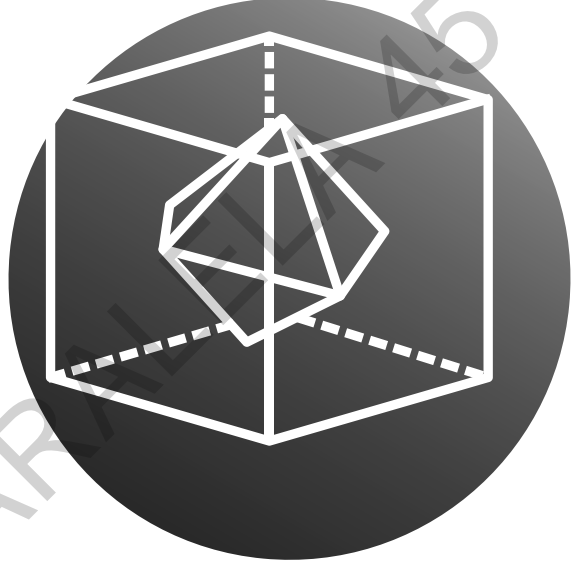




biblioteca de
matematică



EDITURA PARALELA 45

*Referent științific: prof. univ. dr. Grigore Ștefan Sălăgean,
Facultatea de Matematică și Informatică,
Universitatea „Babeș-Bolyai” Cluj-Napoca.*

Redactare: Bianca Vișan
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

CREȚU, IRINA

Metode de rezolvare a problemelor de geometrie / Irina Crețu. -

Ed. a 2-a. - Pitești : Paralela 45, 2019

Conține bibliografie

ISBN 978-973-47-2979-1

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2019

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

www.edituraparelela45.ro

Irina **CREȚU**

metode

de rezolvare
a problemelor de

geometrie

Ediția a II-a

Editura Paralela 45

Cuprins

Introducere.....	7
I. Metode generale folosite în geometrie pentru rezolvarea problemelor	9
1. Metoda sintezei	9
1.1. Metoda sintezei în rezolvarea problemelor de calcul	9
1.2. Metoda sintezei în rezolvarea problemelor de demonstrație	14
2. Metoda analizei.....	20
2.1. Metoda analizei în rezolvarea problemelor de calcul	21
2.2. Metoda analizei în rezolvarea problemelor de demonstrație	24
3. Metoda analitico-sintetică.....	26
3.1. Metoda analitico-sintetică în rezolvarea problemelor de calcul	27
3.2. Metoda analitico-sintetică în rezolvarea problemelor de demonstrație	29
II. Metode particulare folosite în geometrie pentru rezolvarea problemelor	33
1. Metoda reducerii la absurd	33
2. Metoda inducției complete.....	36
2.1. Metoda inducției matematice în problemele de calcul	37
2.2. Metoda inducției matematice în probleme de demonstrație	40
3. Probleme de construcții geometrice.....	42
4. Probleme de locuri geometrice	45
4.1. Probleme pentru aflarea locurilor geometrice	45
4.2. Probleme de construcții cu ajutorul locurilor geometrice.....	50
5. Metode specifice de rezolvare a problemelor de coliniaritate și concurență	53
5.1. Metode specifice de rezolvare a problemelor de coliniaritate	53
5.2. Metode specifice de rezolvare a problemelor de concurență.....	58
6. Metoda vectorială	68
7. Metoda analitică	76
8. Metoda numerelor complexe	85
III. Aplicații privind studiul comparativ al metodelor de rezolvare a problemelor de geometrie	91
Concluzii.....	115
Bibliografie.....	117

Introducere

Matematica zilelor noastre este un edificiu grandios care cu trecerea timpului a înglobat în sine tot mai scilpitoare realizări ale unor creatori de geniu.

Prin natura problemelor pe care le ridică în fața elevilor, matematica solicită operații complexe ale gândirii: problematizarea, compararea, abstractizarea, transferarea etc.

Cuvântul *metodă* vine de la grecescul *methodos*: *meta* = „către” și *odos* = „cale”, care înseamnă „cu calea”, „după drumul”, „drum către ceva”. În *matematică*, prin *metodă* se înțelege calea rațională care trebuie folosită pentru a demonstra o teoremă sau pentru a rezolva o problemă. În *geometrie* se întâlnesc variate și numeroase probleme, însă oricât s-ar încerca, nu e posibil să se găsească un singur mers rațional după care toate problemele s-ar putea rezolva, pentru că un grup mare de probleme se rezolvă într-un fel, alt grup în alt fel.

