

CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA YUPARI Z. WILLIAMS

MATEMATICĂ

clasa a XII-a

- **ALGEBRĂ SUPERIOARĂ**
- **ANALIZĂ MATEMATICĂ**

SINTEZE DE TEORIE
EXEMPLE REZOLVATE
EXERCII ȘI PROBLEME

- **Fixarea cunoștințelor**
- **Aprofundarea cunoștințelor**
- **Performanță**
- **Autoevaluare**
- **Evaluare sumativă**



TOP
PUBLISHING

CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA YUPARI Z. WILLIAMS

MATEMATICĂ

clasa a XII-a

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ
ANALIZĂ MATEMATICĂ

SINTEZE DE TEORIE
EXEMPLE REZOLVATE
EXERCII ȘI PROBLEME

- Fixarea cunoștințelor
- Aprofundarea cunoștințelor
- Performanță
- Autoevaluare
- Evaluare sumativă

Ediția a patra revizuită și adăugită

EDITURA TOP PUBLISHING
BUCUREȘTI

Prezentul auxiliar didactic este aprobat pentru utilizare în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018

Referenți științifici:

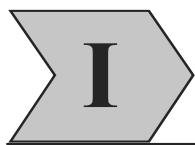
- | | |
|--|---|
| <i>prof. Nicușor Udrea</i> , București | <i>prof. Gabriela Săndulescu</i> , Iași |
| <i>prof. Marian Voinea</i> , București | <i>prof. Sanda Nițoiu</i> , Jimbolia |
| <i>prof. Rică Zamfir</i> , București | <i>prof. Domnica Rif</i> , Jimbolia |
| <i>prof. Elena-Violeta Rădulescu</i> , Buc. | <i>prof. Nicoleta Gheorghe</i> , Mangalia |
| <i>prof. Daniela Ulei</i> , București | <i>prof. Aurica-Viuța Fazakas</i> , Marghita |
| <i>prof. Otilia-Bogdana Lăstun</i> , Agnita | <i>prof. Rodica Ursan</i> , Marghita |
| <i>prof. Valentina Rusu</i> , Alba Iulia | <i>prof. Tatiana Voicu</i> , Marghita |
| <i>prof. Delia Stănilă</i> , Alba Iulia | <i>prof. Dorina Boroș</i> , Marghita |
| <i>prof. Petru-Dumitru Stănilă</i> , Alba Iulia | <i>prof. Gabriela Florea</i> , Mediaș |
| <i>prof. Margareta Vecerzan</i> , Agnita | <i>prof. Eugenia Munteanu</i> , Mediaș |
| <i>prof. Delia Goina</i> , Bistrița | <i>prof. Alexandru Nicula</i> , Mediaș |
| <i>prof. Cornel-Vasile Muscan</i> , Bistrița | <i>prof. Anca-Nicoleta Oprea</i> , Mediaș |
| <i>prof. Daria-Maria Stoleru</i> , Bistrița | <i>prof. Ileana Demian</i> , Ocna Mureș |
| <i>prof. Mihaela Molodeț</i> , Brașov | <i>prof. Adriana Mihaela Grec</i> , Oradea |
| <i>prof. Anca-Daniela Petrescu</i> , Bufta | <i>prof. Dana Kele</i> , Oradea |
| <i>prof. Marius-Florin Zănoagă</i> , Bufta | <i>prof. Corina Negruțiu</i> , Oradea |
| <i>prof. Antoanela Buzescu</i> , Caransebeș | <i>prof. Dumitru Pistrilă</i> , Oravița |
| <i>prof. Delia Dragomir</i> , Caransebeș | <i>prof. Alexandru Farago</i> , Orșova |
| <i>prof. Ana Mandreși</i> , Caransebeș | <i>prof. Luminița Ungureanu</i> , Pașcani |
| <i>prof. Bogdan Heroiu</i> , Câmpulung | <i>prof. Rodica Popovici</i> , Piatra Neamț |
| <i>prof. Ana Maria Getzi</i> , Cluj-Napoca | <i>prof. Maria Lădescu</i> , Râșnov |
| <i>prof. Gheorghe Căzănel</i> , Comănești | <i>prof. Melania Branea</i> , Reghin |
| <i>prof. Livia Kovacs</i> , Covasna | <i>prof. Paula-Maria Dărăban</i> , Reghin |
| <i>prof. Mariana Draga Tătuclu</i> , Drobeta | <i>prof. Gheorghe Dărăban</i> , Reghin |
| <i>prof. Mariana Magdalena Pătuleanu</i> , Drobeta-Turnu Severin | <i>prof. Adreea Vișovan</i> , Reghin |
| <i>prof. Marcela Ionuț</i> , Făgăraș | <i>prof. Claudia Denisia Otea</i> , Roman |
| <i>prof. Corina Răduleț</i> , Făgăraș | <i>prof. Adela Nica</i> , Sebiș |
| <i>prof. Simona Ghizdaru</i> , Făgăraș | <i>prof. Nicolae Papacu</i> , Slobozia |
| <i>prof. Adriana Nicoară</i> , Hațeg | <i>prof. Ioana Aleman</i> , Sibiu |
| <i>prof. Simion Bade</i> , Hunedoara | <i>prof. Adriana Mihălțan</i> , Sibiu |
| <i>prof. Valentina Blendea</i> , Iași | <i>prof. Arhire Felix</i> , Tecuci |
| <i>prof. Gheorghe Blendea</i> , Iași | <i>prof. Karina Preoteșoiu</i> , Timișoara |
| <i>prof. Tamara Calac</i> , Iași | <i>prof. Gheorghe Desculțu</i> , Turnu Măgurele |
| <i>prof. Alexandru Gabriel Mirșanu</i> , Iași | <i>prof. Mădălina Mariana Manole</i> , Videle |
| <i>prof. Andrei Nedelcu</i> , Iași | <i>prof. Cornelia Costache</i> , Zărnești |
| | <i>prof. Doina Mureșan</i> , Zărnești |

