Memorator

MATEMATICĂ GIMNAZIU

human media
Part of RENTROP & STRATON Group

I. ARITMETICĂ ŞI ALGEBRĂ

MULŢIMI

Relaţii: Un element aparţine unei mulţimi dacă el face parte din acea mulţime.
Ex.: Dacă A = {1,2,3}atunci $1 \in A; 2 \in A; 3 \in A; 4 \notin A$.

Def.: Două mulţimi sunt egale dacă au aceleaşi elemente.
Ex.: a) Dacă A ={1,2,3} şi B ={3,2,1} atunci A = B.
b) Dacă A ={1,2,4} şi B ={3,2,1} atunci A $\neq$ B.
c) Dacă A ={1,2,3} şi B ={1,2,3,4} atunci A $\neq$ B.

Def. : Mulţimea A este inclusă în mulţimea B (A $\subset$ B) dacă elementele lui A se găsesc printre elementele lui B.
Ex.: Dacă A ={a,b,c} şi B ={1,a,b,2,c} atunci A $\subset$ B.

OPERAŢII CU MULŢIMI

1) Reuniunea ($\cup$)
A $\cup$ B= {luăm toate elementele din mulţimile A şi B, o singură dată}

2) Intersecţia ($\cap$)
A $\cap$ B ={luăm doar elementele comune din cele două mulţimi}

3)Diferenţa(-)
A **–** B ={luăm toate elementele din A care nu se găsesc în B}

4) Produsul cartezian (x)
AxB= {luăm perechi de forma (a ;b) unde $a \in A$ şi $b \in B$}
Ex.: Fie A={1,2,3} şi B={a,b,3}.
$A \cup B=\{1,2,3,a,b\}$
$A \cap B=\{3\}$
A-B={1,2}
B-A={a,b}
AxB={(1;a),(1;b),(1;3),(2;a),(2;b),(2;3),(3;a),(3;b),(3;3)}
Obs.: Numărul elementelor produsului cartezian AxB este egal cu produsul dintre numărul elementelor mulţimii A şi numărul elementelor mulţimii B. În cazul exemplului anterior 3x3= 9 elemente are produsul cartezian.

MULŢIMI IMPORTANTE DE NUMERE

Mulţimea numerelor naturale:
N={0,1,2,3,...}

Mulţimea numerelor întregi:
Z={.....................,-3,-2,-1,0,1,2,3,.................................}

Mulţimea numerelor raţionale: $Q=\{ \frac{a}{b} : a \in Z,\ b \in Z,\ b \neq 0\}$

Mulţimea numerelor iraţionale:
I={formată din fracţii zecimale, infinite şi neperiodice}

Mulţimea numerelor reale: $R=Q \cup I$
Au loc incluziunile: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Ex.: Fie mulţimea

M={-1;0; $\frac{1}{2}$;1 $\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; 2 $\sqrt{3}$; π ; 1,(3); 4,1(3)}

Determinaţi: M $\cap$ N ;M $\cap$ Z ;M $\cap$ Q ;M $\cap$ I şi M $\cap$ R.

N	**Z**	**Q**	**I**	**R**
	-1	-1		-1
0	0	0		0
		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
		-1 $\frac{1}{2}$		-1 $\frac{1}{2}$
			$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
			2 $\sqrt{3}$	2 $\sqrt{3}$
			π	π
		1,(3)		1,(3)
		4,1(3)		4,1(3)

Obs.: $\frac{1}{2}$ Є Q deoarece are forma $\frac{a}{b}$,aЄ Z, b Є Z; b≠0

-1 $\frac{1}{2} \in$ Q deoarece -1 $\frac{1}{2}$ =- $\frac{1\cdot 2+1}{2}$ =- $\frac{3}{2}$

1,(3)= $1\frac{3}{9}=\frac{1\cdot 9+3}{9}=\frac{12}{9}^{(3}=\frac{4}{3}$

4,1(3)= $4\frac{13-1}{90}=4\frac{12}{90}^{(6}=4\frac{2}{15}=\frac{4\cdot 15+2}{15}=\frac{62}{15}$

$\sqrt{2}$ şi 2 $\sqrt{3}$ sunt numere iraţionale, pentru aceste numere putem doar aproxima valoarea lor folosind algoritmul de calcul al unui radical.

π este un numar iraţional ($\pi \approx 3{,}14$).

Concluzie: M $\cap$ N ={0} ; M $\cap$ Z ={-1 ;0};

M∩Q ={-1 ;0 ; $\frac{1}{2}$;-1 $\frac{1}{2}$;1,(3) ; 4,1(3)};

M∩I ={ $\sqrt{2}$; 2 $\sqrt{3}$; π };

M∩R= {-1; 0; $\frac{1}{2}$;-1 $\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; 2 $\sqrt{3}$; π ;1,(3);4,1(3) }=M

SCRIEREA NUMERELOR NATURALE ÎN BAZA 10

Orice numar natural se scrie în sistemul zecimal (cu baza 10) folosind cifrele 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Numărul total de cifre este 10, de aici şi denumirea de sistem zecimal sau număr în baza 10.

Ex.: 123 ; 2435435 ;.......

123= $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

2435435= $2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

Obs.: Toate numerele naturale se pot scrie folosind exemplul prezentat anterior.