Cunoașterea unor metode de raționament în studiul geometriei este necesară deoarece, pe de o parte, ele *înlesnesc înțelegerea demonstrațiilor*, iar pe de altă parte, constituie *mijloace de cercetare* în rezolvarea problemelor. Problemele de geometrie sunt, așadar, atât de variate, încât nu se pot da indicații generale pentru rezolvarea lor. Dificultățile principale ale problemelor de geometrie constau în caracterul lor nonstandard. Fiecare problemă de geometrie comportă un *studiu specific* în care sunt implicate, în afara cunoștințelor primite în școală, o anumită *obișnuință* de a rezolva probleme, o *gândire logică* bine conturată, precum și o anumită *creativitate*.

Lucrarea de față este structurată pe trei capitole: Capitolul I „Metode generale folosite în geometrie pentru rezolvarea problemelor”, Capitolul II „Metode particulare folosite în geometrie pentru rezolvarea problemelor” și Capitolul III „Aplicații privind studiul comparativ al metodelor de rezolvare a problemelor de geometrie”.

În această lucrare, ținând seama de principiile și rigorile matematice, mi-am propus să analizez câteva aspecte legate de metodele generale și particulare de rezolvare a problemelor de geometrie, pentru ca în ultima parte a lucrării să prezint diverse probleme cu mai multe soluții de rezolvare, probleme care să ducă la aprofundarea, consolidarea și completarea cunoștințelor dobândite la clasă. Principalele surse pentru redactarea lucrării au fost [8], [15], [16], [22], [24], [30], [31] din lista bibliografică. În aceste lucrări pot fi găsite, așadar, mai multe probleme de geometrie care se rezolvă prin metode generale sau prin unele metode particulare.

Autoarea



1. Metoda sintezei

Cuvântul *sinteză* vine din grecescul *synthesis*, care înseamnă strângerea într-un întreg a părților componente care au fost despărțite. În logică, sinteza este o metodă de raționament care constă în faptul că desfășurarea gândirii se face de la simplu la compus sau de la cunoscut la necunoscut. Demonstrația în care se pornește de la propoziții particulare spre propoziții generale se numește *demonstrație sintetică* (*metodă inductivă* sau *prin sinteză*). În acest tip de demonstrație se pornește de la *cunoscut spre necunoscut*, adică pornind de la o propoziție despre care știm că este adevărată, deducem propoziții care, de asemenea, sunt adevărate și ultima este cea care trebuie demonstrată. Așadar, în această metodă, *gândirea elevului este dirijată pentru a se răspunde la întrebarea: Dacă știi ..., ce pot să aflu?*

1.1. Metoda sintezei în rezolvarea problemelor de calcul

Prin probleme de calcul înțelegem acele probleme care cer găsirea unor valori numerice atunci când se cunosc anumite date. Dacă mărimile din problemă nu sunt exprimate prin numere, rezultatul obținut se exprimă, în mod general, printr-o formulă. Problemele de calcul se împart în:

- exerciții și probleme cu conținut geometric, dar pentru rezolvarea cărora se cere cunoașterea rezolvării problemelor tip din aritmetică;
- probleme care, pentru a le găsi rezultatul, cer folosirea mai multor propoziții legate într-un raționament.

Rezolvarea exercițiilor nu cere din partea celui ce le face un efort mare de gândire, construcția unor raționamente complicate, ci numai cunoașterea temeinică a regulilor, a formulelor sau a teoremelor studiate. Deși rezolvarea exercițiilor dezvoltă prea puțin gândirea logică, ele au o importanță mare pentru studiul geometriei deoarece, pe de o parte, contribuie la formarea priceperilor și deprinderilor pentru a aplica cunoștințele teoretice în rezolvarea problemelor, ceea ce constituie, de fapt, primul pas în aplicarea teoriei în practică, iar pe de altă parte, formează, încetul cu încetul, încrederea în forțele proprii.