ISBN 978-606-9702-32-1

© Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate Editurii TOP PUBLISHING. Nici un capitol și nici o parte din această lucrare nu pot fi tipărite sau multiplicare folosind diferite mijloace, fără permisiunea scrisă a conducerii acestei edituri.

Redactor: *prof. Mădălina Yupari Z. Williams*
Coperta: *Elena Drăgulelei Dumitru*
Grafica: *pictor Nadejda-Luminița Nicolescu*
Tehnoredactare
computerizată: S.C. TABIR S.R.L.

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ



Legi de compoziție

1. Legi de compoziție pe o mulțime. Parte stabilă

Breviar de teorie

Lege de compoziție

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. Se numește *lege de compoziție sau operație algebrică* definită pe M , o aplicație $\varphi : M \times M \rightarrow M$, care asociază fiecărei perechi $(x, y) \in M \times M$, un unic element $\varphi(x, y) \in M$.

Observații:

1. Elementul $\varphi(x, y)$ se numește *compusul* lui x cu y prin legea φ .
2. În general, operația $\varphi(x, y)$ se va desemna printr-un simbol special: $*$, $\circ$, $\top$, $\perp$, $\oplus$, $\odot$ etc. De asemenea, se poate utiliza notația aditivă $(+)$ sau notația multiplicativă $(\cdot)$.

Parte stabilă

Definiție. Fie M o mulțime nevidă și „ $\circ$ ” o lege de compoziție pe M . O submulțime nevidă $H \subseteq M$ se numește *parte stabilă a lui M în raport cu operația „ $\circ$ ”*, dacă pentru orice $x, y \in H$, rezultă că $x \circ y \in H$.

Observații:

1. Numele de „parte stabilă” pentru o submulțime H a lui M în raport cu operația „ $\circ$ ” precizează că dacă $x, y \in H$, atunci și compusul lor $x \circ y$ rămâne în H .
2. Dacă H este o parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”, atunci spunem că $(H, \circ)$ este o *lege de compoziție indusă de legea de compoziție de pe M* .

