temă.

Cu această ocazie aducem mulțumiri și felicitări tuturor autorilor multor probleme deosebite și fără de care cartea ar fi fost mai săracă și incompletă.

Au fost multe situații care ne-au pus „probleme” în găsirea soluțiilor, dar au fost și probleme asemănătoare propuse însă de „autori” diferiți. (Ne cerem anticipat scuze dacă am omis unii autori de probleme.)

Această carte este centrată pe un singur capitol de matematică: **Partea întregă și partea fracționară**, temă aproape inexistentă acum 30-40 de ani și mult mai frecventă în ultimii 15-20 de ani, atât în manuale, culegeri de probleme, reviste de specialitate, cât și în concursurile școlare. Prin cantitatea și varietatea problemelor și mai ales prin abordarea diferențiată a temelor cuprinse în cele 19 capitole, cartea reprezintă o adevărată enciclopedie a acestei teme.

Lucrarea acoperă un gol bibliografic, deoarece până acum elevii și profesorii nu aveau la îndemână un astfel de vast material de studiu.

Prima carte pe această temă a apărut la noi în țară în anul 1996, la Editura GIL, autori fiind Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu și Constantin Caragea, și anume, *Probleme de algebră – gimnaziu și liceu. Funcțiile „partea întregă” și „partea fracționară”*, urmată fiind de cartea regretatului profesor Mihai Onucu Drîmbe, *200 de identități și inegalități cu „partea întregă”*, Editura GIL, 2003.

Prin multe probleme de nivel ridicat, prezenta culegere poate sta la baza formării competențelor sporite în acest domeniu. Ea ar trebui să se afle la oricare centru de excelență, în orice școală unde se pregătesc olimpici și chiar în posesia oricărui elev capabil și doritor de performanță.

În fiecare capitol există o ierarhizare a problemelor, în funcție de gradul de dificultate, și anume: „probleme elementare”, nemarcate, probleme

mai dificile, cu o steluță, iar cele foarte dificile, cu două sau trei steluțe. Desigur, problemele de nivel standard, nemarcate, pot fi considerate ca „repere” necesare abordării celor mai dificile dintre ele.

Chiar dacă unele probleme sunt asemănătoare sau îmbracă o „haină mai veche”, ele au fost totuși puse cu respectul cuvenit istoriei lor și care confirmă progresul abordărilor pe această temă în ultimii 20-30 de ani.

Sunt destule probleme care apar în unul sau două capitole, deoarece ele pot fi încadrate tematic în aceste capitole. În cadrul aceleiași teme, megaculegerea cuprinde 19 capitole diferențiate pe anumite subteme. Vom enumera câteva: Cap. I – Proprietăți, Cap. II – Aplicații de bază, completat cu Cap. V – Partea întregă și partea fracționară a unor expresii cu radicali și Cap. VI – Egalități și identități, Cap. XV – Inegalități, Cap. VIII, IX, X – Ecuatii, ecuații cu parametri, respectiv ecuații cu mai multe necunoscute, Cap. XII – Sisteme, Cap. XIII – Elemente de aritmetică, Cap. XIV – Sume, Cap. XVI și XVII – Șiruri, respectiv funcții, care conțin probleme ce aduc o completare a capitolelor respective din clasele a IX-a, a X-a și a XI-a. Capitolul XIX – Paragrafe speciale cuprinde chiar câteva paragrafe speciale care pun în evidență o gamă largă de aplicabilitate a funcției „partea întregă” și „partea fracționară”: funcția de rotunjire, funcția lui Legendre cu aplicații, funcțiile $\tau(n)$, $\sigma(n)$, $\varphi(n)$ (cu notațiile consacrate), spectrul unui număr, puncte laticiale etc.

Megaculegerea conține peste 1700 de probleme și proprietăți importante cu aplicativitate imediată la alte probleme. Pentru ca această carte să fie accesibilă unui număr mai mare de elevi și profesori, soluțiile sunt destul de detaliate, iar multe dintre probleme au câte două sau trei soluții.

Pentru alcătuirea acestei culegeri de probleme, s-a depus o muncă susținută pe parcursul mai multor ani, consultându-se un uriaș material bibliografic, iar ca urmare, autorii înșiși și-au sporit competențele în acest domeniu.

Așteptăm soluții deosebite sau abordări interesante, precum și noi probleme pe această temă, ce vor fi cuprinse într-o viitoare ediție (e-mail: profandreigheorghe@gmail.com).

Autorii

ϕ 1.

1*. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine:

a) $[\sqrt{n^2 + n}]$;

b) Prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2 + n}$;

c) Să se determine ultima cifră a numărului $[10 \cdot \sqrt{n^2 + n}]$.

2. Arătați că pentru $n \geq 5$ numărul a_n , egal cu partea fracționară a numărului $\sqrt{n^2 + 2n}$, are prima zecimală 9.

Există n pentru care a_n are primele 2011 zecimale egale cu 9?

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine prima zecimală a șirului $a_n = \sqrt{n^2 + n}$;

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care prima zecimală a numărului $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ este 2;

c) Determinați prima zecimală de ordinul 1 a șirului $c_n = \sqrt{4n^2 + n}$.

4. Determinați toate numerele naturale $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care a doua zecimală a numărului $\{\sqrt{n(n+1)}\}$ nu este 9.

5. Determinați cel mai mic număr natural pentru care primele două zecimale ale numărului $\sqrt{n^2 + 4n + 1}$ sunt egale cu 9.