Prin metoda sintezei o problemă de calcul se rezolvă astfel: se iau două date cunoscute ale problemei între care există o legătură și cu ajutorul lor se formulează o

problemă ce ne dă posibilitatea să calculăm valoarea celei de-a treia mărimi, care devine astfel cunoscută. Se iau apoi alte două date cunoscute (fie date prin enunțul problemei, fie calculate anterior) și cu ajutorul lor se formulează o problemă, care rezolvată ne dă valoarea unei alte mărimi. Se procedează în acest mod până găsim tocmai valorile mărimilor ce se cer în problemă.

Observăm că uneori ne putem folosi și de o singură dată a problemei, dacă ea este legată de o formulă cunoscută mai demult. Alteori putem lua, în loc de două date, mai multe date dacă între ele există o legătură în așa fel încât să putem formula cu ajutorul lor o problemă simplă.

În concluzie, această metodă se poate folosi cu succes la o problemă care necesită aplicarea directă a unei teoreme învățate sau când avem destule indicații care să ne conducă spre rezultatul cerut.

Aplicăm metoda sintezei în rezolvarea următoarelor probleme de calcul.

PROBLEMA 1

Se dă piramida $SABC$, în care baza este un triunghi isoscel având laturile $AB = AC = 82$ cm, $BC = 36$ cm, iar muchia SA , perpendiculară pe planul bazei, are o lungime de 20 cm. Prin vârful A se duce un plan care intersectează muchiile SB și SC în punctele M și N , care sunt, respectiv, mijloacele lor. Se cere să se afle:

- 1^o) aria totală a piramidei;
- 2^o) volumul piramidei;
- 3^o) aria secțiunii AMN ;
- 4^o) tangenta unghiului pe care îl face fața SBC cu planul bazei.

SOLUȚIE

Construim figura, apoi ne fixăm atenția asupra primei întrebări. Deoarece aceasta cere să aflăm aria totală a piramidei (fig. 1), trebuie să găsim ariile tuturor fețelor, apoi să le adunăm.

1^o) Trebuie să aflăm aria bazei cu datele 82 cm, 36 cm și vom formula o problemă prin rezolvarea căreia să calculăm înălțimea triunghiului ABC .

- a) Dacă în triunghiul isoscel BAC se cunoaște baza $BC = 36$ cm și latura $AC = 82$ cm, se cere să se calculeze înălțimea triunghiului dusă din vârful A pe baza BC .

În triunghiul isoscel ABC , ducem înălțimea AD , și se formează două triunghiuri dreptunghice egale, în care cunoaștem ipotenuzele și câte o catetă, deci:

$$AD^2 = AC^2 - DC^2$$

$$AD^2 = 82^2 - 18^2 = (82 + 18)(82 - 18) = 100 \cdot 64$$

$$AD = \sqrt{100 \cdot 64} = 80 \text{ cm.}$$

Formulăm o altă problemă, a cărei întrebare trebuie să aibă în vedere răspunsul căutat la prima chestiune.

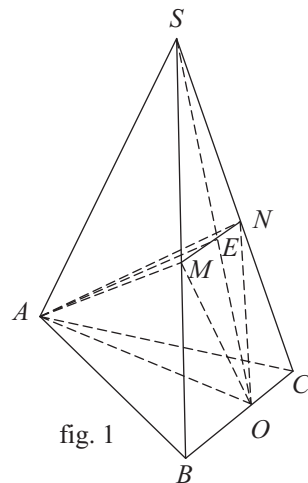


fig. 1



Metode particulare folosite în geometrie pentru rezolvarea problemelor

Metodele particulare sunt acelea care se pot folosi în rezolvarea unui număr restrâns de probleme. De multe ori, metodele particulare conduc mai ușor la soluția problemei decât analiza și sinteza, care în unele cazuri sunt foarte greu de aplicat. Dintre metodele particulare, amintim:

1. Metoda reducerii la absurd;
2. Metoda inducției complete;
3. Probleme de construcții geometrice;
4. Probleme de locuri geometrice;
5. Metode de rezolvare a problemelor de coliniaritate;
6. Metoda de rezolvare a problemelor de concurență;
7. Metoda geometriei analitice;
8. Metoda calculului vectorial;
9. Metoda planului complex.

