UNIVERSITATEA CREȘTINĂ „DIMITRIE CANTEMIR”
FACULTATEA DE RELAȚII ECONOMICE INTERNAȚIONALE

Conf. univ. dr. GRAȚIELA GHIC

MATEMATICĂ APLICATĂ ÎN ECONOMIE

CAIET DE SEMINAR

EDITURA UNIVERSITARĂ
Bucureşti, 2015

CUPRINS

RECAPITULAREA NOȚIUNILOR FUNDAMENTALE

Anexa 1 Alfabetul grec

Alfabetul grec este o culegere a celor 24 de litere, care este folosit pentru a scrie în limba greacă de la secolul VIII î.Hr. până astăzi.

Alfabetul grec

Literă mare	Literă mică	Transcriere clasică	Denumire
Α	α	A	Alpha
Β	β	B	Bêta
Γ	γ	g	Gamma
Δ	δ	d	Delta
Ε	ε	e	Epsilon
Ζ	ζ	z	Dzêta
Η	η	ê	Êta
Θ	θ	th	Thêta
Ι	ι	i	Iota
Κ	κ	k	Kappa
Λ	λ	l	Lambda
Μ	μ	m	Mi
Ν	ν	n	Ni
Ξ	ξ	x/ks	Xi
Ο	ο	o	Omicron
Π	π	p	Pi
Ρ	ρ	r	Rhô
Σ	σ, ς	s	Sigma
Τ	τ	t	Tau
Υ	υ	y	Ypsilon
Φ	φ	ph	Phi
Χ	χ	kh	Khi
Ψ	ψ	ps	Psi
Ω	ω	ô	Oméga

Este şi primul şi cel mai vechi alfabet în sensul că denotează fiecare vocală şi fiecare consoană cu semnul separat.
De la secolul II î.Hr. literele greceşti se folosesc şi pentru a marca numeralele.
Alfabetul grec îşi are originile în alfabetul fenician şi la baza formarii mai multor alfabete folosite în Europa şi Orientul Mijlociu, inclusiv latin şi chirilic. În afară de funcţia sa de reprezentare scrisă a limbii greci, literele alfabetului grec sunt folosite azi ca simboluri în matematică şi alte ştiinţe exacte.
Literele greceşti sunt folosite deseori în notaţia ştiinţifică, mai ales în algebra şi fizică:

- Unghiurile sunt notate cu θ (*theta* mic) sau α (*alpha* mic).
- Litera Δ (*delta* mare) este folosit pentru a desemna un interval,dar şi pentru a calcula o ecuaţie de gradul al II-lea
- Literea ε (*epsilon* mic) este folosită pentru a desemna valorile neglijabile (cantităţi mici).
- Litera π (*pi* mic) este utilizată în matematică pentru a desemna circumferinţa unui cerc cu raza egală cu o unitate (aproximativ 3,1415926536).
- Litera Π (*pi* mare) este utilizată în matematică pentru a desemna un produs de elemente.
- Litera ω (*oméga* mic) desemnează în fizică viteza unghiulară.
- Litera Ω (*oméga* mare) este simbolul pentru o unitate în SI a rezistenţei electrice, ohmul.
- Litera μ (*mu* mic) este simbolul pentru prefixul SI *micro* care reprezintă o milionime dintr-o unitate.
- Litera ρ (*rho* mic) este folosită în matematică pentru a indica curbele polare, şi în fizică pentru densitate.
- Litera χ (*chi* mic) este utilizată în fizică pentru a desemna un coeficient de compresibilitate (termodinamică şi unde)
- Litera Σ (*sigma* mare) este utilizată în matematică pentru a desemna o sumă de elemente.
- Literele greceşti sunt folosite pentru a desemna stelele.
- Diferitele tipuri de radiaţie emisă de materialele radioactive sunt notate respectiv α, β şi γ.

Anexa 2 Abrevieri si termeni

Lema - gr. lemma ″propoziţie luată ca argument″, propoziţie ajutătoare folosită la demonstrarea unei teoreme; lemele au fost folosite iniţial de Euclid (sec.3 i.e.n.).

