Marius Perianu
Mircea Fianu
Dana Heuberger

# Matematică

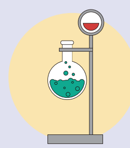
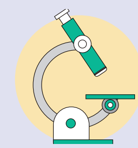
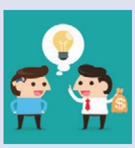
## Clasa a VIII-a

## I

art
educațional

## Pictograme utilizate

Prin pictograme specifice domeniilor de mai jos sunt indicate **problemele cu caracter interdisciplinar**.

| | | | |
|---|---|---|---|
|  Fizică |  Chimie |  Administrație publică |  Genetică |
|  Comerț |  Marketing |  Turism |  Artizanat |


Pentru a facilita interactivitatea, problemele care pot fi lucrate pe grupe de elevi sunt marcate prin **Activitate pe echipe**.


Prin **Activitate online** sunt marcate problemele care pot fi rezolvate cu ușurință în interacțiunea profesorului cu elevii prin intermediul internetului.

# Cuprins

## Competențe generale

**1.** Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

**2.** Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

**3.** Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

**4.** Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

**5.** Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

**6.** Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

## Competențe specifice

1.1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime

1.2. Identificarea componentelor unei expresii algebrice

1.4. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date

2.1. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei

2.2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere

2.4. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date

3.1. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în $\mathbb{R}$

3.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor

3.4. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analizarea pozițiilor relative ale dreptelor și planelor

4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații

4.2. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric

4.4. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice

5.1. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații

5.2. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric

5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice

6.1. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații

6.2. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

6.4. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale

# Algebră



# I

# Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

# I.1 Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

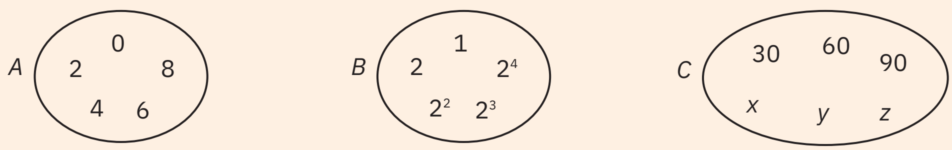
În clasele anterioare am considerat, fără a putea da o definiție riguroasă, că o *mulțime* este o colecție bine definită de obiecte distincte (numite elemente), considerată ca un întreg.

Mulțimile se notează, de regulă, cu litere mari ale alfabetului latin (*A*, *B*, *M*, *N* etc.), iar elementele se notează cu litere mici, simboluri, numere etc.

## Moduri de definire a mulțimilor

**a sintetic: prin enumerarea (listarea) elementelor între acolade sau prin diagrame Venn-Euler**

**Exemple.** **a** $A=\{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4\}$, $C=\{30, 60, 90, x, y, z\}$.




**b** *D* este mulțimea cifrelor în baza 10: $D=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

**c** *S* este mulțimea culorilor de pe steagul României: $S=\{$roșu, galben, albastru$\}$.

**b analitic: prin enunțarea unei proprietăți comune elementelor acelei mulțimi**

Dacă elementele unei mulțimi *M* au o proprietate comună, notată cu *p*, specifică lor și numai lor, atunci mulțimea *M* se poate defini și astfel:

$$M=\{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}.$$

Citim: *M* este mulțimea formată din elementele *x* care au proprietatea *p*.

**Exemple.** Mulțimile *A*, *B*, *S* de mai sus se pot reprezenta astfel:

$A=\{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$; $B=\{2^k \mid k\in\mathbb{N}, k\le 4\}$; $S=\{c \mid c \text{ este o culoare a steagului României}\}$.

## Observații

1 Pentru mulțimile cu un număr mare de elemente, scrierea întregii liste de elemente poate deveni nepracticabilă. De aceea, vom folosi o listă abreviată, indicată explicit prin simbolul ... (trei puncte), unde elementele specificate urmează un anumit șablon (un model, o schemă).
**Exemplu.** Mulțimea *E* a primelor o sută de numere naturale nenule se poate scrie:

$$E=\{1, 2, 3, ..., 100\}.$$

2 Pentru definirea unei mulțimi se pot utiliza și două sau mai multe proprietăți pe care le verifică elementele sale, separate prin virgulă sau prin conjuncția „și“.
**Exemplu.** Mulțimea $P=\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ se poate scrie sub una dintre formele:

$$P=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x \text{ este număr par}, x\le 12\} \quad \text{sau} \quad P=\{x \mid x=2k, k\in\mathbb{N}, k\le 6\}.$$

3 Dacă elementele unei mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor sale aparțin unui domeniu dat (altfel spus, mulțimea dată este submulțime a unei mulțimi definite anterior), putem indica acest lucru înainte de bara verticală.
**Exemplu.** Mulțimea $E=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x\le 100\}$ a numerelor naturale cel mult egale cu 100 se scrie mai simplu $E=\{x\in\mathbb{N} \mid x\le 100\}$.

