

GRAȚIELA GHIC

**MATEMATICI APLICATE
ÎN ECONOMIE**



EDITURA UNIVERSITARĂ
București, 2015

Cuprins

Capitolul I

Elemente de algebră liniară	9
1.1. Spații vectoriale	9
1.2. Dependență și independență liniară. Sistem de generatori. Bază.	15
1.3. Schimbarea bazei. Lema substituției. Metoda pivotului	23
1.4. Aplicații ale metodei pivotului în cadrul matriceal	25
1.5. Morfisme de spații vectoriale	33
1.6. Subspații vectoriale	35
1.7. Funcționale pe spații vectoriale	39

Capitolul II

Elemente de programare liniară	53
2.1. Formularea unei probleme de programare liniară și modelul său matematic	53
2.2. Formularea matriceală a modelului (PPL)	57
2.3. Mulțimi și funcții convexe	60
2.4. Soluțiile unei probleme de programare liniară	61
2.5. Metoda grafică de rezolvare a (PPL)	64
2.6. Algoritmul simplex	72
2.6.1. Algoritmul simplex primal	76
2.6.2. Determinarea unei soluții de bază inițiale	79
2.7. Dualitatea în programarea liniară	89
2.7.1. Formularea PPL - duale. Teorema fundamentală a dualității	89
2.7.2. Interpretări economice ale dualității	94
2.7.3. Algoritmul simplex dual (ASD)	99
2.8. Reoptimizarea și parametrizarea în programarea liniară	103
2.8.1. Reoptimizări în programarea liniară	103
2.8.2. Parametrizarea în programarea liniară	118
2.9. Problema de transport	122
2.9.1. Modelul matematic al problemei de transport	123
2.9.2. Algoritmul de rezolvare	127
2.9.3. Degenerarea în problemele de transport	133
2.9.4. Problema de transport cu funcția obiectiv de maxim	136
2.9.5. Problema de transport cu imposibilitatea folosirii unor rute	136
2.9.6. Problema de transport cu centre intermediare de distribuție (Problema de transfer)	137
2.9.7. Probleme de transport cu centre legate	138

2.9.8. Probleme de repartiție. Alocarea forței de muncă	139
2.9.9. Modele liniare de repartizare și transfer de fonduri	140
Capitolul III	
Elemente de analiză matematică. Aplicații economice	148
Funcții de mai multe variabile	148
3.1.1. Metrică. Spații metrice	148
3.1.2. Normă. Spații normate	149
3.1.3. Produs scalar. Spațiu euclidian	150
3.1.4. Elemente de topologie	151
3.1.5. Limite de funcții reale de mai multe variabile	154
3.1.6. Continuitatea funcțiilor de mai multe variabile	155
3.1.7. Teoria diferențială a funcțiilor reale de mai multe variabile reale ...	156
3.1.8. Optimizarea funcțiilor fără restricții	167
3.1.9. Optimizarea funcțiilor de mai multe variabile condiționate prin restricții de tip egalitate	171
3.2. Analiza microeconomică a consumatorului și producătorului	172
3.2.1. Decizia la producător în condiții de concurență perfectă.	172
3.2.2. Optimizarea deciziei consumatorului	178
3.3. Complemente de calcul integral	207
3.3.1. Integrale improprii	207
3.3.2. Integrale euleriene	210
Capitolul IV	
Elemente de bază ale teoriei probabilităților	213
4.1. Evenimente aleatoare	213
4.1.1. Operații cu evenimente	214
4.1.2. Câmp de evenimente	215
4.1.3. Definiția probabilității	217
4.1.4. Probabilitate condiționată	218
4.1.5. Formule fundamentale de calcul cu probabilități	219
4.2. Scheme clasice de probabilitate	220
4.3. Variabile aleatoare (stocastice)	229
4.4. Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare	239
4.4.1. Media unei variabile aleatoare	239
4.4.2. Dispersia unei variabile aleatoare	240
4.4.3. Momente de ordin superior	242
4.4.4. Funcția caracteristică	243
4.4.5. Covarianță și coeficient de corelație a două variabile aleatoare	244
4.5. Legi teoretice de repartiție. Indicatori	246