ÎMPĂRŢIREA CU REST A NUMERELOR NATURALE

Teorema împărţirii cu rest a numerelor naturale:

Fie a,b $\in$N atunci există q,r$\in$N astfel încât a=b$\cdot q+r$ unde $0\leq r<b$

Obs.: a:b= q rest r $\Leftrightarrow$ a=b$\cdot q+r$ unde $0\leq r<b$

Ex: 8:3=2 rest 2 $\Leftrightarrow$ 8=$3\cdot 2+2$ unde $0\leq 2<3$

DIVIZIBILITATE ÎN N

Def.: Numărul natural *a* este divizibil cu numărul natural *b* (notaţia a $\vdots b$) dacă există numărul natural *c* astfel încât a=$b\cdot c$

Ex.: 8 $\vdots$ 2 deoarece există numărul natural 4 astfel încât 8=$2\cdot 4$

8 nu e divizibil cu 3 deoarece nu există un număr natural *c* astfel încât 8=$3\cdot c$

Obs. 1: Dacă $a\vdots b$ atunci *a* se numeşte multiplul lui *b* şi *b* se numeşte divizorul lui *a*.

În exemplul precedent 8 este multiplul lui 2 şi 2 este divizorul lui 8.

Obs. 2: Dacă $a\vdots b$ atunci mai putem scrie *b*|*a* şi citim *b divide a*(8 $\vdots$ 2$\Leftrightarrow$2|8)

PROPRIETĂŢI ALE RELAŢIEI DE DIVIZIBILITATE

a) a $\vdots$ 1 , oricare ar fi a$\in N$;

b) Dacă a $\vdots$ b şi c $\vdots$ b atunci (a±c) $\vdots$ b;

c) $0\vdots a$, oricare ar fi a$\in$ N;

d) Dacă $a \vdots b$ şi $k \in N$ atunci (a·k) $\vdots$ b ;

e) Dacă $a \vdots b$ şi $b \vdots c$ atunci $a \vdots c$;

CRITERII DE DIVIZIBILITATE

Crt. cu 10 – Un nr. natural este divizibil cu 10 dacă ultima sa cifră este 0.
Ex.: 23240 $\vdots$ 10 ; 23235 nu este divizibil cu 10.

Crt. cu 5 – Un nr. natural este divizibil cu 5 dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.
Ex.: 54235 $\vdots$ 5 ; 235231 nu este divizibil cu 5.

Crt. cu 3 – Un nr. natural este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3.
Ex.: 2481 $\vdots$ 3 deoarece (2+4+8+1) $\vdots$ 3

2480 nu e divizibil cu 3 deoarece suma (2+4+8+0) nu este divizibilă cu 3.

NUMERE PRIME ŞI COMPUSE

Def.: Un număr natural este prim dacă are exact 2 divizori (pe 1 şi pe el însuşi).
Ex.: 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;........ sunt numere prime.

Def.: Un număr natural se numeşte compus dacă are mai mult de 2 divizori.

Ex.: 8 are divizorii 1,2,4,8, deci este compus; 10 are divizorii 1,2,5,10, deci este compus.

NUMERE PARE ŞI IMPARE ÎN N

Def.: Un număr natural divizibil cu 2 se numeşte par.
Ex.: 10,242348,etc.

Def.: Un numar natural care nu e divizibil cu 2 se numeşte impar.
Ex.: 34235 ;3452359 ;etc.

DESCOMPUNEREA UNUI NUMĂR NATURAL ÎN PRODUS DE PUTERI DE NUMERE PRIME

Ex.:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

24= $2^3 \cdot 3^1$

Obs.: Numerele compuse se pot descompune după modelul prezentat anterior, iar dacă numărul este prim nu mai este necesar să-l descompunem.

CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN (C.M.M.D.C.) ŞI CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN (C.M.M.M.C.) A DOUĂ SAU MAI MULTE NUMERE NATURALE

C.m.m.d.c. = luăm factorii comuni la puterea cea mai mică
C.m.m.m.c. = luăm factorii comuni şi necomuni la puterea cea mai mare

Ex.: 24= $2^3 \cdot 3^1$

30= $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

c.m.m.d.c.(24 ;30)= $2^1 \cdot 3^1 = 6$

c.m.m.m.c.[24 ;30]= $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120$

Obs.: C.m.m.d.c. se utilizează în special când dorim să determinăm cel mai mare număr care divide numerele date.

C.m.m.m.c. se utilizează în special când dorim să aflăm cel mai mic număr care este divizibil cu numerele date sau atunci când dorim să aflăm numitorul comun al mai multor fracţii, numitorul comun fiind chiar c.m.m.m.c. al numitorilor fracţiilor.

NUMERE PRIME ÎNTRE ELE

Def.: Spunem că două sau mai multe numere sunt prime între ele dacă c.m.m.d.c al acestor numere este 1.

Ex.: $6=2\cdot 3$

5=5

c.m.m.d.c(6;5)=1 ,deci numerele 5 şi 6 sunt prime intre ele.

FRACŢII

Def.: Fracţia are forma generală $\frac{a}{b}$, unde *a* şi *b* sunt numere naturale sau întregi.