Clase de resturi modulo n ($\mathbb{Z}_n$)

Definiție. Fie un număr $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, spunem că *a este congruent cu*

b modulo n și scriem $a \equiv b \pmod{n}$, dacă $n \mid (a - b)$ sau dacă $\frac{a-b}{n} \in \mathbb{Z}$.

Altfel spus: *numărul a este congruent cu numărul b modulo n* , dacă și numai dacă dau același rest r , prin împărțire la n :

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow \begin{cases} a = nq_1 + r \\ b = nq_2 + r \end{cases}, \text{ unde } q_1, q_2, r \in \mathbb{Z}, \text{ iar } 0 \leq r < n.$$

• Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in \mathbb{Z}$.

- Restul împărțirii lui a la n se numește *redusul modulo n al numărului a* și se notează $a \pmod{n}$ sau $a(\text{mod } n)$.

- Notăm: $\hat{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{n}\}$.

$\hat{a} = \widehat{a \text{ mod } n}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$, unde $\hat{a}$ se numește *clasa lui a modulo n* .

• Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Mulțimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\}$ se numește *mulțimea claselor de resturi modulo n* , unde $\hat{0} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\hat{1} = \{kn+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\hat{2} = \{kn+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \dots,$$

$$\widehat{n-1} = \{kn+(n-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Pentru k un număr fixat în $\mathbb{Z}$, numerele întregi a și $a+nk$, reprezintă aceeași clasă de resturi: $\hat{a} = \widehat{a+nk}$.

- Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ se definesc următoarele legi de compoziție:

$$,,+": \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b};$$

$$,,\cdot": \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b}.$$

Cum pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, avem $\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow \widehat{a \text{ mod } n} = \widehat{b \text{ mod } n} \Leftrightarrow a(\text{mod } n) = b(\text{mod } n) \Leftrightarrow n \mid (a-b) \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$.

Deci $a \oplus b = (a+b) \text{ mod } n$ și $a \odot b = (ab) \text{ mod } n$.

În concluzie: $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b} = \widehat{a+b}$ și $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \odot b} = \widehat{ab}$, $\forall \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n, n \geq 2$.

• *Suma dintre clasele de resturi $\hat{a}$ și $\hat{b}$ se definește astfel:*

$\hat{a} + \hat{b} = \hat{r}$, unde r reprezintă restul împărțirii sumei $a+b$ la n .

- Dacă $\hat{a} + \hat{b} = \hat{0}$, spunem că $\hat{b}$ este opusa clasei $\hat{a}$ în $\mathbb{Z}_n$ și notăm $\hat{b} = -\hat{a}$.

Se constată că $-\hat{a} = \hat{0} - \hat{a} = \hat{n} - \hat{a} = \widehat{n-a} \Rightarrow -\hat{a} = \widehat{n-a}$.

- Oricare ar fi $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$, atunci $\hat{a} + \hat{b} = \hat{b} + \hat{a}$.

• *Scăderea claselor de resturi $\hat{a}$ și $\hat{b}$ se definește astfel:*

$$\hat{a} - \hat{b} = \hat{a} + (-\hat{b}) = \hat{a} + (\hat{0} - \hat{b}) = \hat{a} + (\hat{n} - \hat{b}) = \widehat{a + n - b}.$$

• Înmulțirea claselor de resturi $\hat{a}$ și $\hat{b}$ se definește astfel:

$\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{r}_1$, unde $\hat{r}_1$ reprezintă restul împărțirii produsului $a \cdot b$ la n .

- Oricare ar fi $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$, atunci $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{b} \cdot \hat{a}$.

- Dacă $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{1}$ și $\hat{a} \neq \hat{0}$, spunem că $\hat{b}$ este inversa clasei $\hat{a}$ și notăm $\hat{b} = \hat{a}^{-1}$.

Rezolvarea unei ecuații elementare: $\hat{a} \cdot x = \hat{b}$

Mai putem scrie $x = \hat{a}^{-1} \cdot \hat{b}$, iar pentru a determina inversa clasei $\hat{a}$,

procedăm astfel: fie $\hat{a}^{-1} = \hat{c} \in \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow ac \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow \frac{ac-1}{n} \in \mathbb{Z}$ și

determinăm numărul întreg c , ca fiind egal, de exemplu, cu α , adică $\hat{a}^{-1} = \hat{\alpha}$.

