

DANIEL VLĂDUCU  
MÁRTA KÁSA

# MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele IX-XII

*Ediția a II-a*

**Editura Paralela 45**

Redactare: Daniel Mitran

Tehnoredactare & pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**VLĂDUCU, DANIEL**

**Memorator de matematică pentru clasele IX-XII / Daniel  
Vlăducu, Márta Kása. - Ed. a 2-a. - Pitești : Paralela 45, 2019  
ISBN 978-973-47-2896-1**

I. Kása, Márta

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2019

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de  
proprietate intelectuală.

# CUPRINS

---

<b>ALGEBRĂ</b> .....	9
1. Formule de calcul prescurtat .....	9
2. Sume remarcabile .....	9
3. Modulul .....	10
4. Partea întreagă, partea fracționară.....	11
5. Inegalități remarcabile .....	11
6. Elemente de logică matematică, mulțimi .....	13
7. Inducție matematică, probleme simple de numărare.....	14
8. Puteri și radicali .....	14
9. Logaritmi .....	15
10. Progresii aritmetice, progresii geometrice.....	16
11. Elemente de combinatorică.....	17
12. Binomul lui Newton.....	18
13. Funcții, funcția de gradul I.....	18
14. Ecuația de gradul al II-lea.....	20
15. Funcția de gradul al II-lea.....	21
16. Funcții injective, surjective, bijective .....	24
17. Funcția putere, funcția radical, ecuații .....	24
18. Funcția exponențială, funcția logaritmică .....	25
19. Funcții trigonometrice.....	26
20. Matematici financiare .....	27
21. Elemente de statistică.....	28
22. Probabilitate .....	29
23. Variabile aleatoare .....	31
24. Numere complexe sub formă algebrică.....	31

25. Aplicații în geometria plană.....	33
26. Forma trigonometrică a unui număr complex, operații, ecuații, aplicații.....	33
27. Permutări .....	34
28. Determinanți .....	35
29. Inversa unei matrice.....	35
30. Rangul unei matrice .....	36
31. Sisteme liniare .....	36
32. Legi de compoziție.....	38
33. Structuri algebrice.....	39
34. Inele de polinoame.....	41
35. Polinoame cu coeficienți complecși.....	43
<b>TRIGONOMETRIE</b> .....	45
1. Elemente de trigonometrie.....	45
2. Formule trigonometrice .....	46
3. Aplicații ale trigonometriei și produsului scalar a doi vectori în geometria plană.....	48
<b>ANALIZĂ MATEMATICĂ</b> .....	51
<b>I. ȘIRURI</b> .....	51
1. Șiruri monotone.....	51
2. Șiruri mărginite.....	51
3. Limita unui șir .....	51
4. Șiruri convergente .....	52
5. Convergență și mărginire.....	53

6. Criterii de convergență/divergență a șirurilor .....	53
7. Operații cu șiruri convergente .....	54
8. Cazuri de trecere la limită rezolvate .....	55
9. Cazuri de nedeterminare (exceptate) .....	57
10. Limite remarcabile de șiruri.....	57
<b>II. LIMITE DE FUNCȚII .....</b>	<b>58</b>
1. Limita unei funcții într-un punct.....	58
2. Limite laterale.....	58
3. Limite remarcabile.....	59
<b>III. FUNCȚII CONTINUE .....</b>	<b>61</b>
1. Noțiuni generale .....	61
2. Clase de funcții continue .....	61
3. Proprietățile funcțiilor continue .....	61
<b>IV. FUNCȚII DERIVABILE.....</b>	<b>63</b>
1. Noțiuni generale .....	63
2. Clase de funcții derivabile .....	63
3. Reguli de derivare.....	64
4. Derivata unei funcții compuse .....	64
5. Derivata unei funcții inverse.....	64
6. Derivatele funcțiilor elementare și compuse.....	65
7. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor.....	67
Teorema lui Fermat .....	67
Teorema lui Rolle.....	67
Teorema lui Cauchy .....	67
Teorema lui Lagrange .....	68
Teorema lui Darboux .....	69

Regula lui l'Hospital .....	69
8. Convexitate și concavitate. Puncte de inflexiune.....	70
9. Puncte unghiulare și puncte de întoarcere.....	71
10. Asimptote .....	71
Asimptote orizontale .....	71
Asimptote verticale .....	71
Asimptote oblice .....	72
V. PRIMITIVE .....	73
1. Noțiuni generale .....	73
2. Integrala nedefinită.....	73
3. Clase de funcții care admit primitive.....	74
4. Integrare. Metode de integrare.....	74
Metoda de integrare prin părți.....	74
Metoda schimbării de variabilă .....	75
5. Primitive uzuale.....	75
Primitivele funcțiilor elementare.....	75
VI. INTEGRALE DEFINITE.....	78
1. Diviziuni.....	78
2. Sume Darboux, sume Riemann .....	79
3. Integrala definită.....	80
Funcții integrabile în sens Riemann .....	80
4. Clase de funcții integrabile .....	80
5. Proprietăți ale integralelor definite .....	81
Proprietatea de liniaritate .....	81
Proprietatea de monotonie.....	81
Proprietăți ale integralei ca funcție de interval .....	82

6. Formula Leibniz-Newton .....	82
7. Formula de medie .....	82
8. Formula de integrare prin părți .....	82
9. Formula schimbare de variabilă.....	83
10. Aplicații ale integralelor definite .....	83
<b>GEOMETRIE VECTORIALĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU</b> ....	<b>85</b>
<b>I. VECTORI LEGAȚI</b> .....	<b>85</b>
1. Noțiuni generale .....	85
Direcție.....	85
Sens.....	85
Lungime .....	85
2. Vectori legați echipolenți.....	86
3. Raportul în care un punct împarte un segment orientat....	86
<b>II. VECTORI LIBERI</b> .....	<b>87</b>
1. Noțiuni generale .....	87
2. Operații cu vectori liberi.....	87
Adunarea vectorilor liberi .....	87
Scăderea vectorilor liberi .....	88
Înmulțirea unui vector liber cu un număr real .....	88
3. Vectorul de poziție .....	89
4. Vectori paraleli .....	90
5. Lungimea unui vector liber în plan.....	90
6. Produsul scalar a doi vectori liberi în plan.....	91
7. Lungimea unui vector liber în spațiu .....	92
8. Produsul scalar a doi vectori liberi în spațiu .....	92

<b>GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU .....</b>	<b>93</b>
<b>REPER CARTEZIAN ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU .....</b>	<b>93</b>
1. Reperul cartezian .....	93
2. Distanța dintre două puncte în plan .....	95



# ALGEBRĂ



## FORMULE DE CALCUL PRECURTAT

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall n \in 2\mathbb{N} + 1$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$  sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \frac{1}{2} \left( (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \left( (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ac) \right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a).$



## SUME REMARCABILE

- $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$



## MODULUL

**Definiție:** Modulul sau valoarea absolută a unui număr real este distanța, pe axa numerelor reale, dintre reprezentarea numărului și origine.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ și } |E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}, \text{ pentru orice}$$

expresie  $E(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proprietăți:**

- $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$ ;
- $|x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c)$ ;
- $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$ ;
- $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ ;  $\exists \text{ „}=\text{”} \Leftrightarrow xy \geq 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ;
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$ ;