Capitolul V	
Elemente de matematici financiare	261
5.1. Dobânda	261
5.1.1. Dobânda simplă	263
5.1.2. Dobânda compusă	271
5.2. Operațiuni de scont	281
5.3. Plăți eşalonate	290
5.4. Rambursarea împrumuturilor	303
Bibliografie	311

Capitolul I. Elemente de algebră liniară

1.1. Spații vectoriale

Spațiile vectoriale au fost definite în forma actuală de G.Peano¹ (1888), deși K.Gauss² (1799) folosisese implicit noțiunea de plan vectorial. Fondatorul teoriei spațiilor vectoriale rămâne însă H.Grassmann³ (1844).

Definiția 1. Fie $(K, +, \cdot)$ câmp și V o mulțime nevidă. V se numește **spațiu vectorial** peste K dacă există o lege de compoziție internă

$\oplus: V \times V \rightarrow V$ și o lege de compoziție externă $\otimes^4: K \times V \rightarrow V$ astfel încât:

- V este grup abelian în raport cu legea de compoziție internă \oplus (cu elementul neutru 0 și $-x$ elementul opus lui $x \in V$);

- legea de compoziție externă satisface cerințele:

1. $(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V;$
2. $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y), \forall \alpha \in K, \forall x, y \in V;$
3. $(\alpha \cdot \beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V;$
4. $1 \otimes x \neq 0, \forall x \in V, x \neq 0.$

Notăm V/K , adică V este spațiu vectorial peste câmpul K sau V este K – spațiu vectorial.

Observații 1. Elementele lui V se vor numi **vectori** și vor fi notate cu litere latine mici, iar elementele lui K se vor numi **scalari** și vor fi notate cu litere grecești.

2. Un spațiu vectorial peste \mathfrak{R} se numește spațiu vectorial real; un spațiu vectorial peste \mathbf{C} se numește spațiu vectorial complex.

Propoziție (reguli de calcul). Fie V/K . Atunci:

- a) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y, \forall \alpha \in K, \forall x, y \in V;$
- b) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V;$

¹ Peano Giuseppe (1858-1932), matematician, logician și lingvist italian, întemeietorul aritmeticii axiomatice, etc.

² Gauss Karl Friedrich (1777-1855), matematician și astronom german, a conceput metoda celor mai mici pătrate, a demonstrat teoreme fundamentale a algebrei, a întemeiat calculul cu numerele complexe, etc.

³ Grassmann Hermann Gunther (1809-1877), matematician și filolog german, a exprimat și dezvoltat noțiunea de spațiu cu n dimensiuni, etc.

⁴ Folosim doar în definiție notații distincte pentru legile din V și K pentru a nu genera confuzii

- c) $0x=0, \forall x \in V$;
- d) $\alpha 0=0, \forall \alpha \in K$;
- e) $1x=x, \forall x \in V$;
- f) $(-1)x=-x, \forall x \in V$;
- g) $\alpha x=0 \Rightarrow \alpha=0$ sau $x=0, \forall \alpha \in K, \forall x \in V$.

Demonstrație.

a) fie $\alpha \in K$ și $x, y \in V$. Atunci $\alpha x = \alpha(x-y+y) = \alpha(x-y) + \alpha y$ și adunând $-\alpha y$ (care există deoarece $\alpha x \in V$ iar $(V, +)$ este grup) în ambii membri rezultă $\alpha x - \alpha y = \alpha(x-y)$.

c) $0x = (\alpha - \alpha)x = \alpha x - \alpha x = 0, \forall x \in V$

d) avem $\alpha 0 = \alpha(x-x) = \alpha x - \alpha x = 0, \forall \alpha \in K$

e) din axioma 4 din definiție rezultă că $1x=0$ implică $x=0$. Fie deci $1(x-1x) = 1x - (1 \cdot 1)x = 1x - 1x = 0$ deci $x - 1x = 0$ adică $1x = x, \forall x \in V$

g) fie $\forall \alpha \in K$ și $x \in V$ astfel încât $\alpha x = 0$. Dacă $\alpha = 0$ demonstrația este încheiată. Fie deci $\alpha \neq 0$. $\exists \alpha^{-1} \in K \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0$ iar pe de altă parte $\alpha^{-1}(\alpha x) = (\alpha^{-1} \cdot \alpha)x = 1 \cdot x = x$ deci $x = 0$.

