GRAȚIELA GHIC

MATEMATICI APLICATE ÎN ECONOMIE

EDITURA UNIVERSITARĂ
București, 2015

Cuprins

Capitolul I.
Elemente de algebră liniară

1.1. Spaţii vectoriale

Spaţiile vectoriale au fost definite în forma actuală de G.Peano[1] (1888), deşi K.Gauss[2] (1799) folosise implicit noţiunea de plan vectorial. Fondatorul teoriei spaţiilor vectoriale rămâne însă H.Grassmann[3] (1844).

Definiţia 1. Fie (K, +, ·) câmp şi V o mulţime nevidă. V se numeşte **spaţiu vectorial** peste K dacă există o lege de compoziţie internă
$\oplus$: $V\times V\rightarrow V$ şi o lege de compoziţie externă $\otimes$[4] : $K\times V\rightarrow V$ astfel încât:
- V este grup abelian în raport cu legea de compoziţie internă $\oplus$ (cu elementul neutru 0 şi $-x$ elementul opus lui $x\in V$);
- legea de compoziţie externă satisface cerinţele:

1. $(\alpha+\beta)\otimes x =(\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)$, $\forall\alpha,\beta\in K$ $\forall x\in V$;
2. $\alpha\otimes(x\oplus y)=(\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y),\forall\alpha\in K$, $\forall x,y\in V$;
3. $(\alpha\cdot\beta)\otimes x=\alpha\otimes(\beta\otimes x)$, $\forall\alpha,\beta\in K$ $\forall x\in V$;
4. $1\otimes x\neq 0,\forall x\in V$, $x\neq 0$.

Notăm V/K, adică V este spaţiu vectorial peste câmpul K sau V este K – spaţiu vectorial.

Observaţii 1. Elementele lui V se vor numi **vectori** şi vor fi notate cu litere latine mici, iar elementele lui K se vor numi **scalari** şi vor fi notate cu litere greceşti.
2. Un spaţiu vectorial peste $\Re$ se numeşte spaţiu vectorial real; un spaţiu vectorial peste **C** se numeşte spaţiu vectorial complex.

Propoziţie (reguli de calcul). Fie V/K. Atunci:

a) $\alpha(x-y)=\alpha x-\alpha y,\forall\alpha\in K$, $\forall x,y\in V$;
b) $(\alpha-\beta)x =\alpha x-\beta x$, $\forall\alpha,\beta\in K$ $\forall x\in V$;

---

[1] Peano Giuseppe (1858-1932), matematician, logician şi lingvist italian, întemeietorul aritmeticii axiomatice,etc.
[2] Gauss Karl Friedrich (1777-1855), matematician şi astronom german, a conceput metoda celor mai mici pătrate, a demonstrat teoreme fundamentala a algebrei, a întemeiat calculul cu numerele complexe,etc.
[3] Grassmann Hermann Gunther (1809-1877), matematician şi filolog german, a exprimat şi dezvoltat noţiunea de spaţiu cu n dimensiuni, etc.
[4] Folosim doar în definiţie notaţii distincte pentru legile din V şi K pentru a nu genera confuzii

c) $0x=0, \forall x\in V$;
d) $\alpha 0=0, \forall \alpha\in K$;
e) $1x=x, \forall x\in V$;
f) $(-1)x=-x, \forall x\in V$;
g) $\alpha x=0 \Rightarrow \alpha=0$ sau $x=0, \forall \alpha\in K, \forall x\in V$.

