ARTUR BĂLĂUCĂ

ALEXANDRU NEGRESCU **CEZAR CHIRILĂ** **EMANUEL ȘTIULER**

Au mai colaborat:

Gându Gheorghe **Gloambeș Lucian** **Ivan Adrian** **Ivan Neculai**
Mîrșanu Gabriel **Nițescu Mirela** **Sas Monica** **Sandu Nicolae**

MATEMATICĂ

pentru

ACTIVITĂŢI OPŢIONALE

Gimnaziu

Ediţia a III-a

Editura TAIDA
IAŞI, 2021

CUPRINS

TEMA 1. CE ŞTIM DESPRE NUMERE?

„Matematica este calea de înţelegere a Universului.
Numărul este măsura tuturor lucrurilor.”
(Pitagora)

Numerele din şirul natural: 1, 2, 3, 4, ... se numesc *cardinale* şi arată din câte unităţi se compune fiecare (*cardinalis* = *principal*). Numărul unu este compus dintr-o unitate, doi din două unităţi.... Astfel şirul numerelor s-a format pornind de la unitate şi adăugând pe rând câte o unitate numărului anterior. Se observă că fiecărui element îi corespunde un unic element din şir şi totodată că poziţia lui în şir, adică numărul lui de ordine (*numărul ordinal*), corespunde cu numărul cardinal considerat.

Istoria evoluţiei sistemelor de scriere a numerelor. Baze de numeraţie

Cele zece caractere: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 cu ajutorul cărora putem scrie astăzi orice număr, se numesc *cifre*.

Pentru a ajunge la cifrele utilizate de noi cotidian, omenirii i-au trebuit milenii. Cele dintâi tentative de a scrie cifrele utilizând primele zece litere ale alfabetului au fost făcute în secolul al VI-lea înainte de Hristos, de către celebrul matematician **Pitagora**.

De abia în anul 610 după Hristos, un savant indian, pe numele său **Aryabhata** a inventat cele nouă cifre pe care le utilizăm în prezent: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 şi un punct (.) pentru zero.

După moartea profetului lor, Mahomed, în anul 632, triburile arabe se unifică şi cuceresc imense teritorii din India până în Spania. Combinând operele matematicienilor greci cu ale celor indieni, ei vor pune la punct sistemul de numeraţie zecimal.

Pentru prima dată apare zero, nume venit din latinescul „*zephrum*“, la rândul său derivat din limba arabă.

În scrierea zecimală a numerelor naturale 10 unităţi formează o grupă numită zece, 10 zeci formează o nouă grupă numită sută, ş.a.m.d.

Învăţarea număratului a apărut ca necesară omului din trecutul foarte îndepărtat. De-a lungul timpului, diferite popoare au inventat şi au dezvoltat mai multe sisteme de numeraţie.

Mesopotamienii foloseau următoarele cifre:

▼ = 1 ; ◀ = 10 ; ▼ = 60. *Exemplu*: 45 = ◀◀◀◀▼▼▼▼▼

Acesta este un sistem poziţional şi s-a dezvoltat între anii 3000 şi 2000 î.Hr.

Egiptenii foloseau un sistem cu simboluri scrise numite hieroglife:

| = 1 (o liniuţă); ∩ = 10 (un val); 𓍢 = 100 (o funie); 𓆼 = 1000 (o floare de lotus) ;

⌠ = 100000 (deget arătător) ; 𓀠 = 1000000 (om).

Dovediți-vă iscusința!

1. Determinaţi mulţimea $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ 20 \le 2x + 3 \le 97$ şi x este număr prim$\}$.

2. Aflaţi numerele prime x, y, z ştiind că: $100x + 200y + 600z = 3800$.

3. Determinaţi toate tripletele de numere prime care verifică toate relaţia:

$$2a + 5b + c = 35.$$

4. Determinaţi numerele prime a, b, c ştiind că $\frac{a}{b} = \frac{32,5}{c}$.

5. Determinaţi toate numerele naturale m şi n care au proprietatea că $2^m + n$, $2^n + m$ şi $m + n$ sunt simultan prime.