Exemple.

1. $\mathfrak{R}^n / \mathfrak{R}$ este spațiu vectorial numit spațiul vectorial numeric real, unde $\mathfrak{R}^n = \underbrace{\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \dots \times \mathfrak{R}}_{n \text{ ori}} = \{(x_1, \dots, x_n)^t / x_i \in \mathfrak{R}, i = \overline{1, n}\}$, legea de compoziție internă fiind adunarea vectorilor, iar legea de compoziție externă fiind înmulțirea cu scalar a acestora.

Generalizare.

K^n / K este spațiu vectorial, unde

$$K^n = \underbrace{K \times K \times \dots \times K}_{n \text{ ori}} = \{(x_1, \dots, x_n)^t / x_i \in K, i = \overline{1, n}\}.$$

2. $M_{m,n}(K) / K$ este spațiu vectorial al matricelor având m linii și n coloane cu coeficienți din K, unde $K = \mathfrak{R}$ sau $K = \mathbf{C}$, legea de compoziție internă fiind adunarea matricelor, iar legea de compoziție externă fiind înmulțirea cu scalar a acestora.

Aplicații

1. Spațiul $\mathfrak{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)^t, x_i \in \mathfrak{R}, i = \overline{1, n}\}$

este spațiu vectorial real față de adunarea vectorilor și înmulțirea cu scalari.

Soluție: $V = \mathfrak{R}^n$, $K = \mathfrak{R}$

$$\oplus: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$$

$$(x, y) \rightarrow x \oplus y$$

$$\text{Fie } x \in \mathfrak{R}^n, y \in \mathfrak{R}^n \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ cu } x_i, y_i \in \mathfrak{R}, \forall i = \overline{1, n}$$

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

$$\otimes: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$$

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha \otimes x$$

$$\text{Pentru } \alpha \in \mathfrak{R} \text{ și } x \in \mathfrak{R}^n \text{ definim } \alpha \otimes x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

Verificăm axiomele din definiția spațiului vectorial.

i) (\mathfrak{R}^n, \oplus) grup abelian

a) $\forall x, y \in \mathfrak{R}^n \Rightarrow x \oplus y \in \mathfrak{R}^n$

Vectorul $x \oplus y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$ pentru că are n componente reale (adunând

două numere reale obținem un număr real)

$$\text{b) } x \oplus y = y \oplus x, \quad \forall x, y \in \mathfrak{R}^n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$x_i + y_i = y_i + x_i, \forall i = \overline{1, n}$ (adunarea numerelor reale este comutativă)

$$c) \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z), \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{R}^n$$

$$(x \oplus y) \oplus z = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ \vdots \\ (x_n + y_n) + z_n \end{pmatrix}$$

$$x \oplus (y \oplus z) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ \vdots \\ x_n + (y_n + z_n) \end{pmatrix}$$

Cei doi vectori sunt egali pentru că au componentele respectiv egale (adunarea numerelor reale este asociativă).

$$d) \quad \exists e \in \mathfrak{R}^n \text{ astfel încât } \forall x \in \mathfrak{R}^n \Rightarrow e \oplus x = x \oplus e = x$$

$$\text{Din } e \oplus x = x \Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 + x_1 \\ \vdots \\ e_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow e_i + x_i = x_i, \forall i = \overline{1, n}$$

$$\Leftrightarrow e_i = 0, \forall i = \overline{1, n}. \text{ Deci } e = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

$$e) \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n \quad \exists x' \in \mathfrak{R}^n \text{ astfel încât } x \oplus x' = x' \oplus x = e$$

$$\text{Din } x \oplus x' = e \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_i + x'_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

$$\Leftrightarrow x_i = -x'_i, \forall i = \overline{1, n}. \text{ Deci } x' = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

ii) \otimes satisface următoarele cerințe:

$$a) \quad (\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R} \text{ și } \forall x \in \mathfrak{R}^n$$