Demonstrație.

a) fie $\alpha\in K$ şi $x,y\in V$. Atunci $\alpha x=\alpha(x-y+y)=\alpha(x-y)+\alpha y$ şi adunând $-\alpha y$ (care există deoarece $\alpha x\in V$ iar $(V,+)$ este grup) în ambii membri rezultă $\alpha x-\alpha y =\alpha(x-y)$.

c) $0x=(\alpha-\alpha)x=\alpha x-\alpha x=0, \forall x\in V$

d) avem $\alpha 0=\alpha(x-x)= \alpha x-\alpha x=0, \forall \alpha\in K$

e) din axioma 4 din definiție rezultă că $1x=0$ implică $x=0$. Fie deci $1(x-1x)=1x-(1\cdot 1)x=1x-1x=0$ deci $x-1x=0$ adică $1x=x, \forall x\in V$

g) fie $\forall \alpha\in K$ şi $x\in V$ astfel încât $\alpha x=0$. Dacă $\alpha=0$ demonstrația este încheiată. Fie deci $\alpha\neq 0$. $\exists \alpha^{-1}\in K \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha x)=\alpha^{-1}\cdot 0=0$ iar pe de altă parte $\alpha^{-1}(\alpha x)=(\alpha^{-1}\cdot\alpha)x=1\cdot x=x$ deci $x=0$.

Exemple.

1. $\Re^n/\Re$ este spațiu vectorial numit spațiul vectorial numeric real, unde $\Re^n=\underbrace{\Re\times\Re\times\ldots\times\Re}_{n\ ori}=\{(x_1,\ldots x_n)^T / x_i\in\Re, i=\overline{1,n}\}$, legea de compoziție internă fiind adunarea vectorilor, iar legea de compoziție externă fiind înmulțirea cu scalar a acestora.

Generalizare.

K^n/K este spațiu vectorial, unde
$K^n=\underbrace{K\times K\times\ldots\times K}_{n\ ori}=\{(x_1,\ldots x_n)^T / x_i\in K, i=\overline{1,n}\}$.

2. $M_{m,n}(K)/K$ este spațiu vectorial al matricelor având m linii şi n coloane cu coeficienți din K, unde $K=\Re$ sau K = **C,** legea de compoziție internă fiind adunarea matricelor, iar legea de compoziție externă fiind înmulțirea cu scalar a acestora.

Aplicații

1. Spațiul $\Re^n=\{x=(x_1,\ldots..,x_n)^t, x_i\in\Re, i=\overline{1,n}\}$
este spațiu vectorial real față de adunarea vectorilor şi înmulțirea cu scalari.

Soluție: $V=\Re^n$, $K=\Re$

$$\oplus:\ \Re^n \times \Re^n \to \Re^n$$
$$(x,y) \to x \oplus y$$

Fie $x \in \Re^n$, $y \in \Re^n$ $\Leftrightarrow$ $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ cu $x_i, y_i \in \Re$, $\forall i=\overline{1,n}$

$$x \oplus y=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \in \Re^n$$

$$\otimes:\ \Re^n \times \Re^n \to \Re^n$$
$$(\alpha,x) \to \alpha \otimes x$$

Pentru $\alpha \in \Re$ şi $x \in \Re^n$ definim $\alpha \otimes x=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \in \Re^n$

Verificăm axiomele din definiția spațiului vectorial.

i) $(\Re^n, \oplus)$ grup abelian

a) $\forall\ x,y \in \Re^n \Rightarrow x \oplus y \in \Re^n$

Vectorul $x \oplus y=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \in \Re^n$ pentru că are n componente reale (adunând două numere reale obținem un număr real)

b) $x \oplus y=y \oplus x$, $\quad \forall x,y \in \Re^n$ $\quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1+x_1 \\ \vdots \\ y_n+x_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$

$x_i+y_i=y_i+x_i$, $\forall\ i=\overline{1,n}$ (adunarea numerelor reale este comutativă)

c) $(x\oplus y)\oplus z = x\oplus(y\oplus z)$, $\forall x,y,z \in \Re^n$

$$(x\oplus y)\oplus z=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ \vdots \\ (x_n+y_n)+z_n \end{pmatrix}$$

$$x\oplus(y\oplus z)=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ \vdots \\ x_n+(y_n+z_n) \end{pmatrix}$$