4 Pentru simplificarea scrierii, dacă elementele se pot determina printr-o formulă de calcul (au o formă comună), această formulă (proprietatea comună) se poate scrie înainte de bara verticală.
**Exemplu.** Mulțimea $T=\{x \mid x=8k+3, k\in\mathbb{N}\}$ a numerelor naturale care dau restul 3 la împărțirea cu 8 (adică mulțimea numerelor de forma $8k+3$, unde $k\in\mathbb{N}$) se notează simplificat $T=\{8k+3 \mid k\in\mathbb{N}\}$.

**5** Pentru mulțimile infinite, este mai avantajoasă scrierea acestora prin indicarea unei forme comune a elementelor.
Astfel, mulțimea multiplilor întregi ai unui număr natural nenul $n$ se scrie: $M_n = \left\{ kn \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Mulțimea numerelor raționale se scrie $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{Z},\, b \geq 1 \right\}$ sau $\mathbb{Q} = \left\{ \pm\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

## Exersare

**1** Fie mulțimea $M = \left\{ -4,(7)\,;\,0\,;\,-2\sqrt{3}\,;\,\frac{\pi}{2};\,-\frac{8}{4};\,\sqrt{\frac{1}{9}}\,;\,2-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{5}\,;\,-\frac{\pi}{3};\,\frac{\sqrt{9}}{3};\,\sqrt{\frac{75}{12}} \right\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

**a** $A = \left\{ x \in M \,\middle|\, x \in \mathbb{N} \right\}$; **b** $B = \left\{ x \in M \,\middle|\, x \in \mathbb{Z} \right\}$; **c** $C = \left\{ x \in M \,\middle|\, x \in \mathbb{Q} \right\}$;
**d** $D = \left\{ x \in M \,\middle|\, x \notin \mathbb{Q} \right\}$; **e** $E = \left\{ x \in M \,\middle|\, x \geq 0 \right\}$; **f** $F = \left\{ x \in M \,\middle|\, 0 < x < 1 \right\}$;
**g** $G = \left\{ x \in M \,\middle|\, x \geq \sqrt{5} \right\}$; **h** $H = \left\{ x \in M \,\middle|\, x > 10 \right\}$; **i** $I = \left\{ x \in M \,\middle|\, x < -2 \right\}$.

Activitate online

**2** Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

**a** $P_1$: $\sqrt{2} \in \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 < x \leq 2 \right\}$; **b** $P_2$: $652 \in \left\{ x \,\middle|\, x = k^2, k \in \mathbb{N} \right\}$;
**c** $P_3$: $-8 \in \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, |x| \leq 8 \right\}$; **d** $P_4$: $\sqrt{18} \notin \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 3 < x < 4 \right\}$;
**e** $P_5$: $256 \notin \left\{ x \,\middle|\, x = k^2, k \in \mathbb{Z} \right\}$; **f** $P_6$: $-\pi \notin \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, |x| > 3 \right\}$.

Activitate online

**3** Se consideră mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, x < 7 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, 5 \leq x < 10 \right\}$ și $C = \left\{ 3,6,9,12,15 \right\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

**a** $P_1$: $\left\{ 0,1,2,3 \right\} \subset A$; **b** $P_2$: $A \subset B$; **c** $P_3$: $\left\{ 3x \,\middle|\, x \in A \right\} \subset C$;
**d** $P_4$: $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, 32 \leq 2^x < 1024 \right\}$; **e** $P_5$: $C \subset \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, x \,\vdots\, 3 \right\}$; **f** $P_6$: $A \subset \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x+1 \leq 13 \right\}$.

Activitate online

**4** Pentru fiecare dintre mulțimile următoare, definite printr-o proprietate comună a elementelor, stabiliți care dintre reprezentările prin enumerarea elementelor este corectă:

$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, 10 < 3^x \leq 729 \right\}$; $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, 25 < x^2 \leq 121 \right\}$; $C = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, 2^x = 4 \text{ sau } 4^x = 64 \right\}$;
$D = \left\{ 7k-4 \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, 3 < k \leq 8 \right\}$; $E = \left\{ \overline{xy} \in \mathbb{N} \,\middle|\, \overline{xy} \,\vdots\, 3,\ x \,\vdots\, 4 \right\}$; $F = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 17 < 4x-10 \leq 34 \right\}$.