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta) \otimes x &= \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)x_1 \\ \vdots \\ (\alpha + \beta)x_n \end{pmatrix} \\
(\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x) &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \vdots \\ \beta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cei doi vectori sunt egali deoarece $(\alpha + \beta)x_i = \alpha x_i + \beta x_i, \forall i = \overline{1, n}$ (înmulțirea numerelor reale este distributivă față de adunare la stânga și la dreapta).

b) $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R} \text{ și } \forall x, y \in \mathfrak{R}^n$

$$\begin{aligned}
\alpha \otimes (x \oplus y) &= \alpha \otimes \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + y_1) \\ \vdots \\ \alpha(x_n + y_n) \end{pmatrix} \\
(\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y) &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \vdots \\ \alpha y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \alpha y_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dar $\alpha(x_i + y_i) = \alpha x_i + \alpha y_i, \forall i = \overline{1, n}$

c) $(\alpha\beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x), \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R} \text{ și } \forall x \in \mathfrak{R}^n$

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta) \otimes x &= \begin{pmatrix} (\alpha\beta)x_1 \\ \vdots \\ (\alpha\beta)x_n \end{pmatrix} \\
\alpha \otimes (\beta \otimes x) &= \alpha \otimes \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \vdots \\ \beta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta x_1) \\ \vdots \\ \alpha(\beta x_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dar $(\alpha\beta)x_i = \alpha(\beta x_i), \forall i = \overline{1, n}$

(înmulțirea numerelor reale este asociativă)

$$d) \quad 1 \otimes x = x, \forall x \in \mathfrak{R}^n \quad 1 \otimes x = \begin{pmatrix} 1x_1 \\ \vdots \\ 1x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Cum $1x_i = x_i, \forall i = \overline{1, n}$

(elementul neutru la înmulțirea numerelor reale este 1).

2. Să se arate că \mathfrak{R} este un spațiu vectorial peste \mathfrak{Q} , dar \mathfrak{Q} nu este un spațiu vectorial peste \mathfrak{R} , operațiile fiind cele cunoscute.

Soluție: Prima afirmație este evidentă pentru că $(\mathfrak{R}, +)$ este grup abelian; pentru setul (ii): (1) și (2) sunt consecințe ale distributivității înmulțirii față de adunare, (3) este o consecință a asociativității înmulțirii numerelor reale iar (4) este echivalentă cu faptul că 1 este elementul neutru pentru înmulțire.

\mathfrak{Q} nu este spațiu vectorial real întrucât înmulțirea nu este lege externă.

Într-adevăr, trebuie să avem: $(\forall)\alpha \in \mathfrak{Q}, (\forall)x \in \mathfrak{R} \Rightarrow \alpha x \in \mathfrak{Q}$, dar pentru

$$\alpha = 1 \text{ și } x = \sqrt{2}, \alpha x = \sqrt{2} \notin \mathfrak{Q}.$$

3. Să se arate că:

- \mathfrak{Q} este \mathfrak{Q} – spațiu vectorial;
- \mathfrak{C} este \mathfrak{Q} – spațiu vectorial;
- \mathfrak{C} este \mathfrak{R} – spațiu vectorial.

4. Fie $\mathfrak{C}^3 / \mathfrak{C}$ și $V \subset \mathfrak{C}^3$, unde:

$$a) \quad V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 \in \mathfrak{R} \right\}$$

$$b) \quad V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 = 0 \right\}$$

$$c) \quad V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

$$d) V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 + x_2 = 1 \right\}.$$

În care dintre aceste cazuri este V un spațiu vectorial?

5. Fie V/K și W/K două spații vectoriale.

Arătați că $V \times W = \{(x, y) | x \in V, y \in W\}$ este un spațiu vectorial peste K în raport cu operațiile:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \quad \forall x_1, x_2 \in V, y_1, y_2 \in W, \forall \alpha \in K.$$

6. Considerăm spațiul vectorial complex al polinoamelor P/C și $V \subset P$, unde V este mulțimea acelor polinoame x pentru care:

a) X are gradul 3;

b) $2X(0) = X(1)$;

c) $X(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$, de asemenea $X(t) = X(1-t), \forall t$.