6. Determinaţi tripletele de numere prime, de forma $\left(\overline{ab}; \overline{ac}; \overline{ad}\right)$, în baza zece.

7. Determinaţi cvartetele de numere prime de forma $\left(\overline{ab}; \overline{ac}; \overline{ad}; \overline{ae}\right)$, în baza zece.

8. Să se determine numărul natural n ştiind că vecinii săi sunt numere prime iar suma divizorilor lui n este $2n$.

9. Fie numărul natural $\overline{abcdefghi}$ cu suma cifrelor egală cu 19. Scrieți al 9-lea termen din șir în ordine crescătoare, apoi în ordine descrescătoare.

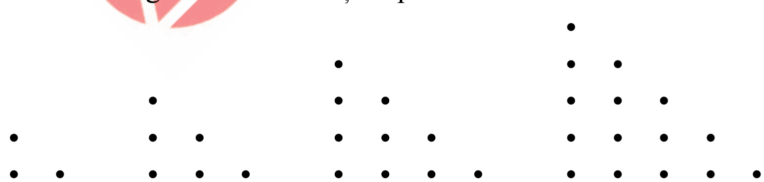
10. Fie suma $S = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots999}_{1000 \text{ de } 9} + 2012$.

a) Calculați suma S.

b) Dacă renunțăm la 2012 care ar fi noul rezultat? Calculați în două moduri.

11. Cinci numere reale pozitive au proprietatea că, dacă din suma oricăror trei se scade suma celor două rămase, diferența obținută este pozitivă. Demonstrați că produsul tuturor celor zece astfel de diferențe nu este mai mare decât pătratul produsului celor cinci numere inițiale.

12. Unele numere se numesc *numere triunghiulare*. Primele numere triunghiulare sunt: 3, 6, 10, 15, 21, 28. În desenul de mai jos sunt reprezentate primele numere triunghiulare. Desenați-le pe următoarele două numere.



3 6 10 15

13. Un număr se numește 5-*balansat* dacă scris în baza 5 are 4 cifre și suma primelor două cifre este egală cu suma ultimelor 2 cifre. Aflați numărul numerelor 5-*balansate*.

14. Arătați că există o infinitate de numere naturale prime de forma $4n - 1$ și de forma $6n - 1$, unde $n \in \mathbb{N}$.

TEMA 3. METODA REDUCERII LA ABSURD

„Viaţa este bună doar pentru două lucruri:
a studia matematica şi a o profesa.”
(S.D. Poisson)

Matematica este una din cele mai vechi ştiinţe care a cunoscut o puternică dezvoltare în perioada antichităţii.

Ea a izvorât din necesitatea de a rezolva anumite probleme practice (cum ar fi măsurarea pământului) şi, la început, în Egipt, Mesopotamia, China, India, Grecia etc, au fost obţinute rezultate matematice remarcabile, totuşi ele aveau un caracter empiric şi, deşi se ajunsese la ideea de demonstraţie a unui rezultat matematic, aceste demonstraţii nu s-au păstrat în mare parte.

În Grecia antică, matematica capătă o dezvoltare superioară, constituindu-se ca ştiinţă deductivă, apar demonstraţii matematice sistematice, apar *„Elementele“* lui **Euclid** care au reprezentat un salt calitativ în dezvoltarea matematicii, ele constituie o primă încercare de a fundamenta logic o disciplină matematică (geometria elementară), astfel încât axiomatica lui **Euclid** a satisfăcut multă vreme cerinţele rigorii logice, constituind obiectul a două milenii de cercetări şi căutări.

Tot în Grecia antică se dezvoltă şi logica, care apărea deja ca o ştiinţă în lucrările lui **Aristotel**.

În dezvoltarea matematicii instrumentul folosit l-a constituit diverse operaţii logice, dar logica însăşi, ca ştiinţă, are un conţinut obiectiv, ea izvorând prin abstractizarea unor procese ale lumii materiale. Între cele două ştiinţe a existat o profundă interdependenţă. Matematica s-a dezvoltat şi s-a formalizat pe baza logicii, dar mai apoi logica însăşi s-a formalizat, folosind instrumente matematice.