**a** **A** $A = \left\{ 2,3,4,5,6 \right\}$; **B** $A = \left\{ 1,2,3,4,5,6 \right\}$; **C** $A = \left\{ 3,4,5,6 \right\}$.
**b** **A** $B = \left\{ 5,6,7,8,9,10,11 \right\}$; **B** $B = \left\{ 6,7,8,9,10,11 \right\}$; **C** $B = \left\{ 5,7,9,11,13 \right\}$.
**c** **A** $C = \varnothing$; **B** $C = \left\{ 0,1,2,3 \right\}$; **C** $C = \left\{ 2,3 \right\}$.
**d** **A** $D = \left\{ 24,31,38,45,52 \right\}$; **B** $D = \left\{ 24,31,38,45 \right\}$; **C** $D = \left\{ 17,24,31,38,45,52 \right\}$.
**e** **A** $E = \left\{ 42,48,84 \right\}$; **B** $E = \left\{ 42,48,60,66,84 \right\}$; **C** $E = \left\{ 42,45,48,81,84,87 \right\}$.
**f** **A** $F = \left\{ 8,9,10,11 \right\}$; **B** $F = \left\{ 7,8,9,10,11 \right\}$; **C** $F = \left\{ 6,7,8,9,10 \right\}$.

Activitate online

**5** Pentru fiecare dintre mulțimile de mai jos, definite prin enumerarea elementelor, stabiliți care dintre reprezentările folosind o proprietate comună a elementelor este corectă:

$A = \left\{ 0,6,12,18,\ldots,72 \right\}$; $B = \left\{ -9,-3,-1,1,3,9 \right\}$; $C = \left\{ 0,3,6,9,12,15,\ldots \right\}$;
$D = \left\{ 1,6,11,16,21,26,\ldots \right\}$; $E = \left\{ -3,-2,-1,0,1,2,3 \right\}$; $F = \left\{ -2,-1,0,1,2,3,4,5,6,\ldots \right\}$.

**a** **A** $A = \left\{ 6k \,\middle|\, 0 \leq k \leq 12 \right\}$; **B** $A = \left\{ 6k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, k \leq 12 \right\}$; **C** $A = \left\{ 6k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, k < 13 \right\}$.
**b** **A** $B = \left\{ \pm 3^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, k < 2 \right\}$; **B** $B = \left\{ 3k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 2 \right\}$; **C** $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 9 \,\vdots\, x \right\}$.

**c** A $C=\{3k \mid k\in\mathbb{Z}, k\geq 0\}$; B $C=\{3k \mid k\in\mathbb{Q}, k\geq 0\}$; C $C=\{3k \mid k\in\mathbb{N}, k\leq 5\}$.

**d** A $D=\{5k+1 \mid k\in\mathbb{N}, k\leq 5\}$; B $D=\{5k-4 \mid k\in\mathbb{N}^*\}$; C $D=\{5k+1 \mid k\in\mathbb{N}^*\}$.

**e** A $E=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|<3\}$; B $E=\{x\in\mathbb{Z} \mid 2^{x+3}\leq 64\}$; C $E=\{x\in\mathbb{Z} \mid 2<2x+9\leq 15\}$.

**f** A $F=\{x-2 \mid x\in\mathbb{N}^*\}$; B $F=\{x\in\mathbb{Z} \mid 4\leq 2^{x+4}\}$; C $F=\{x\in\mathbb{Q} \mid -5x-13<2\}$.

**6** Scrieți următoarele mulțimi indicând o proprietate comună a elementelor:

**a** mulțimea numerelor naturale impare cuprinse între 17 și 28;

**b** mulțimea numerelor naturale mai mici decât 38, divizibile cu 3;

**c** mulțimea pătratelor perfecte mai mici decât 225 și mai mari decât 100;

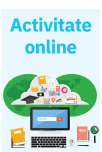
**d** mulțimea tuturor cuburilor perfecte cuprinse între 7 și 130.

**7** **a** Se consideră mulțimile $A=\{2n+7 \mid n\in\mathbb{N}\}$ și $B=\{3n+4 \mid n\in\mathbb{N}\}$. Arătați că $61\in A\cap B$.

**b** Fie mulțimile $C=\{8n+7 \mid n\in\mathbb{N}\}$ și $D=\{7n+8 \mid n\in\mathbb{N}\}$. Verificați dacă $43\in C\cup D$ și $99\in C\cup D$.