Cei doi vectori sunt egali pentru că au componentele respectiv egale (adunarea numerelor reale este asociativă).

d) $\exists\, e\in\Re^n$ astfel încât $\forall\, x\in\Re^n \Rightarrow e\oplus x = x\oplus e = x$

Din $e\oplus x = x \Rightarrow \begin{pmatrix} e_1+x_1 \\ \vdots \\ e_n+x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow e_i + x_i = x_i, \forall i=\overline{1,n}$

$\Leftrightarrow e_i=0, \forall i=\overline{1,n}$. Deci $e=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\in\Re^n$

e) $\forall\, x\in\Re^n\ \exists\, x'\in\Re^n$ astfel încât $x\oplus x' = x'\oplus x = e$

Din $x\oplus x' = e \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1+x'_1 \\ \vdots \\ x_n+x'_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_i + x'_i = 0\ \forall\ i=\overline{1,n}$

$\Leftrightarrow x_i = -x'_i, \forall i=\overline{1,n}$. Deci $x'=\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}\in\Re^n$

ii) $\otimes$ satisface următoarele cerințe:

a) $(\alpha+\beta)\otimes x=(\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x), \forall\ \alpha,\beta\in\Re$ şi $\forall x\in\Re^n$

$$(\alpha+\beta)\otimes x=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)x_1\\ \vdots\\ (\alpha+\beta)x_n\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\ \vdots\\ \alpha x_n\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}\beta x_1\\ \vdots\\ \beta x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta x_1\\ \vdots\\ \alpha x_n+\beta x_n\end{pmatrix}$$

Cei doi vectori sunt egali deoarece $(\alpha+\beta)x_i=\alpha x_i+\beta x_i$, $\forall$ i= $\overline{1,n}$ (înmulțirea numerelor reale este distributivă față de adunare la stânga şi la dreapta).

b) $\alpha\otimes(x\oplus y)=(\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)$ $\forall\alpha\in\Re$ şi $\forall x,y\in\Re^n$

$$\alpha\otimes(x\oplus y)=\alpha\otimes\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(x_1+y_1)\\ \vdots\\ \alpha(x_n+y_n)\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\ \vdots\\ \alpha x_n\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}\alpha y_1\\ \vdots\\ \alpha y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\alpha y_1\\ \vdots\\ \alpha x_n+\alpha y_n\end{pmatrix}$$

Dar $\alpha(x_i+y_i)=\alpha x_i+\alpha y_i$, $\forall$ i= $\overline{1,n}$

c) $(\alpha\beta)\otimes x=\alpha\otimes(\beta\otimes x)$, $\forall\ \alpha,\beta\in\Re$ şi $\forall\ x\in\Re^n$

$$(\alpha\beta)\otimes x=\begin{pmatrix}(\alpha\beta)x_1\\ \vdots\\ (\alpha\beta)x_n\end{pmatrix}$$

$$\alpha\otimes(\beta\otimes x)=\alpha\otimes\begin{pmatrix}\beta x_1\\ \vdots\\ \beta x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(\beta x_1)\\ \vdots\\ \alpha(\beta x_n)\end{pmatrix}$$

Dar $(\alpha\beta)x_i=\alpha(\beta x_i)$, $\forall$ i= $\overline{1,n}$
(înmulțirea numerelor reale este asociativă)

d) $1\otimes x = x$, $\forall\ x\in\Re^n$ $1\otimes x = \begin{pmatrix} 1x_1 \\ \vdots \\ 1x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Cum $1x_i=x_i$, $\forall$ i= $\overline{1,n}$
(elementul neutru la înmulțirea numerelor reale este 1).

