

CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA YUPARI Z. WILLIAMS

MATEMATICĂ

clasa a IX-a

ALGEBRĂ
GEOMETRIE
TRIGONOMETRIE

SINTEZE DE TEORIE
EXEMPLE REZOLVATE
EXERCITII ȘI PROBLEME

- **Fixarea cunoștințelor**
- **Aprofundarea cunoștințelor**
- **Performanță**
- **Autoevaluare**
- **Evaluare sumativă**

Ediția a patra revizuită și adăugită

EDITURA TOP PUBLISHING
BUCUREȘTI, 2023

Prezentul auxiliar didactic este aprobat pentru utilizare în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018

Referenți științifici:

- prof. Ioana-Irinel Chiran*, București
prof. Nicușor Udrea, București
prof. Marian Voinea, București
prof. Rică Zamfir, București
prof. Carmen Ianculescu, București
prof. Elena-Violeta Rădulescu, Buc.
prof. Daniela Ulei, București
prof. Otilia-Bogdana Lăstun, Agnita
prof. Dorinel Bora, Alba Iulia
prof. Valentina Rusu, Alba Iulia
prof. Delia Stănilă, Alba Iulia
prof. Petru-Dumitru Stănilă, Alba Iulia
prof. Margareta Vecerzan, Agnita
prof. Delia Goina, Bistrița
prof. Cornel-Vasile Muscan, Bistrița
prof. Daria-Maria Stoleru, Bistrița
prof. Claudia Croitor, Bistrița
prof. Anca-Daniela Petrescu, Buftea
prof. Marius-Florin Zănoagă, Buftea
prof. Antoanela Buzescu, Caransebeș
prof. Delia Dragomir, Caransebeș
prof. Ana Mandreși, Caransebeș
prof. Bogdan Heroiu, Câmpulung
prof. Ana Maria Getzi, Cluj-Napoca
prof. Gheorghe Căzănel, Comănești
prof. Livia Kovacs, Covasna
prof. Gabriel Hură, Dorohoi
prof. Mariana Draga Tătuțu, Drobeta
prof. Mariana-Magdalena Pătuleanu, Drobeta-Turnu Severin
prof. Marcela Ionuț, Făgăraș
prof. Corina Răduleț, Făgăraș
prof. Simona Ghizdaru, Făgăraș
prof. Adriana Nicoară, Hăteg
prof. Simion Bade, Hunedoara
prof. Valentina Blendea, Iași
prof. Gheorghe Blendea, Iași
prof. Alexandru Gabriel Mirșanu, Iași
prof. Laura Stanciu, Iași
prof. Andrei Nedelcu, Iași
prof. Sanda Nițoiu, Jimbolia
prof. Domnica Rif, Jimbolia
prof. Nicoleta Gheorghe, Mangalia
prof. Aurica-Viuța Fazakaș, Marghita
prof. Rodica Ursan, Marghita
prof. Tatiana Voicu, Marghita
prof. Dorina Boroș, Marghita
prof. Mirela-Maria Maior, Mediaș
prof. Eugenia Munteanu, Mediaș
prof. Alexandru Nicula, Mediaș
prof. Anca-Nicoleta Oprea, Mediaș
prof. Ileana Demian, Ocna Mureș
prof. Ludovica Lazăr, Năsăud
prof. Adriana Mihaela Grec, Oradea
prof. Dana Kele, Oradea
prof. Crăciun Negruț, Oradea
prof. Corina Negruțiu, Oradea
prof. Dumitru Pistrilă, Oravița
prof. Alexandru Farago, Orșova
prof. Luminița Ungureanu, Pașcani
prof. Carmen Corfu, Piatra Neamț
prof. Rodica Popovici, Piatra Neamț
prof. Maria Lădescu, Râșnov
prof. Paula-Maria Dărăban, Reghin
prof. Gheorghe Dărăban, Reghin
prof. Andreea Vișovan, Reghin
prof. Claudia Denisia Otea, Roman
prof. Adela Nica, Sebiș
prof. Nicolae Papacu, Slobozia
prof. Ioana Aleman, Sibiu
prof. Adriana Mihălțan, Sibiu
prof. Arhire Felix, Tecuci
prof. Karina Preoteșoiu, Timișoara
prof. Gheorghe Desculțu, Turnu Măgurele
prof. Cornelia Costache, Zărnești
prof. Doina Mureșan, Zărnești

ISBN 978-606-9702-30-7

© Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate Editurii TOP PUBLISHING. Niciun capitol și nicio parte din această lucrare nu pot fi tipărite sau multiplicare folosind diferite mijloace, fără permisiunea scrisă a conducerii acestei edituri.

