

CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA YUPARI Z. WILLIAMS

MATEMATICĂ

clasa a X-a

ALGEBRĂ
GEOMETRIE
TRIGONOMETRIE

SINTEZE DE TEORIE
EXEMPLE REZOLVATE
EXERCITII ȘI PROBLEME

- **Fixarea cunoștințelor**
- **Aprofundarea cunoștințelor**
- **Performanță**
- **Autoevaluare**
- **Evaluare sumativă**

Ediția a patra revizuită și adăugită

EDITURA TOP PUBLISHING
BUCUREȘTI, 2023

Prezentul auxiliar didactic este aprobat pentru utilizare în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018

Referenți științifici:

- prof. Ioana-Irinel Chiran*, București
prof. Nicușor Udrea, București
prof. Marian Voinea, București
prof. Claudia Brăduceanu, București
prof. Carmen Ianculescu, București
prof. Elena-Violeta Rădulescu, Buc.
prof. Adrian Manu, București
prof. Delia Stănilă, Alba Iulia
prof. Petru-Dumitru Stănilă, Alba Iulia
prof. Margareta Vecerzan, Agnita
prof. Costică Lupu, Bacău
prof. Delia Goina, Bistrița
prof. Gheorghe Retegan, Bistrița
prof. Daria-Maria Stoleru, Bistrița
prof. Anca-Daniela Petrescu, Buftea
prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș
prof. Delia Dragomir, Caransebeș
prof. Ana Mandreși, Caransebeș
prof. Bogdan Heroiu, Câmpulung
prof. Ana Maria Getzi, Cluj-Napoca
prof. Gheorghe Căzănel, Comănești
prof. Mariana Draga Tătuțu, Drobeta
prof. Mariana-Magdalena Pătuleanu, Drobeta-Turnu Severin
prof. Adriana Nicoară, Hațeg
prof. Simion Bade, Hunedoara
prof. Valentina Blendea, Iași
prof. Gheorghe Blendea, Iași
prof. Alexandru Gabriel Mîrșanu, Iași
prof. Andrei Nedelcu, Iași
prof. Laura Stanciu, Iași
prof. Sanda Nițoiu, Jimbolia
- prof. Aurica-Viuța Fazakaș*, Marghita
prof. Rodica Ursan, Marghita
prof. Tatiana Voicu, Marghita
prof. Mirela-Maria Maior, Mediaș
prof. Eugenia Munteanu, Mediaș
prof. Alexandru Nicula, Mediaș
prof. Anca-Nicoleta Oprea, Mediaș
prof. Ludovica Lazăr, Năsăud
prof. Adriana Mihaela Grec, Oradea
prof. Crăciun Negruț, Oradea
prof. Corina Negruțiu, Oradea
prof. Dumitru Pistrilă, Oravița
prof. Alexandru Farago, Orșova
prof. Luminița Ungureanu, Pașcani
prof. Carmen Corfu, Piatra Neamț
prof. Rodica Popovici, Piatra Neamț
prof. Felicia Șipețean, Prundu Bîrgăului
prof. Paula-Maria Dărăban, Reghin
prof. Gheorghe Dărăban, Reghin
prof. Adreea Vișovan, Reghin
prof. Claudia Denisia Otea, Roman
prof. Adela Nica, Sebiș
prof. Mirela Vasile, Slatina
prof. Nicolae Papacu, Slobozia
prof. Ioana Aleman, Sibiu
prof. Adriana Mihălțan, Sibiu
prof. Iulian Indre, Târgu Lăpuș
prof. Arhire Felix, Tecuci
prof. Gheorghe Desculțu, Turnu Măgurele
prof. Mădălina-Mariana Manole, Videle
prof. Cornelia Costache, Zărnești
prof. Doina Mureșan, Zărnești

ISBN 978-606-9702-31-4

© Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate Editurii TOP PUBLISHING. Nici un capitol și nici o parte din această lucrare nu pot fi tipărite sau multiplicare folosind diferite mijloace, fără permisiunea scrisă a conducerii acestei edituri.