Pentru a înţelege în ce constă metoda reducerii la absurd să trecem în revistă câteva elemente ale logicii matematice.

Logica matematică studiază propoziţiile în alt context faţă de gramatică. Astfel, din punct de vedere al logicii matematice, o propoziţie este un enunţ, care într-un context dat, este fie adevărat, fie fals.

Conceptul de adevăr îi este datorat lui **Aristotel**, care considera o propoziţie adevărată dacă afirmaţia exprimată de ea corespundea unui fapt.

Logica matematică studiază propoziţiile numai din punct de vedere al valorii lor de adevăr.

Până în anul 1992, celebra *Teoremă a lui Fermat:* „Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, nu există numere întregi nenule x, y, z astfel încât $x^n + y^n = z^n$” nu s-a putut afirma multe secole, dar nici infirma. Un asemenea enunţ se numeşte *conjectură*. Abia în anul 1992, matematicianul american **Andrew Wiles** a reuşit să demonstreze această teoremă, enunţul respectiv devenind o propoziţie adevărată, nemaifiind astfel o conjectură.

Legile fundamentale ale logicii clasice

① ***Legea identităţii.*** În acelaşi timp şi în acelaşi raport, orice obiect este identic cu el însuşi.

② ***Legea dublei negaţii.*** Negaţia negaţiei unei propoziţii este propoziţia dată.

③ ***Legea contradicţiei.*** Două propoziţii contradictorii nu pot fi ambele adevărate: pot fi ambele false sau una adevărată şi alta falsă.

④ ***Legea terţului exclus.*** Dintre două propoziţii contradictorii cel puţin una este adevărată.

Observaţie: Din ③ şi ④ rezultă că două propoziţii contradictorii nu pot fi simultan adevărate, nici false (una este falsă şi cealaltă adevărată).

⑤ ***Legea transpoziţiei sau contrapoziţiei.*** Dacă într-o implicaţie înlocuim ipoteza cu negaţia concluziei şi concluzia cu negaţia ipotezei obţinem o propoziţie echivalentă. ((p → q) ≡ (non q → non p)).

Observaţii:
1. În unele situaţii demonstraţia unei teoreme directe prezintă dificultăţi, în timp ce demonstraţia contrarei reciprocei este una simplă.
2. Metoda prin care în loc să demonstrăm teorema directă, demonstrăm contrara reciprocei se numeşte *metoda reducerii la absurd*.
3. Pentru a utiliza această metodă în demonstraţie procedăm astfel: Presupunem că nu este adevărată concluzia şi, printr-un şir de raţionamente, ajungem la o propoziţie contrară ipotezei, sau a unei părţi din ipoteză sau unei informaţii dinainte cunoscută ca fiind adevărată. Ajungem, deci la o propoziţie falsă, absurdă. Înseamnă că premisa de la care am pornit este falsă. Deci, concluzia este adevărată.

Exemplificăm utilizarea metodei reducerii la absurd prin câteva exemple:
1. Arătaţi că nu există un număr care împărţit la 2 să dea restul 1 şi împărţit la 4 să dea restul 2.
Demonstraţie: Presupunem prin absurd, că există numărul natural n care împărţit la 2 să dea câtul a şi restul 1 şi împărţit la 4 să dea câtul b şi restul 2. Conform **teoremei împărţirii cu rest** avem: $n = 2a + 1$ şi $n = 4b + 2$, de unde $2a + 1 = 4b + 2$, sau $2a - 4b = 1$. Deci $2(a - 2b) = 1$, din aceasta deducându-se că 2 îl divide pe 1, absurd. Deducem că presupunerea făcută este falsă.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale pozitive sistemul: $\begin{cases} x-\sqrt{y}=6 \\ y-\sqrt{z}=6 \\ z-\sqrt{x}=6. \end{cases}$