**c** Se dau mulțimile $E=\{9n+4 \mid n\in\mathbb{N}\}$ și $F=\{5n+3 \mid n\in\mathbb{N}\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

$P_1$: $40\in E\setminus F$; $P_2$: $53\in F\setminus E$; $P_3$: $58\notin E\cap F$; $P_4$: $101\in E\cup F$; $P_5$: $107\notin E\cup F$.




**8** Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite sau infinite:

**a** $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x\leq 200\}$; **b** $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\leq 220\}$; **c** $C=\{x\in\mathbb{Q} \mid 0\leq x\leq 222\}$;

**d** $D=\{x\in\mathbb{N} \mid 2\leq 3x+1\leq 61\}$; **e** $E=\{x\in\mathbb{Z} \mid 4x-5\geq 19\}$; **f** $F=\{x\in\mathbb{Q} \mid 7x\in\mathbb{Z}\}$;

**g** $G=\{x\in\mathbb{N} \mid x^2\leq 2000\}$; **h** $H=\{x\in\mathbb{Z} \mid 2^x>1000\}$; **i** $I=\{x\in\mathbb{Q} \mid |x|>1000\}$.

## Consolidare


**9** **a** Se dau mulțimile $A=\{0,1,2,3,4\}$ și $B=\{x \mid x=7a+2,\ a\in A\}$. Determinați elementele mulțimii $B$.

**b** Scrieți prin enumerarea elementelor mulțimile $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 25^{10}<5^x\leq 125^8\}$ și $B=\{3x-11 \mid x\in A\}$.

**c** Fie $A=\{0,2,4,6\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea $B=\{x \mid x=3^a-2^a, a\in A\}$.

**10** Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor lor:

**a** $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},\frac{9}{10}\right\}$; **b** $B=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{7}{9},\frac{4}{5},\frac{9}{11}\right\}$;

**c** $C=\{\sqrt{2},\sqrt{6},2\sqrt{3},2\sqrt{5},\sqrt{30},\sqrt{42},2\sqrt{14}\}$; **d** $D=\{\sqrt{2},2\sqrt{3},6,4\sqrt{5},5\sqrt{6},6\sqrt{7},14\sqrt{2}\}$.

**11** Se consideră mulțimea $A=\{5, 9, 13, 17, ..., 201\}$.

**a** Scrieți mulțimea $A$ cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor sale.

**b** Determinați cardinalul mulțimii $A$.

**c** Arătați că media aritmetică a elementelor din $A$ nu aparține mulțimii $A$.

**12** Se consideră mulțimile $A=\{x \mid x=8k+4, k\in\mathbb{Z}\}$ și $B=\{x \mid x=4k, k\in\mathbb{Z}\}$.

**a** Scrieți câte trei elemente din fiecare mulțime.

**b** Verificați dacă numerele 224, 804 și 782 aparțin celor două mulțimi.

**c** Arătați că $A\subset B$ și $B\not\subset A$.

**13** Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

**a** $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 4x+6=9x-24\}$; **b** $B=\{x\in\mathbb{R} \mid 3x^2-16=19-4x^2\}$;

**c** $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+3y=7 \text{ și } 2x+5y=17\}$; **d** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 5x-2y=-2 \text{ și } 4x+y=14\}$;

**e** $E=\{x\in\mathbb{N} \mid x+2x+3x+\ldots+11x=462\}$; **f** $F=\left\{x\in\mathbb{N} \,\middle|\, \left(10^2\right)^{10x} : \left(10^3\cdot 10^6\cdot 10^9\right)^x=10\,000\right\}$.

**14** Determinați mulțimile:

**a** $A=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid 88+xy=33\}$; **b** $B=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid xy-3x-3y=5\}$;

**c** $C=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid xy+2x+4y=22\}$; **d** $D=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 3x+7y=60\}$.

**15** Calculați suma celor mai mici 101 elemente ale mulțimii $\left\{n\in\mathbb{N} \,\middle|\, \text{fracția } \frac{n-3}{3n-2} \text{ este reductibilă}\right\}$.

**Indicație.** Fie $d$ un divizor comun al numerelor $n-3$ și $3n-2$. Folosind proprietățile relației de divizibilitate, determinați un număr natural $a$ astfel încât $d \mid a$.

**16** Se consideră mulțimile $A=\left\{n\in\mathbb{N} \,\middle|\, \frac{n}{12}\in\mathbb{N}\right\}$, $B=\left\{n\in\mathbb{N} \,\middle|\, \frac{n}{15}\in\mathbb{N}\right\}$ și $C=\left\{n\in\mathbb{N} \,\middle|\, \frac{n}{36}\in\mathbb{N}\right\}$. Aflați cel mai mic număr natural nenul $a$ cu proprietatea că $a\in A\cap B\cap C$.