Teorema - gr. theorema ″examinare, cercetare″, denumirea a fost folosita iniţial de Aristotel.
In calculul vectorial, nabla este un operator diferenţial ce operează asupra funcţiilor, reprezentat prin simbolul ∇[1].
În funcţie de cum este aplicat operatorul, el poate descrie gradientul (panta), divergenţa sau rotorul.
Matematic, nabla poate fi privit ca o derivată în spaţiul multidimensional.
Când este folosit într-o singură dimensiune, el ia forma derivatei din analiza matematică.
Ca operator, el operează pe câmpuri vectoriale şi câmpuri scalare care suportă operaţii similare înmulţirii. Ca toţi operatorii, aceşti operatori similari înmulţirii nu trebuie să fie confundaţi cu înmulţirea; în particular, nabla nu comută.

[1] Nabla este un simbol matematic folosit în primul rând ca o convenţie de notaţie.

În coordonate carteziene tridimensionale, R3 cu coordonatele (x, y, z), nabla se defineşte ca

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

unde (i, j, k) este baza standard în R^3.
Această definiție poate fi generalizată într-un spațiu euclidian, de dimensiune n R^n.
În sistemul de coordonate carteziene cu coordonatele (x_1, x_2, …, x_n), nabla este:

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

unde $\{\vec{e}_i : 1 \leq i \leq n\}$ este baza standard în acest spațiu.
Mai pe scurt, folosind notația Einstein, nabla se scrie ca $\nabla = \vec{e}_i \partial_i$
Nabla poate fi exprimat şi în alte sisteme de coordonate, de exemplu în coordonate cilindrice sau sferice.
Nabla este folosit drept formă prescurtată de scriere pentru simplificarea multor expresii matematice lungi.
Cel mai adesea, este folosit pentru a simplifica expresiile pentru gradient, divergență, rotor, derivată direcțională şi Laplacian.
Atât regula lui Sarrus cât şi regula triunghiului se aplică numai determinanților de ordin 3.

Tabel de derivate
Determinarea derivatei este operația primară în calculul diferențial.
Acest tabel conține derivatele celor mai importante funcții, precum şi reguli de derivare pentru funcții compuse.
În cele ce urmează, f şi g sunt funcții de x, iar c este o constantă.
Funcțiile sunt presupuse reale de variabilă reală.
Aceste formule sunt suficiente pentru a deriva orice funcție elementară.

Reguli generale de derivare

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad (f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

$$(f^g)' = (gf^{g-1})f' + (f^g \ln f)g' = f^g \left(f'\frac{g}{f} + g' \ln f\right), \qquad f > 0$$

Derivatele funcțiilor simple

c' = 0 x' = 1 $(x^c)' = cx^{c-1}, \qquad x > 0$

$$(|x|)' = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x, \qquad x \neq 0 \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Derivatele funcțiilor exponențiale şi logaritmice

$(n^x)' = n^x \ln n, \qquad n > 0$ (ex)' = ex

$$(\log_n x)' = \frac{1}{x \ln n} \qquad , n > 0, n \neq 1 \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad , x > 0$$

Derivatele funcțiilor trigonometrice

(sin x)' = cos x (cos x)' = − sin x

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2 x \qquad (\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x \sec x$$

$$(\mathrm{ctg}x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x = -1 - \mathrm{ctg}^2 x \qquad (\csc x)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x \csc x$$

Derivatele funcțiilor trigonometrice inverse

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\mathrm{arcsec}\, x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\mathrm{arcctg}x)' = \frac{-1}{1+x^2} \qquad (\mathrm{arccsc}\, x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Derivatele funcțiilor hiperbolice

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{tgh}x = \mathrm{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{sech}\, x = -\mathrm{tgh}x\, \mathrm{sech}\, x$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{ctgh}\, x = -\mathrm{csch}^2 x \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{csch}\, x = -\mathrm{ctgh}\, x\, \mathrm{csch}\, x$$

Derivatele funcțiilor hiperbolice inverse

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arcsinh}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{arccosh}\, x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arctgh}\, x = \frac{1}{1-x^2} \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{arcsech}\, x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arcctgh}\, x = \frac{1}{1-x^2} \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{arccsch}\, x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