Redactor: *prof. Mădălina Yupari Z. Williams*
Coperta: *Elena Drăgulelei Dumitru*
Grafica: *pictor Nadejda-Luminița Nicolescu*
Tehnoredactare
computerizată: S.C. TABIR S.R.L.

CUPRINS

	E*	R**
Capitolul I. PUTERI ȘI RADICALI		
1. Radicalul de ordinul n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$		
Breviar de teorie	6	
Probleme propuse	7	358
2. Puteri cu exponent rațional. Puteri cu exponent real		
Breviar de teorie	12	
Probleme propuse	14	360
3. Logaritmi		
Breviar de teorie	18	
Probleme propuse	20	361
Teste de evaluare	25	365
Capitolul II. NUMERE COMPLEXE		
1. Forma algebrică a unui număr complex		
Breviar de teorie	28	
Probleme propuse	30	367
2. Rezolvarea în \mathbb{C} a ecuației de gradul al doilea, cu coeficienți reali.		
Ecuații bipătrate		
Breviar de teorie	34	
Probleme propuse	35	370
3. Forma trigonometrică a unui număr complex.		
Aplicații ale numerelor complexe în geometrie		
Breviar de teorie	39	
Probleme propuse	50	372
Teste de evaluare	54	376
Capitolul III. FUNCȚII INJECTIVE. FUNCȚII SURJECTIVE. FUNCȚII BIJECTIVE. FUNCȚII INVERSABILE		
1. Funcții injective		
Breviar de teorie	56	
Probleme propuse	62	377
2. Funcții surjective		
Breviar de teorie	65	
Probleme propuse	70	379
3. Funcții bijective. Funcții inversabile		
Breviar de teorie	74	
Probleme propuse	80	381
Addendă	86	
Teste de evaluare	89	385
Capitolul IV. FUNCȚII. ECUAȚII. INECUAȚII		
1. Funcția putere cu exponent natural. Funcția radical		
Breviar de teorie	91	
Probleme propuse	93	387
2. Funcția exponențială. Funcția logaritmică		
Breviar de teorie	96	
Probleme propuse	99	390

* E – enunțuri

** R – răspunsuri, rezolvări

3. Funcții trigonometrice directe		
Breviar de teorie	102	
Probleme propuse	106	393
4. Funcții trigonometrice inverse		
Breviar de teorie	109	
Probleme propuse	119	395
5. Ecuații iraționale. Inecuații iraționale		
Breviar de teorie	123	
Probleme propuse	125	399
6. Ecuații exponențiale. Sisteme de ecuații exponențiale		
Breviar de teorie	128	
Probleme propuse	130	403
7. Ecuații logaritmice. Sisteme de ecuații logaritmice		
Breviar de teorie	134	
Probleme propuse	136	406
8. Inecuații exponențiale. Inecuații logaritmice		
Breviar de teorie	141	
Probleme propuse	144	409
9. Ecuații trigonometrice. Inecuații trigonometrice		
Breviar de teorie	148	
A. Ecuații trigonometrice fundamentale	148	
A.1. Ecuații trigonometrice fundamentale cu argument simplu	148	
1° $\sin x = a$	148	
2° $\cos x = a$	150	
3° $\operatorname{tg} x = a$	152	
4° $\operatorname{ctg} x = a$	153	
A.2. Ecuații trigonometrice fundamentale cu argument compus	154	
B. Ecuații trigonometrice elementare	155	
C. Ecuații trigonometrice reductibile la ecuații algebrice	159	
D. Ecuații trigonometrice liniare	162	
E. Ecuații trigonometrice omogene	166	
F. Ecuații simetrice în sinus și cosinus de același argument	168	
G. Ecuații care se rezolvă prin transformarea sumei în produs sau invers	170	
H. Ecuații trigonometrice care se rezolvă prin mulțimea de imagini	171	
I. Ecuații trigonometrice cu arcfuncții	172	
J. Ecuații trigonometrice cu parametru real	174	
INECUAȚII TRIGONOMETRICE		
A. Inecuații de forma: $\sin x \geq a$; $\sin x > a$; $\sin x < a$; $\sin x \leq a$	179	
B. Inecuații de forma: $\cos x \geq a$; $\cos x > a$; $\cos x < a$; $\cos x \leq a$	184	
C. Inecuații de forma: $\operatorname{tg} x \geq a$; $\operatorname{tg} x > a$; $\operatorname{tg} x < a$; $\operatorname{tg} x \leq a$	186	
D. Inecuații de forma: $\operatorname{ctg} x \geq a$; $\operatorname{ctg} x > a$; $\operatorname{ctg} x < a$; $\operatorname{ctg} x \leq a$	187	
E. Inecuații trigonometrice reductibile la inecuații algebrice	189	
F. Inecuații care conțin produse sau rapoarte de expresii trigonometrice ..	190	
Probleme propuse	194	412
<i>Teste de evaluare</i>	198	417