Se observă că $x_0 = y_0 = z_0 = 9$ este o soluţie a sistemului. Arătăm prin reducere la absurd că soluţia este unică. Prin absurd, să presupunem că sistemul ar mai avea soluţia (x_1, y_1, z_1) cu $x_1 < y_1$.
Din primele două ecuaţii ale sistemului rezultă că: $x_1 - y_1 = \sqrt{y_1} - \sqrt{z_1} < 0$, de unde $y_1 < z_1$. **(1)**

Dar, scăzând ultimele două ecuaţii ale sistemului, rezultă că: $y_1 - z_1 = \sqrt{z_1} - \sqrt{x_1} < 0$, de unde $z_1 < x_1$. **(2)** Din **(1)** şi **(2)** rezultă $y_1 < z_1 < x_1$ în contradicţie cu $x_1 < y_1$. Analog, se analizează cazul $x_1 > y_1$. Din $x_1 = y_1 = z_1$, şi din prima ecuaţie rezultă $x_1 = 9$.

3. Să se arate că $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Demonstraţie. Presupunem, prin absurd, că $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Deci există $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ astfel $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ şi $(m, n) = 1$. Din $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ rezultă $5n^2 = m^2$ **(1)**, de unde $5/m^2$, 5 fiind prim implică $5/m$, adică $m = 5m_1$ ($m \in \mathbb{Z}$). Înlocuind în relaţia **(1)** se obţine $5n^2 = 25m_1{}^2$, de unde $5/n$. Deci $5/m$ şi $5/n$, ceea ce contrazice faptul că $(m, n) = 1$. Contradicţia provine din faptul că am presupus că $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.

Dovediți-vă iscusința!

1. Suma a 100 de numere naturale impare este 9998. Să se arate că cel puţin două dintre ele sunt egale.

2. Există un număr natural care împărţit la 38 dă restul 19 şi împărţit la 57 dă restul 17?

3. Fie numărul natural $n = \overline{abcde7}$ scris în baza zece. Demonstraţi că dacă n este divizibil cu produsul cifrelor sale atunci cel puţin două dintre cifrele a, b, c, d, e sunt egale. ***(Concursul interjudețean „Dimitrie Pompeiu“, Botoșani, 2012, Cătălin Budeanu)***

4. Să se arate că din 17 numere naturale nenule în baza zece a căror sumă nu depăşeşte 497, întotdeauna se pot alege două numere ce au suma egală cu 17.

5. Demonstraţi că fracţia $\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

6. Demonstraţi că există un singur triplet de numere prime impare consecutive.

7. Să se arate că dacă un număr natural de patru cifre distincte este divizibil cu 21, atunci una din cifrele sale este 5.

8. Dacă două unghiuri, diferite de unghiul nul, sunt complementare, atunci ambele unghiuri sunt ascuţite.

9. Dacă în triunghiul ABC bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ nu este şi înălţime, atunci unghiul $\sphericalangle BAC$ nu este congruent cu unghiul $\sphericalangle ACB$.

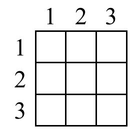
10. Să se arate că în orice triunghi centrul cercului înscris nu este situat pe nici una din liniile mijlocii ale triunghiului.

11. Într-o sală a Olimpiadei Internaționale de matematică sunt 9 elevi. Ei descoperă că printre fiecare trei dintre ei, cel puțin doi vorbesc aceeași limbă. Dacă fiecare participant poate vorbi cel mult 3 limbi străine, să se demonstreze că există cel puțin 3 elevi care vorbesc aceeași limbă.

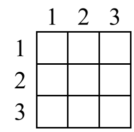
TEMA 17. REBUS MATEMATIC

1. Completaţi careurile de mai jos cu numere din câte trei cifre, respectând condiţiile de mai jos.

a) **1.** Suma cifrelor de pe fiecare linie şi coloană este aceeaşi.
2. Numerele de pe toate liniile şi coloanele sunt divizibile cu 3.
3. Toate numerele de trei cifre utilizate au cifre distincte.