1. Metoda reducerii la absurd

Metoda reducerii la absurd este folosită și în geometrie pentru demonstrarea unor teoreme sau a unor probleme care au caracter teoretic. În matematică, pentru a stabili valoarea de adevăr a unei propoziții matematice, folosim două feluri de demonstrații: *demonstrația directă* și *demonstrația indirectă*. Numim *demonstrație directă* un șir de implicații (silogisme) care se sprijină direct pe adevăruri stabilite în prealabil și care conduc în mod direct la concluzia dorită sau la soluția problemei. Dar acest lucru nu este întotdeauna posibil, astfel că în unele cazuri este mai ușor să demonstrăm *reciproca contrarei propoziției inițiale*. În aceste cazuri avem de-a face cu o demonstrație indirectă, metoda numindu-se *metoda reducerii la absurd*.

La baza acestei metode stă *legea terțului exclus*, una din legile fundamentale ale logicii clasice, care se enunță astfel: *Din două propoziții contradictorii, una este adevărată, cealaltă falsă, iar a treia posibilitate nu poate exista.*

Când la două propoziții contradictorii aplicăm legea terțului exclus, este suficient să stabilim că una din ele este falsă pentru a deduce că cealaltă este adevărată. *Așadar, din regula implicației inverse știm că are loc echivalența: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$.* Uneori

demonstrația teoremei directe ($p \Rightarrow q$) este mai dificilă decât demonstrația teoremei ($\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$), numită *teorema reciprocă a contrareii* (sau *contrara reciprocei*). *Metoda reducerii la absurd constă în demonstrarea acestei de-a doua teoreme.*

Practic, această metodă se aplică astfel: se presupune că ceea ce trebuie să demonstrăm nu este adevărat, cu alte cuvinte, se neagă concluzia teoremei date. Apoi se efectuează, pornind de la ipoteza teoremei și ipoteza contrară reciprocei, $p \wedge \bar{q}$, un șir de raționamente corecte și în urma acestor raționamente se fac o serie de deducții logice, care scot în evidență faptul că presupunerea făcută duce la o absurditate. Aceasta duce la concluzia că presupunerea făcută nu este posibilă și rămâne ca adevărată concluzia teoremei date.

La *geometrie*, metoda reducerii la absurd se aplică, cu succes, pentru a demonstra propoziții matematice (teoreme) începând chiar din clasa a VI-a, când elevii întâlnesc noțiunea de teoremă. Pe parcursul anilor de gimnaziu și liceu se întâlnesc multe situații de aplicare a acestei teoreme, atât la geometrie, cât și în aritmetică, algebră, trigonometrie și analiză matematică. Metoda reducerii la absurd se întrebuițează de mai multe ori în demonstrarea *teoremelor reciproce*.

Urmează exemple de probleme în care se arată cum se aplică metoda reducerii la absurd.

PROBLEMA 1

Dacă pe laturile AB , BC , CD , DA ale unui patrulater strâmb $ABCD$ se iau punctele M , N , P , Q , în așa fel încât să existe relația: $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = +1$, atunci punctele M , N , P , Q sunt coplanare. (*Teorema reciprocă a lui Menelaus din spațiu*)

SOLUȚIE

Prin ipoteză se cunoaște că patrulaterul $ABCD$ este strâmb. Punctele M , N , P , Q (fig. 19), luate pe laturile BC , CD , respectiv DA , satisfac egalitatea:

$$1. \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = +1.$$

În demonstrație vom folosi segmente orientate. Propoziția din concluzia teoremei afirmă că, în acest caz, punctele M , N , P , Q sunt în același plan. Pentru a demonstra această teoremă, aplicăm raționamentul prin reducere la absurd.

a) Presupunem că concluzia teoremei date nu este adevărată, adică cele patru puncte M , N , P , Q nu sunt în același plan.

Cu alte cuvinte, am negat concluzia teoremei. Să vedem ce rezultat se poate deduce din presupunerea făcută. Procedăm astfel: punctele M , N , P determină un plan. Cum noi am presupus că Q nu este conținut și el în acest plan, rezultă că planul determinat de punctele M , N , P intersectează latura DA în alt punct, de exemplu, R . Aplicând

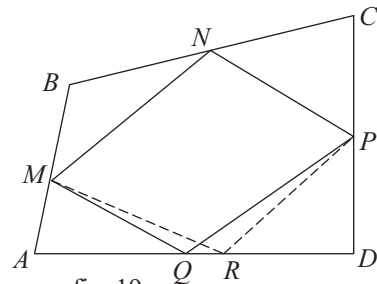


fig. 19