Capitolul V. METODE DE NUMĂRARE.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

1. Probleme de numărare		
Breviar de teorie	203	
Probleme propuse	209	420

	E	R
2. Permutările elementelor unei mulțimi finite cu n elemente		
Breviar de teorie	211	
Probleme propuse	213	421
3. Aranjamente de n elemente luate câte k elemente.		
Combinări de n elemente luate câte k elemente		
Breviar de teorie	215	
Probleme propuse	220	422
4. Binomul lui Newton		
Breviar de teorie	223	
Probleme propuse	226	423
<i>Teste de evaluare</i>	230	427

Capitolul VI. MATEMATICI FINANCIARE

1. Procente. Dobânzi. Taxa pe valoarea adăugată (T.V.A.)		
Breviar de teorie	232	
Probleme propuse	235	428
2. Elemente de statistică matematică		
Breviar de teorie	239	
Probleme propuse	243	429
3. Elemente de calculul probabilităților		
Breviar de teorie	247	
Probleme propuse	272	432
<i>Teste de evaluare</i>	277	434

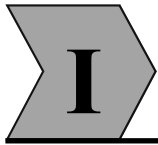
Capitolul VII. GEOMETRIE

1. Reper cartezian în plan. Distanța dintre două puncte.		
Coordonatele mijlocului unui segment		
Breviar de teorie	279	
Probleme propuse	281	435
2. Coordonatele unui vector într-un reper cartezian		
Breviar de teorie	284	
Probleme propuse	290	437
3. Ecuația dreptei într-un reper cartezian		
Breviar de teorie	294	
Probleme propuse	306	438
4. Drepte paralele. Drepte perpendiculare. Unghiul dintre două drepte		
Breviar de teorie.....	309	
Probleme propuse	311	440
5. Distanțe într-un reper cartezian. Arii într-un reper cartezian		
Breviar de teorie	314	
Probleme propuse	320	443
<i>Teste de evaluare</i>	322	445

Capitolul VIII. PROBLEME ȘI TESTE RECAPITULATIVE

1. Probleme recapitulative de calcul vectorial	327	448
2. Probleme recapitulative de geometrie într-un reper cartezian din plan	334	459
3. Teste recapitulative de trigonometrie.....	339	466

Bibliografie selectivă	478
-------------------------------------	-----



Puteri și radicali

1. Radicalul de ordinul n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Breviar de teorie

Definiție: Fie numerele $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Numim *radical de ordin n* al numărului real pozitiv a , unicul număr real pozitiv t , a cărui putere de exponent n este numărul a (foarte apropiat de a , mai mic sau egal cu a).