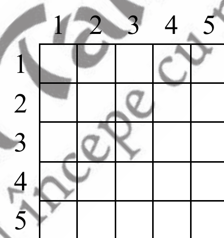


b) **1.** Numerele de pe liniile 1, 2 şi 3 sunt pătratele unor numere prime cuprinse între 10 şi 20.
2. Nu se foloseşte cifra 0.
3. Numărul de pe coloana 1 este par.
4. Numărul de pe diagonala principală este pătrat perfect.



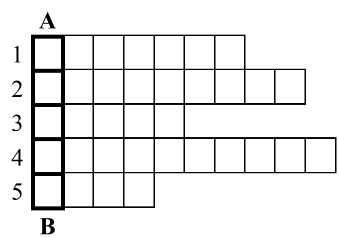
2. Completaţi careul de mai jos, cu numere din câte 5 cifre, respectând condiţiile de mai jos.

1. 1 vertical = 19 · 3900;
2. 2 vertical = 37 · 1086;
3. 3 vertical = 13 · 0,624;
4. 4 vertical = 11 · 8,43;
5. 5 vertical = 27 · 16,9;
6. 2 orizontal = 3,5 · 11,5;
7. 3 orizontal = 9,3 · 12.



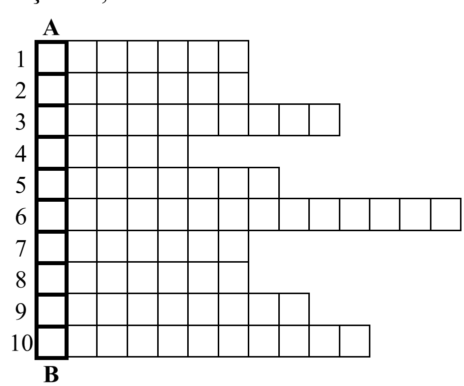
3. Completând pe orizontală cu denumirile corecte, veţi obţine pe verticala **AB**, numele unui instrument folosit în construcţia dreptelor paralele.

1. Propoziţie matematică.
2. Trei puncte situate pe acelaşi segment.
3. Mare matematician din Alexandria.
4. Simbolurile sunt conţinute în .... matematice.
5. Paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.



4. Completaţi pe orizontală cu denumirile corecte, conform definiţiilor date, obţinând, astfel, pe verticala **AB**, denumirea „*reginei ştiinţelor*”, dată de **K.F. Gauss**.

1. Dreapta care uneşte un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.
2. Poziţia punctului P(*x*, *y*) este determinată de... şi de ordonată.
3. ... este determinat de trei puncte necoliniare.
4. Un ansamblu de semne, căruia i s-a dat un sens se numeşte....
5. .... este o noţiune primară.
6. Una din proprietăţile înmulţirii.



IDEI DE ABORDARE

1. De exemplu:

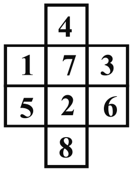


Fig. 12

2.

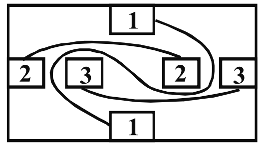


Fig. 13

3. Soluţia este aşa numita „cruce elveţiană”.

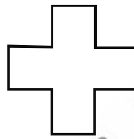


Fig. 14

4.

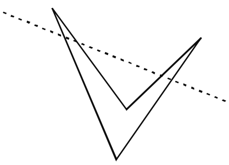


Fig. 15

5.

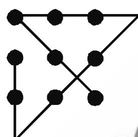


Fig. 16

6.

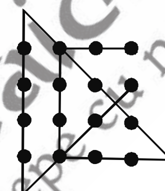


Fig. 17

7. 31 pătrate, 124 triunghiuri, 87 dreptunghiuri.
8. 35 triunghiuri.
9. 78 triunghiuri, 11 hexagoane regulate, 66 romburi.
10. 54 dreptunghiuri.
11. 100 triunghiuri.