Activitate pe echipe

**17** Se consideră mulțimile:

$A=\left\{n\in\mathbb{N} \,\middle|\, \text{fracția } \frac{6}{n} \text{ este subunitară}\right\}$; $B=\left\{n\in\mathbb{N} \,\middle|\, \text{fracția } \frac{6}{n} \text{ este ireductibilă}\right\}$;

$C=\left\{n\in\mathbb{N} \,\middle|\, \text{fracția } \frac{6}{n} \text{ este periodică simplă}\right\}$; $D=\left\{n\in\mathbb{N} \,\middle|\, \text{fracția } \frac{6}{n} \text{ este periodică mixtă}\right\}$.

**a** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

$P_1$: $1\in A$; $P_2$: $4\in B$; $P_3$: $9\in C$; $P_4$: $30\in D$; $P_5$: $28\in D$;

$P_6$: $5\in A\cap B$; $P_7$: $12\in A\setminus C$; $P_8$: $C\cup D=\mathbb{N}^*$; $P_9$: $7\in B\cap C$; $P_{10}$: $D\setminus B\neq\varnothing$.

**b** Alegeți varianta corectă de răspuns:

**i** Numărul de elemente al mulțimii $A$ este egal cu:

**A** 6 **B** 7 **C** 5 **D** o infinitate.

**ii** Relația $n\in B$ este adevărată pentru orice număr natural $n\geq 5$ cu proprietatea:

**A** $n \,\vdots\, 6$ **B** $n$ este prim **C** $n$ este impar **D** $n \,\vdots\, 7$.

**iii** Dintre următoarele mulțimi $X$, afirmația $X\subset C$ este adevărată pentru:

**A** $X=\{2^k \mid k\in\mathbb{N}^*\}$ **B** $X=\{3^k \mid k\in\mathbb{N}^*\}$ **C** $X=\{6^k \mid k\in\mathbb{N}^*\}$ **D** $X=\{11^k \mid k\in\mathbb{N}^*\}$.

**iv** Cardinalul mulțimii $E=\{n\in D \mid n\leq 50\}$ este egal cu:

**A** 5 **B** 7 **C** 10 **D** 8.

**18** Scrieți elementele mulțimilor:

**a** $A=\left\{x\in\mathbb{N} \,\middle|\, \frac{4}{x+2}\in\mathbb{N}\right\}$; **b** $B=\left\{x\in\mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{7}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$; **c** $C=\left\{x\in\mathbb{N} \,\middle|\, \frac{5}{x-2}\in\mathbb{Z}\right\}$;

**d** $D=\left\{x\in\mathbb{N} \,\middle|\, \frac{3x+11}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$; **e** $E=\left\{x\in\mathbb{N} \,\middle|\, \frac{4x+11}{3x+2}\in\mathbb{Z}\right\}$; **f** $F=\left\{x\in\mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{5x+13}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

**19** Determinați mulțimile:

**a** $A=\left\{a\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{4a1}\,\vdots\,3\right\}$; **b** $B=\left\{b\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{11b5}\,\vdots\,9\right\}$; **c** $C=\left\{c\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{44c2}\,\vdots\,2\right\}$;

**d** $D=\left\{d\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{8d5}\,\vdots\,25\right\}$; **e** $E=\left\{e\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{713e}\,\vdots\,6\right\}$; **f** $F=\left\{f\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{f4f}\,\vdots\,12\right\}$.

**20** Fie $U$ mulțimea cifrelor în baza 10. Determinați numărul de elemente ale mulțimilor:

**a** $A=\left\{(a,b)\in U\times U\,\middle|\,\overline{62ab}\,\vdots\,15\right\}$; **b** $A=\left\{(a,b)\in U\times U\,\middle|\,\overline{2a3b}\,\vdots\,36\right\}$; **c** $A=\left\{(a,b)\in U\times U\,\middle|\,\overline{aa4b}\,\vdots\,45\right\}$.

**21** Fie $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

**a** $A=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\frac{\overline{1x28}}{3}}\in\mathbb{N}\right\}$; **b** $B=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\frac{\overline{17x}}{11}}\notin\mathbb{N}\right\}$; **c** $C=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\frac{\overline{2x9x}}{18}}\in\mathbb{N}\right\}$;

**d** $D=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\frac{\overline{28x}}{18}}\in\mathbb{Q}\right\}$; **e** $E=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\frac{\overline{7x}}{50}}\in\mathbb{Q}\right\}$; **f** $F=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\frac{\overline{x67}}{27}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right\}$.