2. Să se arate că R este un spațiu vectorial peste Q, dar Q nu este un spațiu vectorial peste R, operațiile fiind cele cunoscute.
Soluție: Prima afirmație este evidentă pentru că (R,+) este grup abelian; pentru setul (ii): (1) şi (2) sunt consecințe ale distributivității înmulțirii față de adunare, (3) este o consecință a asociativității înmulțirii numerelor reale iar (4) este echivalentă cu faptul că 1 este elementul neutru pentru înmulțire.
Q nu este spațiu vectorial real întrucât înmulțirea nu este lege externă.
Într-adevăr, trebuie să avem: $(\forall)\alpha\in Q,(\forall)\mathrm{x}\in\mathrm{R}\Rightarrow\alpha\mathrm{x}\in\mathrm{Q}$, dar pentru $\alpha=1$ şi $\mathrm{x}=\sqrt{2},\alpha\mathrm{x}=\sqrt{2}\notin Q$.

3. Să se arate că:
   a) Q este Q – spatiu vectorial;
   b) C este Q – spatiu vectorial;
   c) C este R – spatiu vectorial.

4. Fie C^3/C şi $V\subset C^3$, unde:

a) $V=\left\{x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}/\, x_1\in\Re\right\}$

b) $V=\left\{x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}/\, x_1=0\right\}$

c) $V=\left\{x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}/\, x_1+x_2=0\right\}$

d) $V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 + x_2 = 1 \right\}$.

În care dintre aceste cazuri este V un spațiu vectorial?

5. Fie *V/K* şi *W/K* două spații vectoriale.
Arătați că $V \times W = \{(x, y) | x \in V, y \in W\}$ este un spațiu vectorial peste K în raport cu operațiile:
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$\alpha(x,y) =(\alpha x, \alpha y), \ \forall x_1,x_2 \in V, y_1, y_2 \in W, \forall \alpha \in K$.

6. Considerăm spațiul vectorial complex al polinoamelor P / C şi $V \subset P$, unde V este mulțimea acelor polinoame x pentru care:
a) X are gradul 3;
b) $2X(0)=X(1)$;
c) $X(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]$, de asemenea $X(t)=X(1-t), \forall t$.
În aceste condiții este V un spațiu vectorial?

7. Arătați că mulțimea matricelor de ordin $m \times n$ formează în raport cu adunarea matricelor şi înmulțirea lor cu scalar un spațiu vectorial ($K=\mathfrak{R}$).

8. Pe exemplul unui agent economic organizați spațiul intrărilor în sistem ca spațiu vectorial.

1.2. Dependență şi independență liniară. Sistem de generatori. Bază.

Fie V/K.

Definiția 2. Vectorul $x \in V$ se numeşte **combinație liniară** (cu coeficienți din K) a vectorilor mulțimii $S =\{v_1,\ldots,v_n\} \subset V$, dacă există scalarii $\alpha_1,\ldots\alpha_n \in K$ astfel încât: $x=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n$ (*).
Dacă scalarii $\alpha_1,\ldots\alpha_n \in K$, îndeplinesc condițiile:

$$\alpha_i \geq 0, \forall i = 1,\ldots,n \text{ şi } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

atunci relația (*) defineşte o combinație liniară convexă.

Definiția 3. Vectorii $v_1,\ldots,v_n \in V$ constituie un **sistem de generatori** (mulțime de generatori) al spațiului vectorial V dacă orice vector din V este o combinaţie liniară a elementelor mulţimii $S=\{v_1,\ldots,v_n\}$, adică: $\forall x\in V$ $(\exists)\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in K$ astfel încât $x=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n$.