În concluzie $x = \hat{a}^{-1} \cdot \hat{b} \Rightarrow x = \hat{\alpha} \cdot \hat{b} \Rightarrow x = \widehat{\alpha \cdot b}$.

Tabla unei legi de compoziție

Dacă „ $\circ$ ” este o lege de compoziție pe M , iar mulțimea M este finită, $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, atunci legea poate fi redată printr-un tablou, numit *tabla operației „ $\circ$ ”*, astfel:

$\circ$	x_1	x_2	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n
x_1	$x_1 \circ x_1$	$x_1 \circ x_2$	$\dots$	$x_1 \circ x_j$	$\dots$	$x_1 \circ x_n$
x_2	$x_2 \circ x_1$	$x_2 \circ x_2$	$\dots$	$x_2 \circ x_j$	$\dots$	$x_2 \circ x_n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	$x_i \circ x_1$	$x_i \circ x_2$	$\dots$	$x_i \circ x_j$	$\dots$	$x_i \circ x_n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	$x_n \circ x_1$	$x_n \circ x_2$	$\dots$	$x_n \circ x_j$	$\dots$	$x_n \circ x_n$

În acest tabel, elementul $x_i \circ x_j$ este situat pe linia i și pe coloana j .

Probleme rezolvate

1. Considerăm mulțimea $M = [2, +\infty)$.

a) Să se arate că operația $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, definește pe M , o lege de compoziție.

b) Să se calculeze numerele $a = 2 \circ 3$ și $b = (-1) \circ 4$.

Rezolvare:

a) Pentru a demonstra că legea este o operație algebrică, trebuie să arătăm că pentru orice numere $x \geq 2, y \geq 2$, avem $x \circ y \geq 2$.

Scriem echivalent: $x \circ y \geq 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 \geq 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) \geq 0$, ultima inegalitate fiind evidentă, deoarece $x \geq 2$ și $y \geq 2$.

b) $a = 2 \circ 3 = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 6 = 2$, deci $a = 2$, iar

$b = (-1) \circ 4 = (-1) \cdot 4 - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + 6$, deci $b = -4$.

2. Fie mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și legea „ $\circ$ ” definită astfel:

$$x \circ y = \begin{cases} xy, & \text{dacă } x \leq 2, y \leq 2 \\ x - 1, & \text{dacă } x > 2 \\ y - x, & \text{dacă } x \leq 2, y > 2 \end{cases}.$$

a) Efectuând tabla operației, să se deducă că operația „ $\circ$ ” determină pe M o lege de compoziție.

b) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 2 = 4$ și $1 \circ x = 2$.

Rezolvare:

a) Din tabla operației, prezentată alăturat, deducem că operația „ $\circ$ ” este algebrică pe M .

b) Din tabla operației deducem că:

$x \circ 2 = 4 \Rightarrow x = 2$, iar din $1 \circ x = 2 \Rightarrow x \in \{2, 3\}$.

$\circ$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	3	4
1	0	1	2	2	3
2	0	2	4	1	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	3	3

3. Fie mulțimea $M = [2, 4] \subset \mathbb{R}$ și legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$.

a) Să se arate că M este parte stabilă față de legea „ $\circ$ ”.

b) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 2 = 3, x \in M$ și apoi $3 \circ x = 3, x \in M$.

Rezolvare:

a) Se observă că $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$. Ținând cont că pentru $x \in [2, 4], y \in [2, 4]$, avem că $x - 3 \in [-1, 1]$ și $y \in [-1, 1]$, deducem că $(x - 3)(y - 3) \in [-1, 1]$ și în final că $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3 \in [2, 4]$. În concluzie, mulțimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ față de legea de compoziție „ $\circ$ ”.

b) $x \circ 2 = 3 \Rightarrow 2x - 3x - 3 \cdot 2 + 12 = 3 \Rightarrow -x = -3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$.

