

EDITURA PARALELA 45

colecția

concursuri
școlare

Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.

Redactare: Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Matematică : Olimpiade și concursuri școlare : clasele VII-VIII : 2019-2020 / Gheorghe Căiniceanu (coord.), Emilia-Ștefania Răducan, Carmen-Victorița Chirfot, - Pitești : Paralela 45, 2020
ISBN 978-973-47-3312-5

I. Căiniceanu, Gheorghe
II. Răducan, Emilia-Ștefania
III. Chirfot, Carmen-Victorița

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro
sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2020

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

www.edituraparelela45.ro

GHEORGHE CĂINICEANU
(coordonator)
EMILIA-ȘTEFANIA RĂDUCAN, CARMEN-VICTORIȚA CHIRFOT,
GABRIELA-ROXANA BONDOC, MARIANA DRAGA-TĂTUCU,
DANIEL STRETCU, VLAD LUNGU, LEONARD GIUGIUC,
TOMIȚĂ-CONSTANTIN VASILE, ELENA RÎMNICEANU

matematică

olimpiade și concursuri școlare
clasele VII-VIII

2019-2020

Editura Paralela 45

clasa a VII-a



ETAPA LOCALĂ

Alba

7.0.1. Arătați că $\frac{a}{\sqrt{673 \cdot 875 - b}} > 1$, unde:

$$a = 27\sqrt{27} + 48\sqrt{48} + 75\sqrt{75} + \sqrt{1875}, \text{ iar } b = \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{6}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{2018}\right).$$

7.0.2. a) Determinați numărul natural $n = \overline{ab}$, pentru care $7\sqrt{n} = 4(a + b)$.

b) Găsiți numerele naturale \overline{abcd} , pentru care este adevărată relația:

$$\sqrt{1 \cdot \sqrt{a} + 2 \cdot \sqrt{b} + 3 \cdot \sqrt{cb} + 4 \cdot \sqrt{c}} = d.$$

7.0.3. Se dă $\triangle ABC \equiv \triangle CDE$, cu $AB \equiv AC \equiv CD \equiv CE$, $\sphericalangle ACD = 90^\circ$, A și E de o parte și de alta a lui BC . Dacă M , respectiv N sunt mijloacele segmentelor AD , respectiv BE , iar P este simetricul lui M față de N , arătați că $BMEP$ este pătrat.

7.0.4. În pătratul $ABCD$ de centru O , fie $M \in BD$, $N \in AC$, astfel încât $DM = NO = \frac{AC}{4}$ și

$E, F \in DC$, astfel încât $DE = EF = \frac{DC}{3}$. Arătați că:

- punctele A, M, E sunt coliniare;
- $FO \perp BN$;
- are loc relația $6 \cdot GO = AE$, unde $AF \cap OE = \{G\}$.

Arad

7.0.5. Fie $x = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5^2} + \sqrt{5^3} + \dots + \sqrt{5^{2019}}$.

- Arătați că $x + 5^{1010} = x\sqrt{5} + 1$.
- Arătați că $\frac{4x}{\sqrt{5} + 1} + 1$ este pătratul unui număr natural.

7.0.6. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB < CD$, $AC \perp BD$. Dacă N este un punct oarecare pe segmentul OC , unde $AC \cap BD = \{O\}$ și P este intersecția perpendicularei din C pe DN cu dreapta BD , arătați că $BN \perp AP$.

7.0.7. a) Determinați numerele naturale de forma \overline{ab} , scrise în baza 10 cu cifre distincte, astfel încât $a + b = 10$ și $[\sqrt{ab}] = 6$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

b) Determinați numerele de forma \overline{abc} , scrise în baza 10 cu cifre distincte, astfel încât $a \cdot b = c$ și $n = \sqrt{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} - (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) - (a + b + c)}$ este număr natural.

7.0.8. Fie dreptunghiul $MNPQ$, S simetricul punctului P față de N , $QS \cap MN = \{R\}$, $PR \cap MQ = \{T\}$.

a) Demonstrați că $TS = MN$.

b) Dacă $PR \cap QN = \{A\}$, demonstrați că $AT = 2 \cdot PA$.

Argeș

7.0.9. a) Aflați numerele întregi x , diferite de -1 , astfel încât $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}$ să fie număr întreg.