Exemple

1. Consideram în K^n/K mulţimea vectorilor $\{e_1,\ldots,e_n\}$, unde $e_1=(1,0,0,...,0,0)$, $e_2=(0,1,0,...,0,0),\ldots,e_n=(0,0,0,...,0,1)$.
Aceasta mulţime formează un sistem de generatori al spaţiului K^n/K.
Într-adevăr, fie $x=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ un vector oarecare din K^n/K.
Avem evident egalitatea: $x=(\alpha_1,...,\alpha_n)=\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n$

2. Fie $M_{m,n}(K)/K$ spaţiul vectorial al matricelor având m linii şi n coloane cu coeficienţi din K şi matricele $\{e_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ unde e_{ij} este matricea care are 1 în poziţia (i,j) şi 0 în rest. Mulţimea matricelor $\{e_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ este un sistem de generatori al acestui spaţiu vectorial.
Într-adevăr, daca $A=\{a_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ este o matrice atunci avem egalitatea $A=\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij}e_{ij}$.

Definiţia 4. Vectorii $v_1,\ldots,v_n\in V$ se numesc **liniar independenţi**[5] dacă orice combinaţie liniară a acestora se anulează numai dacă toţi scalarii sunt nuli, adică din relaţia: $\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n=0 \Rightarrow \alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$.

Exemple.

1. În K^n/K mulţimea vectorilor $\{e_1,\ldots,e_n\}$, unde $e_1=(1,0,0,...,0,0)$, $e_2=(0,1,0,...,0,0),\ldots,e_n=(0,0,0,...,0,1)$, formează un sistem liniar independent.
Într-adevăr, fie relaţia $\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n=0$ cu $\alpha_i\in K$, i=1,...n. Avem
$\alpha_1(1,0,...,0,0)+\alpha_2(0,1,...,0,0)+...+\alpha_n(0,0,...,0,1)=$
$(\alpha_1,0,...,0,0)+(0,\alpha_2,...,0,0)+...(0,0,...,0,\alpha_n)=$
$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n)=(0,0,...0,0)$. Deci $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$.

2. În $M_{m,n}(K)/K$ matricele $\{e_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ formează un sistem liniar independent.

[5] noţiunea de independenta liniara a vectorilor a fost introdusa de H.Grassmann (1878)

Definiția 5. Vectorii $v_1,\ldots,v_n\in$ V se numesc **liniar dependenți** dacă nu sunt liniar independenți *(adică există $\alpha_i\in K$, nu toți nuli, astfel încât $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 0$).*

Definiția 6. Sistemul de vectori $B=\{v_1,\ldots,v_n\}\subset V$ formează o **bază** a spațiului vectorial V dacă B constituie un sistem de generatori al lui V şi dacă formează un sistem liniar independent în V.

Exemple.
1. În K^n/K mulțimea vectorilor $\{e_1,\ldots,e_n\}$ formează o bază.

2. În $M_{m,n}(K)/K$ matricele $\{e_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ constituie o bază.

Definiția 7. V/K este un spațiu vectorial finit dimensional sau de tip finit dacă are o bază finită.

Teorema 1 (de existență a bazei). Fie V/K un spațiu vectorial nenul, un sistem liniar independent $X\subset V$ şi un sistem S de generatori pentru V, astfel încât $X\subset S$. Atunci există o bază a lui V/K astfel încât $X\subset B\subset S$.

Definiția 8. Fie V/K. Se numeşte dimensiunea lui V şi se notează dimV numărul maxim de vectori liniar independenți.

Teorema 2. Condiția necesară şi suficientă ca un spațiu vectorial V peste K să aibă dimensiunea n este ca să admită o bază formată din n vectori.

Teorema 3. Toate bazele unui spațiu vectorial finit dimensional au acelaşi număr de vectori.

Teorema 4 (teorema bazei). Într-un spațiu vectorial finit dimensional orice vector se scrie, în mod unic, ca o combinație liniară a vectorilor unei baze a spațiului.
Demonstrație.
Fie $B=\{v_1,\ldots,v_n\}\subset V$ o bază a spațiului vectorial V şi $v\in V$.