## Aprofundare

Activitate pe echipe

**22** Se consideră mulțimile $A=\{1,5,9,13,17,\ldots\}$, $B=\{3,7,11,15,19,\ldots\}$ și $C=\left\{k^2\,\middle|\,k\in\mathbb{N}\right\}$.

**a** Scrieți mulțimile $A$ și $B$ cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor lor.

**b** Identificați cele mai mici cinci elemente ale mulțimii $A\cap C$.

**c** Arătați că mulțimile $B$ și $C$ sunt disjuncte.

**d** Demonstrați că $A\cap B=\varnothing$.

**23** Determinați numărul natural $n$ pentru care mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,3^n\le x\le 3^{n+2}\right\}$ are 217 elemente.

**24** Se dau mulțimile $A=\left\{\frac{1}{n(n+1)}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*,\ n\le 100\right\}$ și $B=\left\{\frac{n}{n+2}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*,\ n\le 100\right\}$.

**a** Stabiliți câte elemente au mulțimile $A$ și $B$.

**b** Comparați suma elementelor mulțimii $A$ cu produsul elementelor mulțimii $B$.

**Indicație b:** Utilizați egalitatea $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

**25** Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,21\le x\le a,\ a\in\mathbb{N}\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,x\,\vdots\,7\right\}$. Determinați toate numerele naturale $a$ pentru care mulțimea $A\cap B$ are 25 de elemente.

**26** Aflați cardinalul mulțimii $A=\{n\in\mathbb{N},\ n<604\,|$ cel puțin o cifră a lui $n$ este egală cu $3\}$.

**27** **a** Fie mulțimile $A=\left\{x=\sqrt{4n+2}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$ și $B=\left\{x=\sqrt{5n+3}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$. Arătați că $A\cup B\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

**b** Arătați că mulțimea $M=\left\{x=\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n+28}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*\right\}$ nu conține niciun număr rațional.

## Probleme de șapte stele

**28** Fie mulțimea $A=\left\{2^a\cdot3^b\cdot5^c\,\middle|\,a,b,c\in\mathbb{N}\right\}$. Arătați că printre oricare 9 elemente ale lui $A$ există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

**29** Se consideră mulțimea $A = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}, k \le 50\}$.

**a** Aflați numărul perechilor $(a, b)$ de elemente din $A$, cu $a < b$, pentru care $a + b = 100$.

**b** Dacă suma a 46 de elemente ale mulțimii $A$ este 2020, arătați că cel puțin două dintre aceste elemente sunt egale.

**30** Se consideră mulțimea $A$, formată din numere naturale, cu proprietatea că mulțimile $B = \{5x+1 \mid x \in A\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 7x+4 \in A\}$ sunt submulțimi ale lui $A$. Știind că $9 \in A$, arătați că $6 \in A$.
**Indicație.** Deoarece $B \subset A$, rezultă că dacă $x \in A$, atunci $5 \cdot x + 1 \in A$. Cum $9 \in A$, rezultă că $46 \in A$. Folosiți relația $C \subset A$ pentru a arăta că $6 \in A$.

**31** Fie $A$ o mulțime de numere naturale cu proprietatea că $B = \{3x+2 \mid x \in A\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 1 \in A\}$ sunt submulțimi ale lui $A$. Știind că $1 \in A$, arătați că numerele 4, 5 și 26 aparțin mulțimii $A$.

# Teste de evaluare

## Testul 1

**1** Se consideră mulțimea: $A=\left\{1;-\frac{3}{2};\sqrt{3};5+\sqrt{4};\pi;0;\sqrt{\frac{9}{4}}\right\}$.

**(1p)** **a** Scrieți elementele mulțimii $A\cap\mathbb{Q}$.

**(1p)** **b** Reprezentați pe axă numerele raționale din mulțimea $A$.

**(1p)** **c** Ordonați crescător numerele din mulțimea $A$.

**(1p)** **d** Scrieți elementele mulțimii $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -x\in A\}$.

**(1p)** **e** Scrieți elementele mulțimii $C=\{x\in A \mid -x\in A\}$.

**2** Se consideră mulțimea $M=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le 4\}$.

**(1p)** **a** Scrieți sub formă de interval mulțimea $M$.

**(1p)** **b** Determinați $\text{card}(M\cap\mathbb{Z})$.

**(1p)** **c** Arătați că, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, dacă $a\notin M$, atunci $-a\notin M$.

**(1p)** **d** Determinați cel mai mare număr real pozitiv $b$ cu proprietatea că, pentru oricare $x\in(-b, b)\setminus\{0\}$, rezultă că $\frac{1}{x}\notin M$.