În aceste condiții este V un spațiu vectorial?

7. Arătați că mulțimea matricelor de ordin $m \times n$ formează în raport cu adunarea matricelor și înmulțirea lor cu scalar un spațiu vectorial ($K = \mathfrak{R}$).

8. Pe exemplul unui agent economic organizați spațiul intrărilor în sistem ca spațiu vectorial.

1.2. Dependență și independență liniară. Sistem de generatori. Bază.

Fie V/K .

Definiția 2. Vectorul $x \in V$ se numește **combinație liniară** (cu coeficienți din K) a vectorilor mulțimii $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, dacă există scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ astfel încât:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad (*).$$

Dacă scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, îndeplinesc condițiile:

$$\alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \text{ și } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

atunci relația (*) definește o combinație liniară convexă.

Definiția 3. Vectorii $v_1, \dots, v_n \in V$ constituie un **sistem de generatori** (mulțime de generatori) al spațiului vectorial V dacă orice vector din V este

o combinație liniară a elementelor mulțimii $S=\{v_1, \dots, v_n\}$, adică: $\forall x \in V$
 $(\exists) \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Exemple

1. Considerăm în K^n/K mulțimea vectorilor $\{e_1, \dots, e_n\}$, unde
 $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$.

Această mulțime formează un sistem de generatori al spațiului K^n/K .

Într-adevăr, fie $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un vector oarecare din K^n/K .

Avem evident egalitatea: $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

2. Fie $M_{m,n}(K)/K$ spațiul vectorial al matricelor având m linii și n coloane
 cu coeficienți din K și matricele $\{e_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ unde e_{ij} este matricea care are 1 în

poziția (i, j) și 0 în rest. Mulțimea matricelor $\{e_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ este un sistem de
 generatori al acestui spațiu vectorial.

Într-adevăr, dacă $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ este o matrice atunci avem egalitatea

$$A = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} e_{ij} .$$

Definiția 4. Vectorii $v_1, \dots, v_n \in V$ se numesc **liniar independenți**⁵ dacă orice
 combinație liniară a acestora se anulează numai dacă toți scalarii sunt nuli,
 adică din relația: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Exemple.

1. În K^n/K mulțimea vectorilor $\{e_1, \dots, e_n\}$, unde $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2 =$
 $(0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$, formează un sistem liniar independent.

Într-adevăr, fie relația $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ cu $\alpha_i \in K$, $i=1, \dots, n$. Avem

$$\begin{aligned} & \alpha_1(1, 0, \dots, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, \dots, 0, 0) + \dots + \alpha_n(0, 0, \dots, 0, 1) = \\ & (\alpha_1, 0, \dots, 0, 0) + (0, \alpha_2, \dots, 0, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, \alpha_n) = \\ & (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0, 0). \text{ Deci } \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0. \end{aligned}$$

2. În $M_{m,n}(K)/K$ matricele $\{e_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ formează un sistem liniar independent.

⁵ noțiunea de independența liniară a vectorilor a fost introdusă de H.Grassmann (1878)

Definiția 5. Vectorii $v_1, \dots, v_n \in V$ se numesc **liniar dependenți** dacă nu sunt liniar independenți (adică există $\alpha_i \in K$, nu toți nuli, astfel încât

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0).$$

Definiția 6. Sistemul de vectori $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ formează o **bază** a spațiului vectorial V dacă B constituie un sistem de generatori al lui V și dacă formează un sistem liniar independent în V .

Exemple.

1. În K^n/K mulțimea vectorilor $\{e_1, \dots, e_n\}$ formează o bază.

2. În $M_{m,n}(K)/K$ matricele $\{e_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ constituie o bază.

Definiția 7. V/K este un spațiu vectorial finit dimensional sau de tip finit dacă are o bază finită.

Teorema 1 (de existență a bazei). Fie V/K un spațiu vectorial nenul, un sistem liniar independent $X \subset V$ și un sistem S de generatori pentru V , astfel încât $X \subset S$. Atunci există o bază a lui V/K astfel încât $X \subset B \subset S$.