Observații:

1) Radicalul de ordin n al numărului real pozitiv a se notează $\sqrt[n]{a}$ și avem echivalența: $\sqrt[n]{a} = t \Leftrightarrow t^n = a$, unde $t \geq 0$.

2) Dacă $n = 2$, atunci notăm \sqrt{a} în loc de $\sqrt[2]{a}$.

Definiție: Fie numerele $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n impar și $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$. Numim *radical de ordin n* (n impar) al numărului real negativ a , unicul număr real negativ t a cărui putere de exponent n este numărul a (foarte apropiat de a , mai mic sau egal cu a).

$\sqrt[n]{a} = t \Leftrightarrow t^n = a$, unde $t < 0$.

Proprietățile radicalilor

Fie numerele $m, n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \geq 2$ și $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b > 0$.

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt[m \cdot n]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} & 2) \sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b} & 3) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\ 4) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} & 5) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} & 6) m \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{m^n a} \end{array}$$

Formulele radicalilor compuși (suprapuși)

Dacă $a, b \in [0, +\infty)$, $a^2 \geq b$ și $c = \sqrt{a^2 - b}$, atunci sunt adevărate relațiile și avem echivalența:

$$1) \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}} \quad 2) \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Probleme rezolvate

1. Ordonăți crescător numerele: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{4}$, $\sqrt[12]{60}$.

Rezolvare: Folosim formula $\sqrt[m]{x} = \sqrt[mn]{x^n}$, unde $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Se are în vedere că c.m.m.m.c. (2, 3, 4, 6, 12) = 12.

Avem: $\sqrt{2} = \sqrt[12]{64}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{81}$, $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$, $\sqrt[6]{4} = \sqrt[12]{16}$.

Rezultă: $\sqrt[6]{4}$, $\sqrt[12]{60}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$.

2. Determinați numărul $x \in (0, +\infty)$ care verifică egalitatea: $\sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{x}}$.

Rezolvare: Avem $x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{x\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$.

$$2\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8x}; \sqrt[3]{2\sqrt[3]{x}} = \sqrt[9]{8x} = (8x)^{\frac{1}{9}}.$$

Rezultă că: $x^{\frac{3}{4}} = 8^{\frac{1}{9}} \cdot x^{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow x^{\frac{3}{4} - \frac{1}{9}} = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x^{\frac{23}{36}} = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{36}{23}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{12}{23}}$.

3. Fie $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ și $x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Calculați $p(x_0)$.

Rezolvare: Cu ajutorul formulei $(a-1)^3$, $p(x)$ se mai poate scrie:

$p(x) = (x-1)^3 - 6x$. Astfel putem calcula:

$$p(x_0) = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 - 6 - 6\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{4} = 2 + 4 + 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} - 6 - 6\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{4} = 0.$$

4. Demonstrați că există $x \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$.

Rezolvare: Cu ajutorul formulei $(a+1)^3$, membrul drept al ecuației se mai poate scrie: $2x^3 + (x+1)^3 = 0$. Aplicăm formula $a^3 + b^3$ și obținem:

$$(\sqrt[3]{2}x + x + 1)(a^2 + b^2 - ab) = 0, \text{ unde } a = \sqrt[3]{2}x, b = x + 1 \text{ și } a^2 + b^2 - ab \neq 0.$$

Rezultă că $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1}$.

Probleme propuse

1. Calculați valorile următorilor radicali:

- a) $\sqrt{9}$; b) $\sqrt{196}$; c) $\sqrt[3]{8}$; d) $\sqrt[3]{216}$;
e) $\sqrt[4]{81}$; f) $\sqrt[4]{625}$; g) $\sqrt[5]{1}$; h) $\sqrt[5]{100000}$.

2. Calculați valorile următorilor radicali:

- a) $\sqrt[3]{-8}$; b) $\sqrt[3]{-343}$; c) $\sqrt[5]{-32}$; d) $\sqrt[5]{-243}$;
e) $\sqrt[7]{-1}$; f) $\sqrt[7]{-10000000}$; g) $\sqrt[9]{-512}$; h) $\sqrt[9]{-0,000000001}$.