6**. Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul:

$$A = \left[\frac{n^3 + 8n^2 + 1}{3n} \right] \text{ este prim.}$$

7**. Să se determine cel mai mic număr natural pentru care

$$0,7 < \{\sqrt[3]{n}\} < 0, (7).$$

8**. Descrieți forma numerelor naturale n pentru care $1 + [\sqrt{2n}]$ divide pe $2n$.

9**. Demonstrați că există o infinitate de numere naturale n pentru care partea întreagă a numărului $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ este diferită de partea întreagă a numărului $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$.

10**. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $[n\sqrt{2}] = [n\sqrt{3}]$.

11**. Să se arate că nu există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{2^m\sqrt{5}\} = \{3^n\sqrt{5}\}$.

12. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 4$, numărul $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ este compus.

13*. Determinați numerele naturale n care satisfac simultan proprietățile:

a) $\left[\frac{n}{9}\right]$ este număr natural de trei cifre egale;

b) $\left[\frac{n+36}{4}\right]$ este un număr natural de patru cifre, cifrele fiind $\{2,0,0,9\}$.

14. Să se determine $a > 0$ știind că $a^2 + 2[a]$ să fie pătrat perfect.

15. Să se arate că $a_n = \left[\frac{n+3}{4}\right] + \left[\frac{n+5}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + n^2 + 3n + 3$ este pătrat perfect, pentru $\forall n \in \mathbb{N}$.

16**. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care:

a) $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ este număr prim;

b) Să se determine cel mai mare $n \in \mathbb{N}$, pentru care $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ este număr prim.

17**. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 4$ și $\left[\frac{2^n}{n}\right]$ este o putere a lui 2, atunci n este o putere a lui 2.

18***. Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$ cu $a < \sqrt{2n}$. Să se arate că numărul $\left[\frac{n^2}{a^2}\right]$ este pătrat perfect, dacă și numai dacă n se divide cu a .

19**. Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{\sqrt{n+\sqrt{n}}\} = \{\sqrt{a}\}$. Arătați că $4a+1$ este pătrat perfect.

20. Fie p un număr prim, $p \geq 3$ și d un număr liber de pătrate.

Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea: $\left\{n\sqrt{d} + \frac{n}{p}\right\} = \{n\sqrt{d}\}$?

21**. Să se arate că: $\left[a\left[\frac{n+a^2}{a}\right] + a\right] = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

22**. Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$, numărul de aur, adică soluția pozitivă a ecuației

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

(Ecuația caracteristică a șirului lui Fibonacci)

Să se arate că $[a^2n] \equiv [a[an]] + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

capitolul

17

Funcții

φ 1. Exerciții diverse

1*. Să se arate că funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor$ este periodică și să se determine $\text{Im}f$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $f(x) = \{x\} + \{2x\} + \{3x\}$.

a) Să se arate că f este periodică și să se determine perioada principală.

b) Să se rezolve inecuația $f(x) \leq 1$.

3. Fie $f: [0, \infty), n \in \mathbb{N}^*$ dat și $f(x) = (-1)^{[x]} \left(x - 2n \left\lfloor \frac{x}{2n} \right\rfloor - 1 \right) + 4$.

Să se arate că f este periodică.

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că:

$f(x+2) = \{f(x+1)\} + [f(x)], (\forall) x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este periodică.

5. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că:

$$f\left(\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor\right) = \frac{f(m)}{f(n)}, \forall m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.$$

6*. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=1}^n \{kx\}$.

Să se arate că f este periodică și să se determine perioada principală.

7. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Să se arate că $f(x+a) = f(x) + f(a) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = a \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor + f\left(a \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

8*. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\} + \{2x\} + \{3x\}$.

a) Să se arate că f este periodică și să se determine perioada principală.

b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = 2$.

c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = 2,5$.

9. a) Fie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+3}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+4}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+5}{5} \right\rfloor.$$

Să se determine $\text{Im}f$.

b) Fie $f: [0,50] \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = [x] + [2x] + [3x] + \left[\frac{4x}{3}\right]$.

Să se determine $\text{Im}f$.

c) Fie $f: [0,100] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = [x] + [2x] + \left[\frac{5x}{3}\right] + [3x] + [4x]$.

Să se determine $\text{Im}f$.

10*. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [a+x] - [a] - x$.

Să se arate că f este periodică și să se reprezinte grafic.

11* a) Arătați că $x + \frac{100}{x} \geq 20$, pentru $\forall x > 0$;

b) Determinați valoarea minimă a sumei

$$S_{(x)} = [x] + \left[\frac{100}{x}\right], \forall x > 0.$$

12*. Să se determine două drepte paralele $y = mx + a$, $y = mx + b$ care să determine o bandă ce cuprinde graficul funcției $f(x) = [x]$.

13*. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left[\left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right]$ (funcția dinte).

Să se arate că f are axă de simetrie.

14*. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (-1)^{[x]}, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Arătați că f are o infinitate de axe de simetrie.

15**. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{2} - \left| 1 - 2 \left\{ \frac{x+1}{2} \right\} \right|$.

Să se arate că:

a) $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$;

b) $\sin \pi x = \cos \pi f(x)$.

16**. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a[x] + b\{x\}$ este impară dacă și numai dacă $a = b$.

17*. Fie $f: \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \{x\}$. Să se arate că f este strict crescătoare.

18**. Să se arate că nu există funcții strict monotone $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f(x)) = \{x\}$, $\forall x \in [0,1]$.

19**. Arătați că funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$, definită prin: $f(n) = \left\{ \sqrt[3]{n^3 + n^2} \right\}$ este strict crescătoare.