1. SPAȚII VECTORIALE

Definiție şi terminologie	Observații

Definiția 1
Fie (K, +, .) un corp nevid (de exemplu, corpul numerelor reale sau complexe, cu 0_K şi 1_K elementul zero şi respectiv elementul unitate) si V o mulțime nevidă, înzestrată cu o lege de compoziție internă $\oplus$: $V \times V \to V$ şi o lege de compoziție externă $\otimes$: $K \times V \to V$ astfel încât:
Tripletul (V, $\oplus$, $\otimes$) se numeşte spațiu vectorial peste corpul K dacă:
- V este grup abelian în raport cu legea de compoziție internă $\oplus$ (cu elementul neutru 0 şi –x elementul opus lui $x \in V$);
- legea de compoziție externă satisface cerințele:

1. $(\alpha+\beta)\otimes x = (\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x), \ \forall \alpha,\beta \in K \ \forall x \in V$;
2. $\alpha\otimes(x\oplus y) = (\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y), \forall \alpha \in K, \ \forall x,y \in V$;
3. $(\alpha\cdot\beta)\otimes x = \alpha\otimes(\beta\otimes x), \ \forall \alpha,\beta \in K \ \forall x \in V$;
4. $1\otimes x \neq 0, \forall x \in V, \ x \neq 0$.

Notăm V/K, adică V este spațiu vectorial peste corpul K.

Terminologie şi notații

1. Elementele spațiului vectorial V se numesc vectori şi se notează cu litere latine mici.

2. Elementele lui K se numesc scalari şi se notează cu litere greceşti mici.

3. Un spațiu vectorial peste $\Re$ se numeşte spațiu vectorial real.

4. Un spațiu vectorial peste **C** se numeşte spațiu vectorial complex.

Propoziție
Într-un spațiu vectorial, au loc următoarele reguli de calcul:

a) $\alpha(x-y) = \alpha x - \alpha y, \forall \alpha \in K, \ \forall x, y \in V$;
b) $(\alpha-\beta)x = \alpha x - \beta x, \ \forall \alpha,\beta \in K \ \forall x \in V$;
c) $0x = 0, \ \forall x \in V$;
d) $\alpha 0 = 0, \ \forall \alpha \in K$;
e) $1x = x, \ \forall x \in V$;
f) $(-1)x = -x, \ \forall x \in V$;
g) $\alpha x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0, \ \forall \alpha \in K, \ \forall x \in V$.

Exemple.

1. Spaţiul vectorial numeric real $\Re^n/\Re$ definit prin

$$\Re^n = \underbrace{\Re \times \Re \times \ldots \times \Re}_{n \text{ ori}} = \left\{ \left(x_1,\ldots x_n\right)^t / x_i \in \Re, i = \overline{1,n} \right\},$$

şi înzestrat cu operaţiile canonice:

- legea de compoziţie internă este adunarea vectorilor
- legea de compoziţie externă este înmulţirea vectorilor cu scalar real.

Explicit, definim cele două operaţii:

a) dacă $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$ atunci adunarea vectorilor $x \div y$ se defineşte pe componente:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n$$

b) înmulţirea vectorului cu un scalar se defineşte prin multiplicarea tuturor componentelor vectorului cu respectivul scalar:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) \in \mathbf{R}^n$$

Observaţie

1. Egalitatea a doi vectori este definită astfel:
2.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sunt egali dacă şi numai dacă $x_i = y_i, \forall i = \overline{1,n}$.

2. Mai general, K^n/K înzestrat cu operaţiile canonice este spaţiu vectorial

$$K^n = \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n \text{ ori}} = \left\{ \left(x_1,\ldots x_n\right)^T / x_i \in K, i = \overline{1,n} \right\}$$

unde K este corpul numerelor reale sau complexe.

3. Spaţiul vectorial al matricelor $M_{m,n}(K)/K$ cu m linii şi n coloane cu elemente din corpul K, unde K=$\Re$ sau K = **C,** înzestrat cu operaţiile canonice:

- legea de compoziţie internă este adunarea matricelor,
- legea de compoziţie externă este înmulţirea matricelor cu scalar.