$3 \circ x = 3 \Rightarrow 3x - 9 - 3x + 12 = 3 \Rightarrow 3 = 3$, deci ecuația are o infinitate de soluții, adică $S = [2, 4]$.

4. Considerăm mulțimea $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ și legile de compoziție „+” și „·”.

- a) Să se efectueze $\hat{2} + \hat{3}$ și $\hat{2} \cdot \hat{3}$.
 b) Să se rezolve ecuațiile $x + \hat{4} = \hat{1}$ și $\hat{4}x = \hat{1}$.
 c) Să se rezolve ecuația: $\hat{2} \cdot x + \hat{4} = \hat{3}$.
 d) Să se rezolve ecuația $x^2 + x + \hat{3} = \hat{0}$.

Rezolvare:

a) $\hat{2} + \hat{3} = \widehat{2+3} = \hat{5} = \widehat{1 \cdot 5 + 0} = \hat{1} \cdot \hat{5} + \hat{0} = \hat{1} \cdot \hat{0} + \hat{0} = \widehat{1 \cdot 0 + 0} = \hat{0} + \hat{0} = \widehat{0+0} = \hat{0}$.

$\hat{2} \cdot \hat{3} = \widehat{2 \cdot 3} = \hat{6} = \widehat{1 \cdot 5 + 1} = \hat{1}$ (deoarece restul împărțirii lui 6 la 5 este 1).

b) Studiind tabla operației $(\mathbb{Z}_5, +)$, deducem că soluția ecuației $x + \hat{4} = \hat{1}$ este $x = \hat{2}$. Studiind apoi tabla operației $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$, deducem că soluția ecuației $\hat{4}x = \hat{1}$ este $x = \hat{4}$.

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

·	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

c) $\hat{2}x + \hat{4} = \hat{3} \Rightarrow \hat{2}x = \hat{3} - \hat{4} = \widehat{3-4} = \widehat{-1} = \widehat{0-1} = \widehat{5-1} = \hat{4} \Rightarrow \hat{2}x = \hat{4} \Rightarrow x = \hat{2}$.

Altă metodă: $\hat{2}x = \hat{4} \Rightarrow x = \hat{2}^{-1} \cdot \hat{4}$. Calculăm inversa clasei $\hat{2}$ în $\mathbb{Z}_5$: fie

$$\hat{2}^{-1} = \hat{a}, \hat{a} \in \mathbb{Z}_5 \Leftrightarrow 2a \equiv 1 \pmod{5} \Leftrightarrow \frac{2a-1}{5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \equiv 3 \pmod{5}. \text{ Astfel } \hat{2}^{-1} = \hat{3}.$$

Cum $x = \hat{2}^{-1} \cdot \hat{4}$, atunci $x = \hat{3} \cdot \hat{4} = \widehat{3 \cdot 4} = \widehat{12} = \widehat{2 \cdot 5 + 2} = \widehat{2 \cdot 5} + \hat{2} = \hat{2} \cdot \hat{5} + \hat{2} = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} = \hat{0} + \hat{2} = \hat{2}$. În concluzie, ecuația $\hat{2}x = \hat{4}$ are soluția $x = \hat{2}$.

d)

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
x^2	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$
$x^2 + x + \hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{5}$	$\hat{9}$	$\widehat{10}$	$\hat{8}$
$x^2 + x + \hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$

În concluzie, ecuația are soluțiile $\{\hat{1}, \hat{3}\}$.

Probleme propuse

1. Efectuând tabla operației, să se arate că operațiile specificate reprezintă legi de compoziție pe mulțimea $M = \{1, 2, 4, 8, 16\}$.

- a) $x \circ y = \min(x, y)$;
- b) $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$;
- c) $x \circ y = \text{c.m.m.m.c.}(x, y)$.

2. Efectuând tabla operației, să se arate că operațiile specificate reprezintă legi de compoziție pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, în următoarele cazuri:

- a) $x \circ y = \max(x, y)$;
- b) $x \circ y = |x - y|$;
- c) $x \circ y = x$.

3. Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se consideră legea de compoziție „ $\circ$ ” a cărei tablă este reprezentată alăturat.

a) Să se determine următoarele elemente:

$$a = 1 \circ 3, b = 3 \circ 5; c = 4 \circ 2; d = 5 \circ 4.$$

b) Să se rezolve următoarele ecuații:

- i) $x \circ 3 = 1$;
- ii) $2 \circ x = 4$;
- iii) $x \circ 5 = 3$;
- iv) $4 \circ x = 2$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} 3 \circ x = 3 \\ x \circ y = 4 \end{cases}$.

$\circ$	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	2	1	5	4	3
3	3	4	3	5	2
4	1	2	1	2	3
5	5	5	2	3	4

4. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3\}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = |y - x|$.

- a) Să se alcătuiască tabla legii de compoziție.
- b) Să se rezolve ecuațiile: $x \circ 3 = 0$ și $2 \circ x = 1$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} x \circ y = 0 \\ y \circ 1 = 2 \end{cases}$.

5. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definesc următoarele legi de compoziție:

$$x \top y = x + y + 1 \text{ și } x \perp y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - 1.$$

- a) Să se calculeze $8 \top 27$ și $8 \perp 27$.
- b) Să se rezolve ecuația: $x \top 1 = x \perp 27$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} x \top y = 65 \\ x \perp y = 3 \end{cases}$.

6. Să se arate că în fiecare dintre următoarele cazuri, mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$, în raport cu legea de compoziție specificată:

- a) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y - 3$;

- b) $M = \mathbb{N}$, $x \circ y = |x - y|$;
c) $M = [-5, +\infty)$, $x \circ y = xy + 5x + 5y + 20$;
d) $M = (-3, +\infty)$, $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$;
e) $M = (1, +\infty)$, $x \circ y = xy - x - y + 2$;
f) $M = (2, +\infty)$, $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$.

7. Să se arate că în fiecare dintre cazurile următoare, mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$, în raport cu legea de compoziție specificată:

- a) $M = (-1, 1)$, $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$;
b) $M = (0, 1)$, $x \circ y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$;
c) $M = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x \circ y = x^{2\ln y}$;
d) $M = (1, 2) \cup (2, +\infty)$, $x \circ y = (x-1)^{\frac{1}{2} \ln(x-1)}$;
e) $M = (2, +\infty)$, $x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 + x^2 + y^2}$;
f) $M = (\sqrt{2}, +\infty)$, $x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 6}$.

8. Să se arate că în fiecare dintre următoarele cazuri, mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbb{R})$, în raport cu legea de compoziție specificată:

- a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{N} \right\}$, adunarea matricelor;
b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & y \\ 3y & 4x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{N} \right\}$, adunarea matricelor;
c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$, înmulțirea matricelor;
d) $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{R} \text{ și } \det A \neq 0 \right\}$, înmulțirea matricelor.

9. Să se arate că în fiecare dintre următoarele cazuri, mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $M_3(\mathbb{R})$, în raport cu operația de înmulțire a matricelor:

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}; & \text{b) } M &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}; \\ \text{c) } M &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}; & \text{d) } M &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \ln x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x > 0 \right\}. \end{aligned}$$

10. Să se arate că în fiecare dintre următoarele cazuri, mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{C}$, în raport cu operația de înmulțire a numerelor:

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}; & \text{b) } M &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}; \\ \text{c) } M &= \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}; & \text{d) } M &= \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1, n \in \mathbb{N}^*\}; \\ \text{e) } M &= \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = \bar{z}\}; & \text{f) } M &= \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = \bar{z}, n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