Redactor: *prof. Mădălina Yupari Z. Williams*
Coperta: *Elena Drăgulelei Dumitru*
Grafica: *pictor Nadejda-Luminița Nicolescu*
Tehnoredactare computerizată: S.C. TABIR S.R.L.

CUPRINS

ALGEBRĂ

	E *	R **
Capitolul I. NUMERE REALE		
1. Numere raționale		
Breviar de teorie	7	
Probleme propuse	10	380
2. Numere iraționale. Numere reale		
Breviar de teorie	13	
Probleme propuse	15	381
3. Operații cu numere reale. Formule de calcul prescurtat		
Breviar de teorie	18	
Probleme propuse	20	382
4. Ordonarea numerelor reale. Aproximări zecimale. Trunchieri. Rotunjiri		
Breviar de teorie	26	
Probleme propuse	28	384
5. Modulul unui număr real		
Breviar de teorie	31	
Probleme propuse	33	385
6. Intervale de numere reale		
Breviar de teorie	36	
Probleme propuse	37	387
7. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real		
Breviar de teorie	40	
Probleme propuse	46	388
8. Inegalități și identități algebrice		
Breviar de teorie	49	
Probleme propuse	51	390
<i>Teste de evaluare</i>	55	393
Capitolul II. MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ		
1. Propoziții. Predicate. Operații logice cu propoziții și cu predicate		
Breviar de teorie	59	
Probleme propuse	61	394
2. Mulțimi. Operații cu mulțimi		
Breviar de teorie	65	
Probleme propuse	75	394
3. Condiții necesare. Condiții suficiente. Metoda reducerii la absurd		
Breviar de teorie	78	
Probleme propuse	82	396
4. Metoda inducției matematice		
Breviar de teorie	85	
Probleme propuse	92	397

* *E* – enunțuri

** *R* – răspunsuri, rezolvări

5. Probleme de numărare		
Breviar de teorie	97	
Probleme propuse	105	399
<i>Teste de evaluare</i>	107	399

Capitolul III. FUNCȚII

1. Funcții. Funcții numerice. Graficul unei funcții		
Breviar de teorie	109	
Probleme propuse	117	400
2. Operații cu funcții. Compunerea funcțiilor		
Breviar de teorie	123	
Probleme propuse	126	401
3. Funcții monotone. Funcții mărginite		
Breviar de teorie	129	
Probleme propuse	132	404
4. Funcții pare. Funcții impare. Funcții fără paritate. Funcții periodice		
Breviar de teorie	135	
Probleme propuse	137	405
<i>Teste de evaluare</i>	140	407

Capitolul IV. PROGRESII

1. Șiruri de numere reale		
Breviar de teorie	142	
Probleme propuse	146	407
2. Progresii aritmetice		
Breviar de teorie	151	
Probleme propuse	155	410
3. Progresii geometrice		
Breviar de teorie	159	
Probleme propuse	161	412
<i>Teste de evaluare</i>	166	415

Capitolul V. FUNCȚIA DE GRADUL ÎNTÂI

1. Ecuația de gradul întâi		
Breviar de teorie	168	
Probleme propuse	169	416
2. Funcția de gradul întâi. Reprezentarea grafică		
Breviar de teorie	173	
Probleme propuse	175	418
3. Inecuații și sisteme de inecuații de gradul întâi.		
Monotonia și semnul funcției de gradul întâi		
Breviar de teorie	178	
Probleme propuse	180	420
<i>Teste de evaluare</i>	185	422

Capitolul VI. FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA

1. Ecuația de gradul al doilea. Descompunerea trinomului de gradul al doilea		
Breviar de teorie	187	
Probleme propuse	190	423