Gazeta Matematică nr. 5/2011

b) Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ numere naturale impare. Arătați că numărul $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2020}^2 - 1}$ este irațional.

7.0.10. a) Arătați că ecuația $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1006}} + \frac{1}{\sqrt{2012-x} + \sqrt{1006}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2012-x}}$ are 2013 soluții în mulțimea numerelor întregi.

Gazeta Matematică nr. 3/2013

b) Dacă $a = \frac{1}{63} + \frac{2}{62} + \frac{3}{61} + \dots + \frac{63}{1}$ și $b = \frac{1}{64} + \frac{2}{63} + \frac{3}{62} + \dots + \frac{64}{1}$, arătați că $b - a > 3$.

7.0.11. Se consideră paralelogramul $ABCD$. O dreaptă d taie laturile AD și BC în punctele M , respectiv N , astfel încât $AM = CN$, M între A și D , N între B și C . De asemenea, o altă dreaptă s taie laturile AB și CD în punctele P , respectiv Q , astfel încât $AP = CQ$, P între A și B , Q între C și D .

a) Arătați că dreapta s trece prin mijlocul segmentului MN .

b) Arătați că dacă $\mathcal{A}_{MPNQ} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$, atunci M este mijlocul segmentului AD sau P este mijlocul segmentului AB .

7.0.12. Considerăm un cerc de centru O și triunghiul ABC înscris în cerc, astfel încât $\widehat{AC} = 120^\circ$, $AD \perp BC$, D situat pe segmentul BC , O situat pe segmentul AD , $DE \perp AC$, $E \in AC$. Dacă M este mijlocul segmentului DE , arătați că $AM \perp BE$.

Gazeta Matematică nr. 12/2019 – enunț modificat

Bacău

7.0.13. Sunt date 2019 greutateți marcate cu masele de 1 g, 2 g, ..., 2019 g.

- Arătați că din oricare 6 greutateți de mase $m, m + 1, m + 2, m + 3, m + 4, m + 5$ se pot forma trei grămăjoare de mase egale.
- Arătați că se pot forma trei grămezi de mase egale cu cele 2019 greutateți.
- Dar dacă aveți 2020 greutateți marcate cu masele 1 g, 2 g, ..., 2020 g, puteți forma cu ele trei grămezi de mase egale? Justificați răspunsul.

7.0.14. Arătați că $\sqrt{2^{2018} + 3^{2020} + 4^{2022}}$ nu este număr rațional.

7.0.15. Fie paralelogramul $ABCD$. Punctul M este mijlocul laturii BC , O este intersecția diagonalelor paralelogramului și $\{N\} = DM \cap AC$. Determinați aria paralelogramului $ABCD$, știind că aria triunghiului MON este egală cu 2 cm^2 .

7.0.16. În triunghiul ABC ascuțitunghic, cu $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$, se consideră $BD \perp AC$ ($D \in AC$), $CE \perp AB$ ($E \in AB$) și M mijlocul laturii BC . Arătați că triunghiul DEM este echilateral.

Bihor

7.0.17. Punctul D este în interiorul triunghiului ABC , astfel încât unghiurile BAC și BDC sunt suplementare, (BE este bisectoarea unghiului ABD și (CE este bisectoarea unghiului ACD . Aflați măsura unghiului BEC .

7.0.18. Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, iar m și n divizori ai lui a , cu $m < n$. Arătați că $a \cdot (n - m) > m^2$.

7.0.19. Se consideră paralelogramul $ABCD$, E simetricul lui C față de B și $BF \perp AC$, $F \in AC$. Știind

că $DF \perp FE$, calculați $\frac{2DC + 3DE}{5DC + DE}$.

7.0.20. Fie numerele $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$, astfel încât $\{x_1, x_2, \dots, x_{2022}\} = \{1, 2, \dots, 2022\}$. Arătați că printre numerele $|x_1 - 1|, |x_2 - 2|, |x_3 - 3|, \dots, |x_{2022} - 2022|$ există cel puțin două egale.