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

## Testul 2

**1** Se consideră numărul $q=-2,(27)$.

**(1p)** **a** Scrieți numărul $q$ sub forma unei fracții ireductibile $\frac{a}{b}$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}^*$.

**(1p)** **b** Verificați dacă numărul $q$ este soluție a inecuației $|x+2|<\frac{1}{4}$.

**(1p)** **c** Determinați mulțimea $\{n\in\mathbb{Z}\mid n\le q<n+1\}\cup\{m\in\mathbb{Z}\mid m\le -q<m+1\}$.

**(1p)** **d** Rezolvați inecuația $2(x+3)-q>3x+\frac{3}{11}$.

**(1p)** **e** Determinați suma soluțiilor întregi ale inecuației $|x+1|\le q^2$.

**2** Se consideră mulțimea $F=\left\{\frac{k}{48}\,\middle|\, k\in\mathbb{N}^*, k<48\right\}\subset\mathbb{Q}$.

**(1p)** **a** Calculați suma elementelor mulțimii $F$.

**(1p)** **b** Determinați numărul maxim de elemente care pot fi eliminate din mulțimea $F$ astfel încât suma numerelor rămase să fie egală cu 23.

**(1p)** **c** Determinați câte numere $x\in F$ pot fi reprezentate ca fracții zecimale finite.

**(1p)** **d** Găsiți numerele din mulțimea $F$ care sunt pătrate de numere raționale.

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

## Testul 3

**1** Se consideră numărul $a=\sqrt{31}$.

**(1p)** **a** Determinați numărul natural $n$ cu proprietatea că $n<a<n+1$.

**(1p)** **b** Determinați primele două zecimale ale numărului $a$.

**(1p)** **c** Scrieți cel mai mic număr întreg din mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le a\}$.

**(1p)** **d** Arătați că $a$ este soluție a inecuației $2x-11>0$.

**(1p)** **e** Determinați numerele raționale $x$ pentru care $|4x-1|=a^2$.

**2** Se consideră mulțimea $M=\{\overline{n,(n)}\mid n\in\mathbb{N}, 3\le n\le 8\}$.

**(1p)** **a** Arătați că, oricare ar fi $x\in M$, numărul $9x$ este un număr natural divizibil cu 10.

**(1p)** **b** Dați exemplu de două numere din mulțimea $M$ a căror sumă este pătratul unui număr rațional pozitiv, notat cu $a$.

**(1p)** **c** Arătați că $a\in M$.

**(1p)** **d** Fie $b\in M$ astfel încât numărul $b$ aproximează numărul real $y$ cu eroare cel mult egală cu $10^{-1}$. Arătați că numărul $b^{-1}$ aproximează numărul $y^{-1}$ cu eroare cel mult egală cu $10^{-2}$.

**Observație.** Ne reamintim că numărul real $a$ aproximează numărul real $x$ cu o eroare cel mult egală cu un număr real $e>0$ dacă $|x-a|\le e$.

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

## Testul 4

**1** Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\le x\le 6\}$ și $B=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le 3\}$.

**(1p)** **a** Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A\cap\mathbb{Z}$.

**(1p)** **b** Scrieți mulțimile $A$ și $B$ sub formă de interval.

**(1p)** **c** Efectuați $A\cup B$ și $A\cap B$.

**(1p)** **d** Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției $B\subset\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|\frac{5x-3}{4}\right|\le 6\right\}$.

**(1p)** **e** Arătați că mulțimile $A\cap S$ și $B\cap S$ sunt nevide, unde $S$ este mulțimea soluțiilor inecuației: $(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2\le(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2$.

**2** Compania de închirieri de automobile *Sun* are un tarif de 120 de lei pe zi plus 1,7 lei pe kilometru parcurs.

**(1p)** **a** Andrei a închiriat o mașină cu care a parcurs 218 km. Aflați cât trebuie să plătească.

**(1p)** **b** Bianca este trimisă în delegație de serviciu, primind 115 euro pentru cheltuieli de deplasare (1 euro = 4,8 lei). Verificați dacă Biancăi îi ajung acești bani pentru a închiria o mașină, știind că trebuie să călătorească într-un oraș aflat la 120 km distanță. (Atenție: drumul este dus-întors.)

**(1p)** **c** Scrieți o inegalitate de forma $ax+b\le s$, unde $x$ este numărul de kilometri ce pot fi parcurși cu o mașină închiriată de la compania *Sun* astfel încât costul închirierii să fie cel mult egal cu $s$ lei.

**(1p)** **d** Utilizând eventual inegalitatea de la punctul **c**, determinați distanța maximă, exprimată printr-un număr întreg de kilometri, ce poate fi parcursă având la dispoziție 100 de euro.