Existența. Cum B este un sistem de generatori al lui V $\Rightarrow(\exists)\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in K$ astfel încât:

$$v=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n.$$

Unicitatea. Presupunem că $(\exists)\alpha'_1,\dots,\alpha'_n\in K$ astfel încât:

$$v = \alpha'_1v_1+\dots+ +\alpha'_n v_n \Rightarrow \alpha_1v_1+\dots+\alpha_n v_n = \alpha'_1v_1+\dots+ \alpha'_n v_n$$

$$(\alpha_1 - \alpha'_1)\, v_1+\dots+ (\alpha_n - \alpha'_n)v_n =0$$

Dar B este un sistem liniar independent, rezultă astfel:

$$\alpha_i - \alpha'_i = 0,\ \forall i=1,..,n \Leftrightarrow \alpha_i = \alpha'_i,\ \ \forall i=1,..,n.$$

Observații 1. Scalarii unici $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$ se numesc *coordonatele lui v în baza B*. Vectorul $v_B=(\alpha_1,..,\alpha_n)^t$ se numeşte *vectorul coordonatelor* lui v în baza B.

2. Următoarea propoziție este utila în rezolvarea exercițiilor:
Fie V/K, dimV=n şi $B=\{v_1,\dots,v_n\}\subset V$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
a) B este o baza a lui V;
b) B este un sistem liniar independent al lui V:
c) B este un sistem de generatori al lui V.
3. Fie $\Re^n=\{x\ /\ x=(x_1,\dots,x_n)^t,\ x_i\in\Re,\ i=1,..,n\}$ spațiul vectorial real față de adunarea vectorilor şi înmulțirea cu scalari.
Vectorii $e_1=(1,0,\dots,0)^t,\dots,\ e_n=(0,0,\dots,1)^t$ formează o bază, numită **baza standard** sau canonică a spațiului $\Re^n$.

Ținând seama de importanța în aplicații economice a spațiului vectorial $\Re^n$ dăm următoarea teoremă privind verificarea rapidă a faptului că un sistem de n vectori $v_1,\dots,v_n\in \Re^n$ constituie o bază în $\Re^n$.

Teorema 5. Vectorii $v_1=(a_{11},\dots,a_{1n})^t,\dots,\ v_n=(a_{n1},\dots,a_{nn})^t$ din $\Re^n$ formează o bază în $\Re^n$ $\Leftrightarrow$ determinantul matricei asociate sistemului de vectori (matricea formată cu componentele vectorilor) este nenul.

Consecință. Dacă detA = 0 atunci sistemul de vectori nu formează o bază a lui $\Re^n$.

Aplicații

1. Să se arate că mulțimea $B=\{v_1,v_2,v_3\}\subset\Re^3$,

unde $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \ v_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ formează o bază în $\Re^3$. Să se găsească coordonatele vectorului v=$\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ în această bază.

Soluție: i) Asociem matricea sistemului de vectori:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 0 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Calculăm determinantul matricei A:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 0 & -1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2$$

Cum $\det A\neq 0 \Rightarrow$B bază în $\Re^3$

ii)B fiind bază în $\Re^3$, orice vector din $\Re^3$ se scrie ca o combinație liniară a vectorilor v_1, v_2, v_3 în mod unic.

Avem $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3\\ \alpha_1-\alpha_3\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=2\\ \alpha_1-\alpha_3=3\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2\end{cases}$$

Matricea asociată sistemului este $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 0 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, iar $\det A\neq 0\Rightarrow$

sistemul este compatibil determinat cu soluția dată de

$\alpha_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\alpha_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $\alpha_3=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, unde $\Delta=\det A=-2$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6\ ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 3\ ;\ \alpha_2 = -1\ ; \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Să se arate că mulțimea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ cu

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

este sistem liniar independent în $M_2(\Re)$.

Soluție: Se consideră combinația liniară nulă

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$,

unde $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \Re$.

Înlocuind obținem:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_4 & -\alpha_1 + \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obține sistemul:

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$

$\alpha_4 = 0$

$-\alpha_1 + \alpha_4 = 0$

care are soluția $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.