3. Stabiliți valorile următorilor radicali:

- a) $\sqrt{2^{100}}$; b) $\sqrt{3^{40}}$; c) $\sqrt[3]{2^{60}}$; d) $\sqrt[3]{5^{21}}$;
 e) $\sqrt[4]{7^{100}}$; f) $\sqrt[4]{11^{28}}$; g) $\sqrt[6]{7^{600}}$; h) $\sqrt[6]{10^{420}}$;
 i) $\sqrt[3]{(-2)^{51}}$; j) $\sqrt[5]{(-3)^{1005}}$; k) $\sqrt[7]{(-5)^{707}}$; l) $\sqrt[9]{(-9)^{99}}$;
 m) $\sqrt[4]{(-2)^{24}}$; n) $\sqrt[6]{(-3)^{78}}$; o) $\sqrt[8]{(-5)^{1000}}$; p) $\sqrt[10]{(-6)^{150}}$.

4. Calculați:

- a) $\sqrt{36} + 2 \cdot \sqrt{0} - 3\sqrt{16}$; b) $\sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{-27} + 5\sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{1000}$;
 c) $3\sqrt[4]{16} + 2\sqrt[4]{625} - 5\sqrt[4]{10000}$; d) $\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} + \sqrt[4]{\frac{1}{16}} + \sqrt[5]{\frac{243}{32}}$;
 e) $\sqrt[3]{0,000001} \cdot \sqrt[4]{5^8} \cdot \sqrt{16}$; f) $\frac{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[5]{32}}{\sqrt[6]{4096} \cdot \sqrt[4]{81}}$.

5. Determinați partea întreagă a următoarelor numere reale:

- a) $\sqrt{11}$; b) $\sqrt{83}$; c) $\sqrt[3]{26}$; d) $\sqrt[3]{28}$;
 e) $\sqrt[4]{14}$; f) $\sqrt[4]{24}$; g) $\sqrt[3]{-11}$; h) $\sqrt[3]{-32}$;
 i) $\sqrt[5]{-25}$; j) $\sqrt[5]{-40}$; k) $\sqrt[6]{1000}$; l) $\sqrt[6]{2000}$.

6. Determinați partea întreagă a numerelor reale:

- a) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;
 b) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}$, $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}$;
 c) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{2003 \text{ radicali}}$, $\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots+\sqrt[3]{6}}}}_{100 \text{ radicali}}$.

7. Pentru ce valori ale numărului $x \in \mathbb{R}$, au loc egalitățile?

- a) $\sqrt{x^2} = x$; b) $\sqrt{x^2} = -x$; c) $\sqrt[3]{x^3} = x$; d) $\sqrt[3]{x^3} = -x$;
 e) $\sqrt[4]{x^4} = x$; f) $\sqrt[4]{x^4} = -x$; g) $\sqrt[6]{(x+1)^6} = x+1$; h) $\sqrt[6]{(x+1)^6} = -x-1$;
 i) $\sqrt[4]{(x-1)^4} + \sqrt[3]{x^3} = 2x-1$; j) $\sqrt[6]{(x-1)^6} + \sqrt[5]{x^5} = 1$.

8. Pentru ce valori ale numărului $x \in \mathbb{R}$, sunt definite următoarele expresii?

- a) $\sqrt{x^2 - 3x}$; b) $\sqrt{-x^2 + 3x - 2}$; c) $\sqrt[4]{2x - 1}$;
 d) $\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$; e) $\sqrt[3]{x^2 + x - 2}$; f) $\sqrt[3]{\frac{x+2}{x^2 - 4x + 3}}$;
 g) $\sqrt[5]{\frac{1}{x-1}}$; h) $\sqrt[6]{x^2 - x + 1}$; i) $\sqrt[8]{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}}$;