Bistrița-Năsăud

7.0.21. Arătați că $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2020}} < \frac{5}{4}$.

7.0.22. Câte numere de forma \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}$, care nu sunt raționale, există între numerele:

$$a = \sqrt{4 \cdot \underbrace{100\dots 01^2}_{9 \text{ zerouri}}} \text{ și } b = \sqrt{\underbrace{200\dots 03}_{9 \text{ zerouri}} \cdot \underbrace{200\dots 03}_{9 \text{ zerouri}}}$$

7.0.23. Fie $ABCD$ paralelogram cu aria $64\sqrt{5} \text{ cm}^2$. Dacă E este mijlocul lui AB , aflați aria triunghiului DEB .

7.0.24. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ și A un punct exterior cercului, astfel încât unghiul format de tangentele la cerc AM și AN ($M, N \in \mathcal{C}(O, r)$) are măsura de 30° . Dacă P este mijlocul segmentului AO , arătați că triunghiul MNP este echilateral.

Botoșani

7.0.25. Fie numerele:

$$a = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{\sqrt{2024 \cdot 2025}} \text{ și}$$

$$b = \frac{360}{\sqrt{18}} + \frac{5}{(3-3\sqrt{2})^{2019}} \cdot \frac{(10-6\sqrt{2})^{2020}}{2^{2018}}.$$

Arătați că numerele a și b sunt raționale.

7.0.26. a) Arătați că există cel puțin o pereche de numere naturale (x, y) , astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2019}$.

b) Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2019}$. Arătați că $\sqrt{\left(\frac{x}{3} - 673\right)\left(\frac{y}{3} - 673\right)} \in \mathbb{N}$.

7.0.27. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și BCF .

a) Demonstrați că dreptele AF și DE sunt perpendiculare.

b) Dacă $AF \cap CE = \{P\}$, arătați că B, P și D sunt puncte coliniare.

7.0.28. În triunghiul ABC ascuțitunghic, cu $\sphericalangle A = 60^\circ$, se consideră $BD \perp AC$, $D \in (AC)$, $CE \perp AB$, $E \in (AB)$ și M mijlocul laturii BC . Arătați că triunghiul DEM este echilateral.

Brașov

7.0.29. Fie numerele $x = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \dots + \sqrt{3^{2020}}$ și $y = 3^{1011} - \sqrt{3}$. Calculați partea întreagă a numărului $\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{y}{x}$.

Ioana Mașca

7.0.30. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\left|x - \frac{3}{2}\right| + |x - 1| = x - 2;$

b) $\left[x - \frac{3}{2}\right] + [x - 1] = x - 2.$

clasa a VIII-a



ETAPA LOCALĂ

Alba

8.0.1. a) Arătați că $\left(\frac{5}{2a+1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2a^2+3a+1}\right) : \frac{3a+3}{2a^2-a-1} \cdot (a+1) < a^2 - a$, pentru orice $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

b) Aflați minimul expresiei $E = a^2 + b^2 - ab - a - b + 2021$.

8.0.2. a) Rezolvați ecuația $\sqrt{x - \sqrt{11 + \sqrt{x^2}}} = 1$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $3x^2 - 2xy - y - 1 = 0$.

8.0.3. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ cu $AB = 2a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, $AE = a\sqrt{3}$. Arătați că:

a) $AC + AF + AH \geq (3a\sqrt{3} + 2a)\sqrt{2}$;

b) dacă M este mijlocul muchiei AE , iar $AH \cap MD = \{S\}$, $AF \cap MB = \{T\}$, atunci $ST \parallel (FCH)$.

8.0.4. Fie triunghiul echilateral ABC de latură a , $D \in AB$, astfel încât $AD = \frac{a}{6}$ și ducem $DE \perp AB$,

$E \in AC$, unde se ridică $ME \perp (ABC)$.

a) Arătați că $MC^2 > MA \cdot MB$.

b) Aflați lungimea segmentului ME , dacă $3 \cdot MD = 2\sqrt{3} \cdot ME$.

Arad

8.0.5. Se consideră $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $4x^2 + y^2 + 4x - 12y = 12$. Arătați că $x \in [-4; 3]$ și $y \in [-1; 13]$.

8.0.6. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația $3^y + 1 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$.

8.0.7. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub de latură a . Dacă M, N, P, M', N', P' sunt mijloacele muchiilor (AD) , (AB) , (AA') , $(B'C')$, $(D'C')$, respectiv (CC') :

a) demonstrați că planele (MNP) și $(M'N'P')$ sunt paralele;

b) calculați distanța de la punctul A la planul (MNP) .