12.

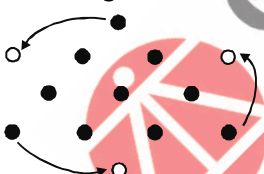


Fig. 18

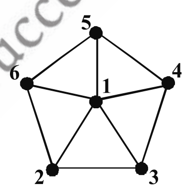


Fig. 19

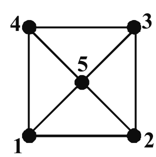


Fig. 20

13. Vârfurile şi centrul unui hexagon regulat **(figura 19)**.
14. Vârfurile şi centrul unui pătrat **(figura 20)**.

15.

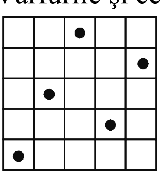


Fig. 21

16.

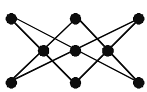


Fig. 22

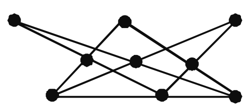


Fig. 23

19. Un calculator afişează un şir de numere astfel că oricare trei termeni consecutivi ai şirului au suma 37. Se ştie că al treilea termen al şirului este 11, iar al zecelea termen al şirului este 9. Aflaţi ce număr va fi al 2002-lea termen al şirului.

(*Arhimede*, 2002)

20. La ceasul din **figura 8**, minutarul a căzut.

a) Aşază minutarul astfel încât cele două limbi să fie perpendiculare.

b) Precizează momentul pe care îl arată ceasul reparat de tine.

(*La şcoala cu ceas*, 2002)

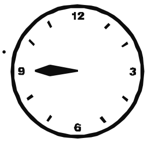


Fig. 8

21. Am ales două numere impare consecutive. Produsul lor l-am mărit cu 1 şi am găsit suma 784. Spune-mi ce numere am ales?

(*La şcoala cu ceas*, 2002)

22. Secţionaţi un paralelogram, cu lungimile laturilor $AD = a$, $AB = 2a$ şi $\sphericalangle A = 60°$, o singură dată, apoi cu cele două poligoane obţinute formaţi:

a) un triunghi echilateral;

b) un dreptunghi. ***(La şcoala cu ceas, 2002)***

23. Pe fiecare din cele 5 rânduri orizontale, verticale şi diagonale din **figura 9** se pot număra 5 cerculeţe. Eliminaţi câte 5 cerculeţe astfel încât pe fiecare rând, coloană, respectiv, diagonală să poată fi numărate numai câte 4 cerculeţe. ***(Arhimede, 2001)***

o	o	o	o	o
o	o	o	o	o
o	o	o	o	o
o	o	o	o	o
o	o	o	o	o

Fig. 9

REȚINEȚI!

Principiul includerii și excluderii

Fiind date mulțimile finite A și B, avem relația:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card }(A \cap B).$$

Fiind date mulțimile finite A, B și C avem:

$$\text{card }(A \cup B \cup C) = \text{card } A + \text{card } B + \text{card } C - \text{card}(A \cap B) -$$

$$- \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card }(A \cup B \cup C).$$

24. Într-o clasă sunt 25 de elevi. 12 joacă handbal și 16 joacă baschet. Câți elevi din clasă joacă handbal și baschet?

25. Câte numere naturale, nenule, cel mult egale cu 2017, sunt divizibile cu 3 sau cu 5 sau cu 7?

26. Se consideră mulțimea $A = \{1; 2; 3; 4; ...; 39; 40\}$.

a) Arătați că există o submulțime B a mulțimii A astfel încât $B \subset A$, card $B = 8$ și oricare ar fi patru elemente distincte două câte două din mulțimea B, suma a două dintre aceste numere nu este egală cu suma celorlalte două elemente.

b) Considerăm mulțimea $C = B \cup \{a\}$, unde $a \in A$ și $a \notin B$. Demonstrați că în mulțimea C există patru elemente distincte două câte două încât suma a două dintre ele este egală cu suma celorlalte elemente. ***(Artur Bălăucă)***