4. Spaţiul polinoamelor intr-o nedeterminată, cu coeficienţi reali de grad cel mult n.

Întrebări de control şi teme de dezbatere

Exerciţii rezolvate

1. Spaţiul $\Re^n = \{x=(x_1,.....,x_n)^t,\ x_i \in \Re,\ i=\overline{1,n}\}$ este spaţiu vectorial real faţă de adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari.

Soluţie: $V=\Re^n$, $K=\Re$

$$\oplus:\ \Re^n \times \Re^n \to \Re^n$$
$$(x,y) \to x \oplus y$$

Fie $x \in \Re^n$, $y \in \Re^n \Leftrightarrow x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ cu $x_i, y_i \in \Re$, $\forall i=\overline{1,n}$

$$x \oplus y=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \in \Re^n$$

$$\otimes:\ \Re^n \times \Re^n \to \Re^n$$
$$(\alpha,x) \to \alpha \otimes x$$

Pentru $\alpha \in \Re$ şi $x \in \Re^n$ definim $\alpha \otimes x=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \in \Re^n$

Verificăm axiomele din definiţia spaţiului vectorial.

i) $(\Re^n, \oplus)$ grup abelian

a) $\forall\ x,y \in \Re^n \Rightarrow x \oplus y \in \Re^n$

Vectorul $x \oplus y=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \in \Re^n$ pentru că are n componente reale (adunând două numere reale obţinem un număr real)

b) $x \oplus y = y \oplus x$, $\forall\ x,y \in \Re^n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1+x_1 \\ \vdots \\ y_n+x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$x_i+y_i = y_i+x_i$, $\forall\ i=\overline{1,n}$ (adunarea numerelor reale este comutativă)

c) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, $\forall x,y,z \in \Re^n$

$$(x\oplus y)\oplus z=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ \vdots \\ (x_n+y_n)+z_n \end{pmatrix}$$

$$x\oplus(y\oplus z)=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} y_1+z_1 \\ \vdots \\ y_n+z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ \vdots \\ x_n+(y_n+z_n) \end{pmatrix}$$

Cei doi vectori sunt egali pentru că au componentele respectiv egale (adunarea numerelor reale este asociativă).

d) $\exists\ e\in\Re^n$ astfel încât $\forall\ x\in\Re^n \Rightarrow e\oplus x=x\oplus e = x$

$$\text{Din } e\oplus x=x\Rightarrow\begin{pmatrix} e_1+x_1 \\ \vdots \\ e_n+x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow e_i+x_i=x_i, \forall i=\overline{1,n} \Leftrightarrow e_i=0, \forall i=\overline{1,n}$.

$$\text{Deci } e=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\in\Re^n$$

e) $\forall\ x\in\Re^n\ \exists\ x'\in\Re^n$ astfel încât $x\oplus x'=x'\oplus x=e$

$$\text{Din } x\oplus x'=e\Rightarrow\begin{pmatrix} x_1+x'_1 \\ \vdots \\ x_n+x'_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow x_i+x'_i=0\ \forall\ i=\overline{1,n} \Leftrightarrow x_i=-x'_i, \forall i=\overline{1,n}.$$

$$\text{Deci } x'=\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}\in\Re^n$$

ii) $\otimes$ satisface următoarele cerințe:

a) $(\alpha+\beta)\otimes x=(\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)$, $\forall\ \alpha,\beta\in\Re$ si $\forall\ x\in\Re^n$

$$\text{Vectorul } (\alpha+\beta)\otimes x=\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)x_1 \\ \vdots \\ (\alpha+\beta)x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Vectorul } (\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \vdots \\ \beta x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n+\beta x_n \end{pmatrix}$$

Cei doi vectori sunt egali deoarece $(\alpha+\beta)x_i=\alpha x_i+\beta x_i, \forall\ i=\overline{1,n}$ (înmulțirea numerelor reale este distributivă față de adunare la stânga şi la dreapta).