2. Relațiile lui François Viète		
Pozițiile rădăcinilor unei ecuații de gradul al doilea față de un număr real dat.		
Pozițiile rădăcinilor unei ecuații de gradul al doilea față de două numere reale date		
Breviar de teorie	194	
Probleme propuse	202	425
3. Reprezentarea grafică a funcției algebrice de gradul al doilea.		
Minimumul sau maximumul funcției algebrice de gradul al doilea		
Breviar de teorie	207	
Probleme propuse	211	428
4. Monotonia funcției algebrice de gradul al doilea		
Breviar de teorie	215	
Probleme propuse	216	430
5. Semnul funcției algebrice de gradul al doilea. Inecuații de gradul al doilea.		
Valorile de extrem ale unei expresii raționale.		
Imaginea și preimaginea unei funcții.		
Discuția privind natura și semnul rădăcinilor unei ecuații de gradul al doilea în funcție de valorile unui parametru real		
Breviar de teorie	219	
Probleme propuse	230	431
6. Sisteme de ecuații.		
Pozițiile relative ale unei drepte față de o parabolă.		
Pozițiile relative a două parabole.		
Discuția rădăcinilor unei ecuații în funcție de pozițiile relative ale unei drepte variabile		
Breviar de teorie	234	
Probleme propuse	242	437
<i>Teste de evaluare</i>	246	441

GEOMETRIE ÎN PLAN

Capitolul I. VECTORI ÎN PLAN

1. Definiția vectorilor. Operații cu vectori		
Breviar de teorie	251	
Probleme propuse	256	448
2. Vectori coliniari. Descompunerea unui vector după două direcții date		
Breviar de teorie	261	
Probleme propuse	263	450
3. Vectori într-un reper cartezian		
Exprimarea analitică a unui vector într-un reper cartezian.		
Operații cu vectori într-un reper cartezian.		
Coliniaritatea a doi vectori exprimată analitic		
Breviar de teorie	266	
Probleme propuse	269	451
4. Lungimea unui segment. Mijlocul unui segment într-un reper cartezian		
Breviar de teorie	272	
Probleme propuse	274	452
5. Vectori de poziție. Coliniaritate. Paralelism. Concurență. Mijlocul unui segment.		
Centre de greutate. Teorema lui Menelaus. Teorema lui Ceva. Reciproce		
Breviar de teorie	277	
Probleme propuse	291	455
<i>Teste de evaluare</i>	296	460

TRIGONOMETRIE

Capitolul I. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

1. Rezolvarea triunghiului dreptunghic		
Breviar de teorie	299	
Probleme propuse	300	461
2. Măsurarea unghiurilor. Măsurarea arcelor.		
Definiția cercului trigonometric		
Breviar de teorie	303	
Probleme propuse	307	463
3. Definirea funcțiilor trigonometrice		
Breviar de teorie	310	
Probleme propuse	314	464
4. Teorema fundamentală a trigonometriei. Reducerea la primul cadran		
Breviar de teorie	318	
Probleme propuse	322	467
5. Funcțiile trigonometrice ale sumei sau ale diferenței de unghiuri		
Breviar de teorie	327	
Probleme propuse	328	471
6. Funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu.		
Funcțiile trigonometrice ale unghiului pe jumătate		
Breviar de teorie	331	
Probleme propuse	334	473
7. Formule pentru transformarea sumelor în produse.		
Formule pentru transformarea produselor în sume		
Breviar de teorie	337	
Probleme propuse	340	477
8. Calculul de sume și de produse trigonometrice.		
Identități trigonometrice. Identități trigonometrice condiționate.		
Inegalități trigonometrice		
Breviar de teorie	344	
Probleme propuse	349	479
<i>Teste de evaluare</i>	353	482

Capitolul II. APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIA ÎN PLAN

1. Produsul scalar a doi vectori		
Breviar de teorie	357	
Probleme propuse	361	485
2. Teorema sinusurilor. Teorema cosinusului. Teorema tangentelor.		
Rezolvarea triunghiurilor		
Breviar de teorie	365	
Probleme propuse	368	487
3. Formule pentru aria, raza cercului înscris, raza cercului circumscris și razele cercurilor exînscrise unui triunghi.		
Identități și inegalități într-un triunghi		
Breviar de teorie	372	
Probleme propuse	374	490
<i>Teste de evaluare</i>	378	497

Bibliografie selectivă	498
-------------------------------------	-----

ALGEBRĂ



Numere reale

1. Numere raționale

Breviar de teorie

Reamintim mai întâi notațiile uzuale pentru următoarele mulțimi de numere:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ - mulțimea numerelor naturale.