Definiția 8. Fie V/K . Se numește dimensiunea lui V și se notează $\dim V$ numărul maxim de vectori liniar independenți.

Teorema 2. Condiția necesară și suficientă ca un spațiu vectorial V peste K să aibă dimensiunea n este ca să admită o bază formată din n vectori.

Teorema 3. Toate bazele unui spațiu vectorial finit dimensional au același număr de vectori.

Teorema 4 (teorema bazei). Într-un spațiu vectorial finit dimensional orice vector se scrie, în mod unic, ca o combinație liniară a vectorilor unei baze a spațiului.

Demonstrație.

Fie $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ o bază a spațiului vectorial V și $v \in V$.

Existența. Cum B este un sistem de generatori al lui $V \Rightarrow (\exists) \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ astfel încât:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Unicitatea. Presupunem că $(\exists)\alpha'_1, \dots, \alpha'_n \in K$ astfel încât:

$$v = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_n v_n \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_n v_n$$

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n) v_n = 0$$

Dar B este un sistem liniar independent, rezultă astfel:

$$\alpha_i - \alpha'_i = 0, \forall i=1, \dots, n \Leftrightarrow \alpha_i = \alpha'_i, \forall i=1, \dots, n.$$

Observații 1. Scalarii unici $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ se numesc *coordonatele lui v în baza B*. Vectorul $v_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$ se numește *vectorul coordonatelor lui v în baza B*.

2. Următoarea propoziție este utilă în rezolvarea exercițiilor:

Fie V/K , $\dim V = n$ și $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) B este o baza a lui V;
- b) B este un sistem liniar independent al lui V;
- c) B este un sistem de generatori al lui V.

3. Fie $\mathfrak{R}^n = \{x / x = (x_1, \dots, x_n)^t, x_i \in \mathfrak{R}, i=1, \dots, n\}$ spațiul vectorial real față de adunarea vectorilor și înmulțirea cu scalari.

Vectorii $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)^t$ formează o bază, numită **baza standard** sau canonică a spațiului \mathfrak{R}^n .

Ținând seama de importanța în aplicații economice a spațiului vectorial \mathfrak{R}^n dăm următoarea teoremă privind verificarea rapidă a faptului că un sistem de n vectori $v_1, \dots, v_n \in \mathfrak{R}^n$ constituie o bază în \mathfrak{R}^n .

Teorema 5. Vectorii $v_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})^t, \dots, v_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})^t$ din \mathfrak{R}^n formează o bază în $\mathfrak{R}^n \Leftrightarrow$ determinantul matricei asociate sistemului de vectori (matricea formată cu componentele vectorilor) este nenul.

Consecință. Dacă $\det A = 0$ atunci sistemul de vectori nu formează o bază a lui \mathfrak{R}^n .

Aplicații

1. Să se arate că mulțimea $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathfrak{R}^3$,

unde $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ formează o bază în \mathfrak{R}^3 . Să se găsească

coordonatele vectorului $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ în această bază.

Soluție: i) Asociem matricea sistemului de vectori:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculăm determinantul matricei A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Cum $\det A \neq 0 \Rightarrow B$ bază în \mathfrak{R}^3

ii) B fiind bază în \mathfrak{R}^3 , orice vector din \mathfrak{R}^3 se scrie ca o combinație liniară a vectorilor v_1, v_2, v_3 în mod unic.

Avem $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

Matricea asociată sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, iar $\det A \neq 0 \Rightarrow$

sistemul este compatibil determinat cu soluția dată de

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \text{ unde } \Delta = \det A = -2.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 3; \alpha_2 = -1; \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Să se arate că mulțimea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ cu

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

este sistem liniar independent în $M_2(\mathfrak{R})$.

Soluție: Se consideră combinația liniară nulă

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0,$$

$$\text{unde } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } \alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathfrak{R}.$$

Înlocuind obținem:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_4 & -\alpha_1 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obține sistemul:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_4 = 0$$

$$-\alpha_1 + \alpha_4 = 0$$

care are soluția $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.