b) $\alpha\otimes(x\oplus y) = (\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)\ \forall\ \alpha\in\Re$ si $\forall\ x,y \in\Re^n$

$$\alpha\otimes(x\oplus y)=\alpha\otimes\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha(x_1+y_1) \\ \vdots \\ \alpha(x_n+y_n) \end{pmatrix}$$

$$(\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \vdots \\ \alpha y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1+\alpha y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n+\alpha y_n \end{pmatrix}$$

Dar $\alpha(x_i+y_i)=\alpha x_i+\alpha y_i$, $\forall\ i=\overline{1,n}$

c) $(\alpha\beta)\otimes x=\alpha\otimes(\beta\otimes x)$, $\forall\ \alpha,\beta \in\Re$ si $\forall\ x\in \Re^n$

$$(\alpha\beta)\otimes x=\begin{pmatrix} (\alpha\beta)x_1 \\ \vdots \\ (\alpha\beta)x_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha\otimes(\beta\otimes x)=\alpha\otimes\begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \vdots \\ \beta x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha(\beta x_1) \\ \vdots \\ \alpha(\beta x_n) \end{pmatrix}$$

Dar $(\alpha\beta)x_i=\alpha(\beta x_i)$, $\forall\ i=\overline{1,n}$ (înmulțirea numerelor reale este asociativă)

d) $1\otimes x=x$, $\forall\ x\in\Re^n$;

$$1\otimes x=\begin{pmatrix} 1x_1 \\ \vdots \\ 1x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x$$

Cum $1x_i=x_i$, $\forall\ i=\overline{1,n}$ (elementul neutru la înmulțirea numerelor reale este 1).

2. Să se arate că R este un spațiu vectorial peste Q, dar Q nu este un spațiu vectorial peste R, operațiile fiind cele cunoscute.

Soluție: Prima afirmație este evidentă pentru că (R,+) este grup abelian; pentru setul (ii): (1) şi (2) sunt consecințe ale distributivității înmulțirii față de adunare, (3) este o consecință a asociativității înmulțirii numerelor reale, iar (4) este echivalentă cu faptul că 1 este elementul neutru pentru înmulțire. Q nu este spațiu vectorial real întrucât înmulțirea nu este lege externă.

Într-adevăr, trebuie să avem: $(\forall)\alpha \in Q, (\forall)\mathrm{x} \in \mathrm{R} \Rightarrow \alpha\mathrm{x} \in \mathrm{Q},$ dar pentru

$\alpha = 1$ şi $\mathrm{x} = \sqrt{2}, \alpha\mathrm{x} = \sqrt{2} \notin Q.$

Exerciții propuse

1. Să se arate că:

   a) Q este Q-spațiu vectorial;

   b) C este R – spațiu vectorial.

2. Fie $\mathrm{C}^3 / \mathrm{C}$ şi $\mathrm{V} \subset \mathrm{C}^3$, unde:

a) $\mathrm{V} = \left\{ \mathrm{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} / \mathrm{x}_1 \in \Re \right\}$

b) $\mathrm{V} = \left\{ \mathrm{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} / \mathrm{x}_1 = 0 \right\}$

c) $\mathrm{V} = \left\{ \mathrm{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} / \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 = 0 \right\}$

În care din aceste cazuri este V un spațiu vectorial? 3. Fie *V/K* şi *W/K* două spații vectoriale. Arătați că $V \times W = \{(x, y) \mid x \in V, y \in W\}$ este un spațiu vectorial peste K în raport cu operațiile: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ $\alpha(x,y) =(\alpha x, \alpha y)$, $\forall x_1,x_2\in V, y_1, y_2\in W, \forall\alpha\in K$. 4. Arătați că mulțimea matricelor de ordin m×n formează în raport cu adunarea matricelor şi înmulțirea lor cu scalar un spațiu vectorial ($K=\Re$).	

I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

2. SUBSPAȚII VECTORIALE

Subspații vectoriale

Definiția 2.
O submulțime nevidă a unui spațiu vectorial se numeşte subspațiu vectorial al său, dacă este chiar spațiu vectorial în raport cu legile de compoziție internă şi externă induse de legile corespunzătoare.
Matematic: Fie spațiul vectorial V/K, o submulțime, W≠∅ se numeşte subspațiu vectorial al spațiului V, dacă W este spațiu vectorial înzestrat cu operațiile induse.