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - mulțimea numerelor întregi.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ - mulțimea numerelor raționale.

- Au loc incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Cu numerele raționale se pot efectua operații algebrice (adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri).

- Un număr rațional care nu este întreg poate fi reprezentat ca *fracție zecimală finită* sau *fracție zecimală periodică*.

Prin procedeul cunoscut al împărțirii obținem reprezentarea sub formă de fracție zecimală a unui număr rațional. Se împarte numărătorul la numitor.

Exemple: $\frac{55}{32} = 1,71875$; $\frac{17}{40} = 0,425$; $\frac{8531}{20} = 426,55$; $\frac{121}{150} = 0,80666\dots$;

$\frac{437}{222} = 1,9684684\dots$

Reprezentarea zecimală a unui număr rațional este frecvent folosită în probleme de natură practică.

- O *fracție zecimală infinită* o scriem sub forma $a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$, unde $a_0 \in \mathbb{Z}$ și cifrele $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ aparțin mulțimii $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Frația zecimală

infinită se numește *periodică*, dacă există numerele naturale nenule k și p , astfel încât $a_{n+p} = a_n$, oricare ar fi indicele $n \geq k$.

Exemple: 1) $8,7777\dots = 8,(7)$, unde $a_0 = 8$, $k = 1$, $p = 1$, $a_{n+1} = a_n = 7$;

2) $0,454545\dots = 0,(45)$, unde $a_0 = 0$, $k = 1$ și $p = 2$;

3) $3,148148148\dots = 3,(148)$, unde $a_0 = 3$, $k = 1$ și $p = 3$;

4) $41,12387777\dots = 41,1238(7)$, unde $a_0 = 41$, $k = 5$ și $p = 1$;

5) $0,56323232\dots = 0,56(32)$, unde $a_0 = 0$, $k = 3$ și $p = 2$.

- Determinarea numărului rațional $\frac{p}{q}$, atunci când se cunoaște reprezentarea lui ca fracție infinită zecimală periodică, care are perioada diferită de 9:
 - cazul $a_0 \in \mathbb{N}$, $k = 1$, adică perioada începe imediat după virgulă, spunem că fracția zecimală este

$$\text{periodică simplă: } a_0,(a_1a_2\dots a_p) = a_0 + \frac{a_1a_2\dots a_p}{\underbrace{99\dots 9}_{p \text{ cifre}}}$$

Observăm că numărătorul este format din succesiunea de p cifre (care constituie perioada). Numitorul este format numai cu cifra 9 și conține exact p cifre (câte cifre are numărătorul).

$$\text{Exemple: } 0,(5) = \frac{5}{9}, \quad 0,(12) = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}, \quad 0,(324) = \frac{324}{999} = \frac{12}{37}.$$

Observație.

Dacă $a_0 < 0$, de exemplu, $r = -5,737373\dots$, atunci putem scrie $r = -(5 + 0,7373\dots) = -5 - 1 + 1 - 0,7373\dots = -6 + [1 - 0,(73)] =$

$$= -6 + 0,(26) = -6 + \frac{26}{99}.$$

ii) cazul $a_0 \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$; spunem că fracția zecimală este

$$\text{periodică mixtă: } r = a_0,b_1b_2\dots b_m(a_1a_2\dots a_p) = a_0 + \frac{b_1b_2\dots b_m a_1a_2\dots a_p - b_1b_2\dots b_m}{\underbrace{99\dots 9}_{p \text{ cifre}} \underbrace{00\dots 0}_{m \text{ cifre}}}$$

Observăm că la numărător avem diferența dintre întregul număr format la dreapta virgulei și numărul constituit din partea neperiodică. Numitorul este format cu cifra 9, repetată de p ori (câte cifre are perioada) urmată de 0, repetată de m ori (câte cifre are partea neperiodică).

$$\text{Exemple: } 1) 0,35(7) = \frac{357 - 35}{900} = \frac{322}{900} = \frac{161}{450};$$

$$2) 4,213(85) = 4 + \frac{21385 - 213}{99000} = 4 + \frac{21172}{99000};$$