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

# P Fișă pentru portofoliul individual

A1

Numele și prenumele: ..............................

Clasa a VIII-a:

## Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$.
## Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor.
## Intervale de numere reale. Operații cu intervale.
## Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq 0$, $> 0$, $< 0$), unde $a, b \in \mathbb{R}$

**(2p)** **1** Completați spațiile libere pentru a obține răspunsuri corecte.

**a** Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$. Cel mai mare număr din mulțimea $A$ este egal cu ........... .

**b** Mulțimea numerelor reale $x$, cu proprietatea $x > -4$, formează intervalul ........... .

**c** Intersecția intervalelor $\left(-\infty, 8\sqrt{2}\right]$ și $\left[5\sqrt{5}, \infty\right)$ este mulțimea ........... .

**d** Mulțimea soluțiilor inecuației $-\frac{3}{5}x - \frac{7}{21} < 0$ este ........... .

**(2p)** **2** Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera **A**. În caz contrar, încercuiți litera **F**.

| | | |
|---|---|---|
| **a** 77 este element al mulțimii $A = \{x \mid x = 9k + 5, k \in \mathbb{Z}\}$. | A | F |
| **b** Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \lvert x \rvert \leq 5\}$ are 10 elemente. | A | F |
| **c** Reuniunea intervalelor $[-3, 6]$ și $(-\infty, 0]$ este $[-3, 0]$. | A | F |
| **d** $x = -2$ este soluție a inecuației $4(2x - 5) - 3(6 - x) < 0$. | A | F |

**(2p)** **3** Încercuiți răspunsul corect la fiecare dintre următoarele exerciții. Dintre cele patru variante de răspuns, scrise la fiecare cerință, doar una este corectă.

**a** Suma numerelor întregi conținute în intervalul $[-2, 3]$ este egală cu:
**A** $-2$ **B** $0$ **C** $1$ **D** $3$.

**b** Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x - 1 \leq 0\}$ este egală cu:
**A** $(2, 1)$ **B** $\{-2, 1\}$ **C** $[-2, 1]$ **D** $\{-1, 0, 1\}$.

**c** Mulțimea soluțiilor inecuației $-\frac{5}{14x + 36} \geq 0$ este intervalul:
**A** $\left(-\frac{18}{7}, \infty\right)$ **B** $\left(-\infty, \frac{18}{7}\right)$ **C** $\left(-\infty, -\frac{18}{7}\right)$ **D** $\left(-\infty, -\frac{18}{7}\right]$.

**d** Pentru a primi un certificat, Elena trebuie să obțină o medie de cel puțin 92 de puncte în urma a patru teste. La primele trei teste, Elena a primit 87, 94, respectiv 91 de puncte. Punctajul minim pe care trebuie să îl obțină la ultimul test este egal cu:
**A** 98 **B** 94 **C** 96 **D** 100.

**La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.**

**(2p)** **4** Se dau mulțimile: $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |2x+1|\leq 5\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-3<\frac{x+1}{2}\leq 1\right\}$. Calculați $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ și $B\setminus A$.

**(1p)** **5** Se consideră numărul $a=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{2}{49\cdot 51}$. Stabiliți dacă $a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

**NOTĂ.** Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

# I.4 Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

**1** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + c = 1$. Arătați că cel puțin unul dintre numerele $a + bc$, $b + ca$, $c + ab$ aparține intervalului $[0, \infty)$.

**2** Pentru fiecare număr natural nenul $n$ definim intervalul $I_n = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}\right)$. Arătați că există un singur număr real $a$ cu proprietatea $a \in I_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

**3** Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \le a < b$. Arătați că intervalul $(a, b)$ conține o infinitate de numere raționale $x$ cu proprietatea $x^2 \in \mathbb{Q}$.

**4** Determinați numerele naturale nenule $a$, $b$ care au proprietatea: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in [a, b]$, oricare ar fi $x, y \in [a, b]$.

**5** Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x - y| \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $x = y$.

**6** Fie $n$ un număr natural nenul. Elementele mulțimii $[1, 2n] \cap \mathbb{Z}$ se împart în două grupe de câte $n$ numere. Fie $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ numerele din prima grupă și $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ numerele din cea de a doua grupă. Arătați că:

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots |a_n - b_n| = n^2.$$

**7** Se consideră intervalele $I = (a + 2, 3b - 2)$ și $J = (3a + 1, b + 1)$.

**a** Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $I \cap J = \{2\}$.

**b** Arătați că mulțimea $I \cap J$ este nevidă, pentru orice alegere a numerelor reale $a$ și $b$.