11. Să se efectueze în mulțimea claselor de resturi $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \text{a) } \hat{2} + \hat{5} \text{ (în } \mathbb{Z}_7\text{);} & \quad \text{b) } \hat{3} + \hat{2} \text{ (în } \mathbb{Z}_4\text{);} & \quad \text{c) } \hat{5} + \hat{3} \text{ (în } \mathbb{Z}_6\text{);} \\ \text{d) } \hat{3} \cdot \hat{4} \text{ (în } \mathbb{Z}_6\text{);} & \quad \text{e) } \hat{3} \cdot \hat{5} \text{ (în } \mathbb{Z}_7\text{);} & \quad \text{f) } \hat{2} \cdot \hat{4} \text{ (în } \mathbb{Z}_5\text{);} \\ \text{g) } \hat{2} + \hat{3} \cdot \hat{4} \text{ (în } \mathbb{Z}_5\text{);} & \quad \text{h) } \hat{2} \cdot \hat{3} + \hat{1} \text{ (în } \mathbb{Z}_4\text{);} & \quad \text{i) } \hat{4}^2 + \hat{5}^2 \text{ (în } \mathbb{Z}_{10}\text{);} \\ \text{j) } \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{4} \cdot \hat{5} \text{ (în } \mathbb{Z}_8\text{);} & \quad \text{k) } \hat{2}^3 + \hat{3}^4 + \hat{4}^5 \text{ (în } \mathbb{Z}_9\text{).} \end{aligned}$$

12. Să se rezolve următoarele ecuații în mulțimea claselor de resturi $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$:

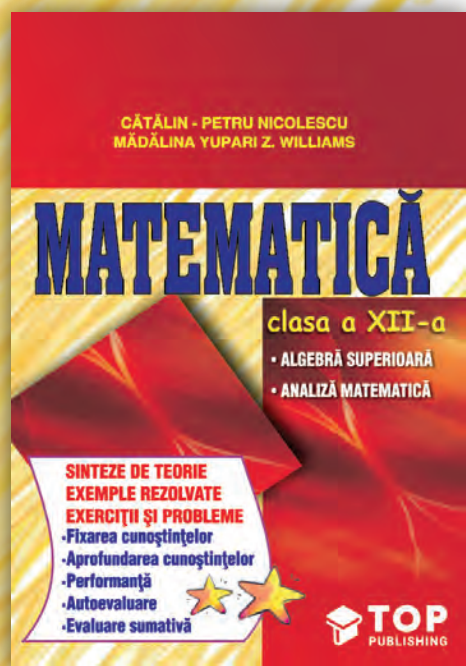
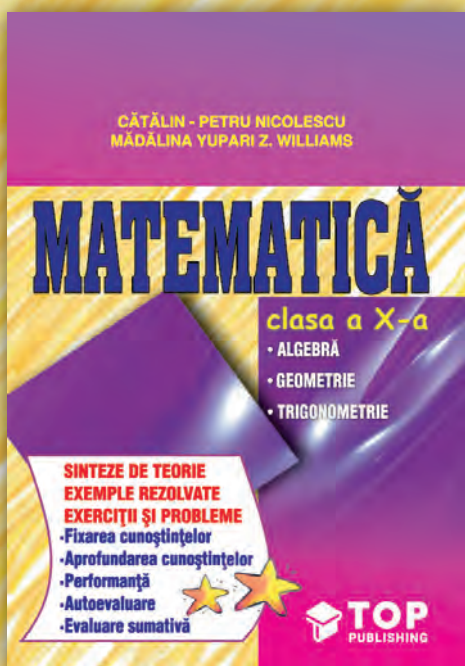
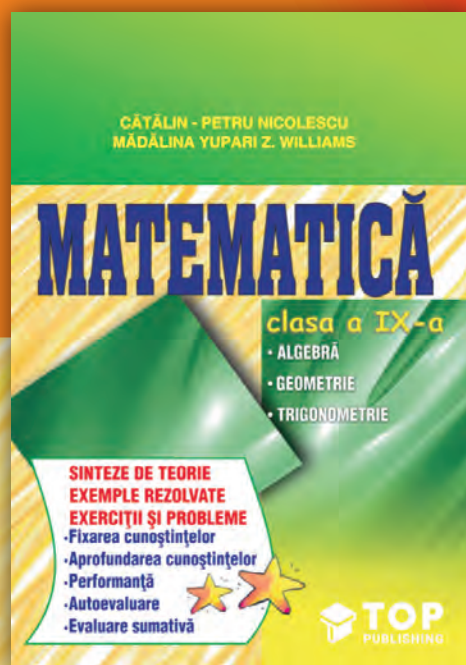
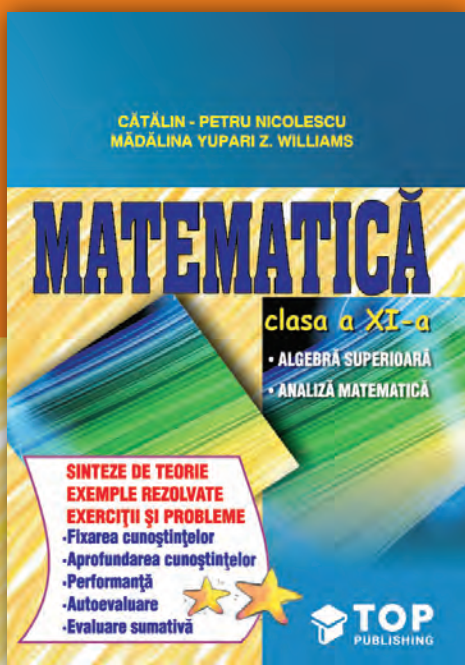
$$\begin{aligned} \text{a) } x + \hat{4} = \hat{5} \text{ (în } \mathbb{Z}_7\text{);} & \quad \text{b) } x + \hat{4} = \hat{3} \text{ (în } \mathbb{Z}_6\text{);} & \quad \text{c) } \hat{2} + x = \hat{1} \text{ (în } \mathbb{Z}_9\text{);} \\ \text{d) } x - \hat{2} = \hat{3} \text{ (în } \mathbb{Z}_5\text{);} & \quad \text{e) } \hat{3} - x = \hat{6} \text{ (în } \mathbb{Z}_{10}\text{);} & \quad \text{f) } x - \hat{7} = \hat{5} \text{ (în } \mathbb{Z}_{11}\text{).} \end{aligned}$$