Definiția 3.
O submulțime nevidă W a spațiului vectorial V, se numeşte subspațiu vectorial al lui V dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:
1. $\forall x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$
2. $\forall x \in W, \forall \alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in W$.

Observație
Cele două condiții sunt echivalente cu:
$\forall x, y \in W, \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$.

Terminologie si notații

a) Spațiul vectorial se numeşte spațiu ambient pentru subspațiul vectorial pe care-l conține.
b) Legile de compoziție (internă şi externă) induse de legile corespunzătoare pe subspațiul vectorial se numesc operații induse.
c) Corpul scalarilor se subînțelege a fi identic.
d) W este subspațiu vectorial al spațiului vectorial V se notează W<V.

Teorema 1. (Echivalenta definițiilor)
Fie V/K, W⊆V, W≠∅. Atunci $W<V \Leftrightarrow \forall\alpha,\beta\in K\ \forall x,y\in W,\ \alpha x+\beta y\in W$.

Propoziție.
Intersecția de subspații vectoriale este un subspațiu vectorial.

Întrebări de control şi teme de dezbatere

Exerciții rezolvate

1. Să se verifice dacă următoarea submulțime $X = \{x = (x_1, x_2, x_3)^t / x_1 = 0\} \subset \mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \mathbf{R}, \forall i = \overline{1,3}\}$ înzestrată cu operațiile induse are structura de subspațiu vectorial real a spațiului tridimensional real.

Soluție

Verificăm cele două condiții din definiția:

i) $(0, x_2, x_3)^t + (0, x_2, y_3)^t = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3)^t \in X$

ii) $\alpha x = \alpha(0, x_2, x_3) = (0, \alpha x_2, \alpha x_3)^t \in X$,

ceea ce atestă structura de subspațiu vectorial real a lui X .

2. Să se verifice dacă următoarea submulțime

$X = \{x = (x_{1,} x_2, x_{3,})^t / x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \mathbf{R}, \forall i = \overline{1,3}\}$

înzestrată cu operațiile induse are structura de subspațiu vectorial real a spațiului tridimensional real.

Soluție

Conform observației, este suficient sa verificam condiția

$\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in X.$

Pentru

$\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow$ $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ si $y_1 - y_2 + y_3 = 0$

si prin calcul direct se obține $\alpha x + \beta y \in X$ ceea ce atesta structura de subspațiu vectorial real a lui X

Exerciții propuse

1. Considerăm următoarele submulțimi ale lui $\Re^n$:

$X_1 = \{x \in \Re^n / x = (x_1, ..., x_n)^t$ şi $x_1 + ... + x_n = 0\}$

$X_2 = \{x \in \Re^n / x = (x_1, ..., x_n)^t$ şi $x_1 = 1\}$

$X_3=\{x\in\Re^n / x=(x_1,...,x_n)^t$ şi $x_1x_2=1\}$ $X_4=\{x\in\Re^n / x=(x_1,...,x_n)^t$ şi $x_1+x_2=1\}$ $X_5=\{x\in\Re^n / x=(x_1,...,x_n)^t$ şi $x_1=x_2=x_3\}$ Care dintre acestea sunt subspații vectoriale ale lui $\Re^n$? 2. Fie $X=\{x\in\Re^3/x=(x_1,x_2,x_3)^t, x_1+\alpha x_2+\beta x_3=b\}$ unde $\alpha,\beta,b\in\Re$. a) Determinați valoarea lui $b\in\Re$ astfel încât $X<\Re^3/\Re$ pentru orice $\alpha,\beta\in\Re$. b) Pentru $\alpha=1$ şi b determinat mai sus, găsiți $\beta\in\Re$ astfel ca $v=(2,1,-4)^t\in X$. 4. Determinați suma şi intersecția subspațiilor vectoriale U, $V<R^3$, unde $U=\{(x_1, x_2, x_3)^t \in R^3 \mid x_1 - x_2 = 0\}$ $V=\{(x_1, x_2, x_3)^t \in R^3 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$	