8.0.8. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului VAC , F este centrul de greutate al triunghiului ABD , iar M este mijlocul segmentului BG , demonstrați că $FM \parallel (VCD)$.

Argeș

8.0.9. a) Arătați că $a^2 + b^2 \geq 2ab$, oricare ar fi numerele $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a, b > 0$.

b) Fie $x, y, z > 0$ numere reale cu $xyz = 6$. Arătați că:

$$\frac{2x}{(2x^2 + y^2)(x^2 + 2z^2)} + \frac{3y}{(3y^2 + z^2)(y^2 + 3x^2)} + \frac{5z}{(5z^2 + x^2)(z^2 + 5y^2)} \leq \frac{1}{8}.$$

Delia Schneider, *Gazeta Matematică* nr. 11/2017

8.0.10. Fie numerele reale x, y, z care satisfac relațiile:

$$(x - \sqrt{2020})(x + \sqrt{2020}) + \sqrt{2018} \cdot y \cdot (2x + \sqrt{2018} \cdot y) = 2019 \cdot z^2 \text{ și} \\ x + \sqrt{2018} \cdot y + \sqrt{2019} \cdot z = 1010.$$

Arătați că $x + \sqrt{2018} \cdot y - \sqrt{2019} \cdot z$ este număr prim.

8.0.11. O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are bazele triunghiuri echilaterale cu latura de lungime a . Știind că dreptele AB' și BC' sunt perpendiculare, aflați:

a) lungimea muchiei laterale;

b) o funcție trigonometrică a unghiului format de planele (BMC') și (ABC) , unde M este mijlocul muchiei AC .

8.0.12. Prin vârfurile A, B, C ale paralelogramului $ABCD$ se consideră dreptele paralele a, b respectiv c . De aceeași parte a planului (ABC) , pe dreptele a, b, c se iau punctele A', B', C' , astfel încât lungimile segmentelor $[AA'], [BB'], [CC']$, exprimate în unități de lungime, să fie egale cu

$$AA' = \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{1 \cdot 2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2 \cdot 3}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+1+2\sqrt{n \cdot (n+1)}}}, n \in \mathbb{N}^*, BB' = \sqrt{2021}, CC' = 1.$$

Determinați n , astfel încât $D \in (A'B'C')$.

Bacău

8.0.13. a) Demonstrați că $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Determinați numerele reale x, y, z , pentru care: $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{x+y+z}{2}$.

8.0.14. a) Fie $n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, dacă și numai dacă n este pătrat perfect.

b) Determinați numerele naturale n , pentru care $\sqrt{n^2 + 8n + 51}$ este număr rațional.

8.0.15. Pe planul pătratului $ABCD$ se construiește perpendiculara SA , astfel încât $SA = AB = a$.

a) Arătați că $BD \perp SC$.

b) Calculați distanța dintre dreptele BD și SC .

c) Dacă M este mijlocul laturii CD , determinați distanța de la punctul S la dreapta BM .

8.0.16. În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, se consideră punctele E, F , respectiv F' , mijloacele laturilor $[AB], [BC], [B'C']$. Muchia bazei este de 6 cm, iar înălțimea $AA' = 9$ cm.

a) Demonstrați că $AF \perp DE$.

b) Calculați tangenta unghiului diedru determinat de planele $(F'DE)$ și (ABC) .

c) Fie punctul P situat pe muchia $[BB']$. Calculați lungimea segmentului BP , știind că perimetrul triunghiului $A'PF$ este minim.

Bihor

8.0.17. Fie tetraedrul regulat $ABCD$ cu lungimea muchiei de 10 cm. Fie M mijlocul muchiei $[AD]$, N mijlocul muchiei $[BC]$ și P mijlocul segmentului $[DN]$. Determinați:

a) poziția dreptei MP față de planul (ABC) ;

b) măsura unghiului format de dreptele MN și BC ;

c) distanța de la punctul C la planul (ABD) .

8.0.18. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația: $7x^2 + 8x + 1 = 4^{2x}$.