13. Să se rezolve următoarele ecuații în mulțimea claselor de resturi $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \text{a) } \hat{2}x = \hat{1} \text{ (în } \mathbb{Z}_5\text{);} & \quad \text{b) } \hat{2}x = \hat{0} \text{ (în } \mathbb{Z}_6\text{);} & \quad \text{c) } \hat{3}x = \hat{2} \text{ (în } \mathbb{Z}_7\text{);} \\ \text{d) } x^2 = \hat{1} \text{ (în } \mathbb{Z}_3\text{);} & \quad \text{e) } x^3 = \hat{2} \text{ (în } \mathbb{Z}_5\text{);} & \quad \text{f) } x^4 = \hat{0} \text{ (în } \mathbb{Z}_4\text{).} \end{aligned}$$

14. Să se rezolve următoarele ecuații în mulțimea claselor de resturi $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \text{a) } \hat{2}x + \hat{3} = \hat{0} \text{ (în } \mathbb{Z}_5\text{);} & \quad \text{b) } \hat{3}x + \hat{1} = \hat{4} \text{ (în } \mathbb{Z}_5\text{);} & \quad \text{c) } \hat{2}x + \hat{3} = \hat{6} \text{ (în } \mathbb{Z}_7\text{);} \\ \text{d) } x^2 + x = \hat{0} \text{ (în } \mathbb{Z}_3\text{);} & \quad \text{e) } x^2 + \hat{1} = \hat{0} \text{ (în } \mathbb{Z}_2\text{);} & \quad \text{f) } \hat{2}x^2 + \hat{3}x = \hat{1} \text{ (în } \mathbb{Z}_4\text{);} \\ \text{g) } \hat{3}x^2 + \hat{2}x + \hat{4} = \hat{0} \text{ (în } \mathbb{Z}_8\text{);} & \quad \text{h) } \hat{2}x^3 + \hat{3}x^2 + \hat{4}x + \hat{1} = \hat{0} \text{ (în } \mathbb{Z}_5\text{).} \end{aligned}$$



Pentru comenzi online și pentru
a vizualiza lista completă a
titlurilor publicate de editura
Top Publishing vă așteptăm pe
www.librariaonline.ro

ISBN 978-606-9702-32-1



9 786069 702321