8.0.19. Se dau numerele reale $x, y, z > 0$, diferite de 3. Dacă $x + y + z = 3$, arătați că:

$$F(x, y, z) = \frac{x-y}{xy+3z} + \frac{y-z}{yz+3x} + \frac{z-x}{zx+3y} \text{ este constantă.}$$

Daniel Stretcu, *Gazeta Matematică* nr. 12/2019

8.0.20. În fiecare din vârfurile unui cub se pune câte un singur fruct. Fructul poate fi banană, portocală sau măr. Prin *platou* se înțelege orice plan care conține 4 dintre vârfurile cubului. Stabiliți dacă există o așezare a fructelor, astfel încât fiecare platou să conțină toate cele trei tipuri de fructe. Justificați răspunsul.

Bistrița-Năsăud

8.0.21. Determinați numerele reale a, b, c , dacă $a + b + c = 1$ și $ab + bc + ca \geq \frac{1}{3}$.

8.0.22. Arătați că:

a) numărul A este rațional, unde $A = \sqrt{\left(\frac{1}{7-4\sqrt{3}} + \frac{1}{7+4\sqrt{3}}\right)} : \frac{2}{7}$;

b) numărul B este irațional, unde $B = \sqrt{\left[\frac{(7+4\sqrt{3})^n}{4} + \frac{6}{(7-4\sqrt{3})^n}\right]} : \frac{(7-4\sqrt{3})^n}{2}$.

8.0.23. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul (ABC) , $AM = 24$ cm.

a) Determinați măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (MBC) și (ABC) .

b) Arătați că piciorul perpendicularei din A pe planul (MBC) este ortocentrul triunghiului MBC .

8.0.24. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ și $DO \perp (ABC)$. Dacă $M \in (DO)$, astfel încât $MA \perp MB$, arătați că M este mijlocul lui (OD) .

Botoșani

8.O.25. a) Se dă expresia $E(x) = \left(\frac{2x}{x^2 - 2x} - \frac{4x + 12}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12} + \frac{x^2}{x^2 + 2x} \right) \cdot \left(x - \frac{4}{x} \right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}$. Arătați că suma $E(1) + E(3) + E(5) + \dots + E(2021)$ este pătrat perfect.

b) Arătați că $\left(\frac{\sqrt{37} + 1}{6} \right)^{2020} + \left(\frac{\sqrt{37} - 1}{6} \right)^{2020} > 2$.

8.O.26. Arătați că dacă $5a^2 + 5b^2 - 2a - 12b + \frac{28}{5} = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $a + b \in \left[\frac{1}{5}; 2\frac{3}{5} \right]$.

8.O.27. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu muchia $AB = AA' = 12$ cm.

a) Determinați poziția punctului E pe muchia $[AA']$, știind că distanța de la punctul A la planul (EBC) este egală cu $3\sqrt{3}$ cm.

b) Aflați sinusul unghiului dintre dreptele AP și $A'N$, unde N și P sunt mijloacele muchiilor $[BB']$, respectiv $[CC']$.

8.O.28. Fie tetraedrul $ABCD$, în care $AB \perp CD$. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor $[BC]$, respectiv $[BD]$. Pe semidreapta (DM) alegem punctul E , astfel încât $DE = 2DM$, iar pe semidreapta (CN) alegem punctul F , astfel încât $CF = 2CN$.

a) Demonstrați că dreapta CD este paralelă cu planul (AEF) .

b) Demonstrați că triunghiul AEF este isoscel.

Brașov

8.O.29. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $[2019x] + \{2020x\} = 2020$. Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a și cu $\{a\}$ partea fracționară a numărului a .

Ioana Ciocîrlan

8.O.30. Fiind date numerele $A = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ și $B = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, arătați că:

a) $\sqrt{A+B} \notin \mathbb{Q}$, pentru orice număr natural n ;

b) unul și numai unul dintre numerele A și B este divizibil cu 5, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Dorina Rapcea

8.O.31. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ și punctele M și N mijloacele muchiilor BC , respectiv VD . Arătați că $AB = AV$, dacă și numai dacă măsura unghiului dintre dreptele AB și MN este egală cu 30° .

8.O.32. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AD \perp (BCD)$, iar $AD^2 = BD^2 + CD^2$. Fie E și F proiecțiile lui D pe AB , respectiv AC .

a) Știind că $EF \cap (BCD) = \{P\}$, astfel încât $BC = 3CP$, aflați raportul dintre aria triunghiului AEF și aria triunghiului ABC .

b) Arătați că există un punct $O \in (BCD)$, egal depărtat de punctele B, C, D, E și F .

Dorina Rapcea

soluții

Clasa a VII-a

ETAPA LOCALĂ

Alba

$$7.0.1. a = 27 \cdot 3\sqrt{3} + 48 \cdot 4\sqrt{3} + 75 \cdot 5\sqrt{3} + 25\sqrt{3} = 673\sqrt{3}, b = \frac{7}{5} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{9}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2020}{2018} = \frac{2019 \cdot 2020}{5 \cdot 6} = 673 \cdot 202 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{673 \cdot 875 - b}} = \frac{673\sqrt{3}}{\sqrt{673 \cdot 875 - 673 \cdot 202}} = \frac{673\sqrt{3}}{\sqrt{673 \cdot (875 - 202)}} = \frac{673\sqrt{3}}{673} = \sqrt{3} > 1.$$

7.0.2. a) $7\sqrt{n} = 4(a+b) \in \mathbb{N} \Rightarrow 7\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow n$ este pătrat perfect $\Rightarrow n = \overline{ab} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$, dar

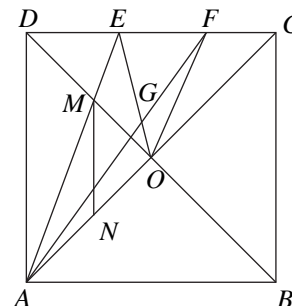
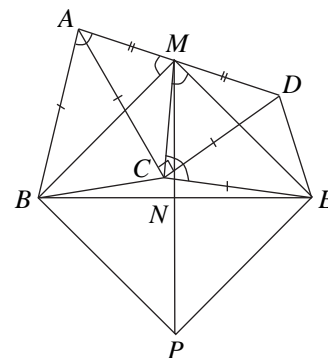
$7\sqrt{n} : 4$ și cum $7 \not\vdots 4 \Rightarrow \sqrt{n} : 4 \Rightarrow n : 16 \Rightarrow n \in \{16, 64\}$. Dacă $n = 16 \Rightarrow 7 \cdot 4 = 4(a+b) \Rightarrow 7 = 1 + 6 \Rightarrow n = 16$ convine. Dacă $n = 64 \Rightarrow 7 \cdot 8 = 4(a+b) \Rightarrow 14 = 6 + 4$, fals. Deci, $\overline{ab} = 16$; b) Cum $d \in \mathbb{N} \Rightarrow a, b, c$ și \overline{cb}

pătrate perfecte $\Rightarrow \overline{cb} = 49, c = 4$ și $b = 9 \Rightarrow$ egalitatea dată devine $\sqrt{1\sqrt{a} + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 2} = d \Rightarrow \sqrt{\sqrt{a} + 35} = d$.

Cum a - pătrat perfect și a - cifră $\Rightarrow a \in \{0, 1, 4, 9\}$. Pentru $a = 0 \Rightarrow \sqrt{35} = d$, fals; pentru $a = 1 \Rightarrow \sqrt{36} = d \Rightarrow d = 6$; pentru $a = 4 \Rightarrow \sqrt{37} = d$, fals; pentru $a = 9 \Rightarrow \sqrt{38} = d$, fals. Deci, $\overline{abcd} = 1946$.

7.0.3. $\triangle ABC \equiv \triangle CDE$ și $AB = AC = CD = DE \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ECD$. Din $AC \equiv CD$ și $m(\sphericalangle ACD) = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACD$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CDA = 45^\circ$. $\triangle ACD$ - isoscel și M - mijlocul lui $AD \Rightarrow CM$ este mediană, înălțime și bisectoarea $\sphericalangle ACD \Rightarrow m(\sphericalangle ACM) = m(\sphericalangle DCM) = 45^\circ$ și $CM = \frac{1}{2}AD = AM = MD$. $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle CAM) = m(\sphericalangle BAC) + 45^\circ$ și $m(\sphericalangle ECM) = m(\sphericalangle ECD) + m(\sphericalangle DCM) = m(\sphericalangle ECD) + 45^\circ$ și cum $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ECD \Rightarrow \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ECM$. Dar $AB = CE$ și $AM = CM \xrightarrow{(L.U.L.)} \triangle ABM \equiv \triangle CME \Rightarrow \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CME$ și $BM \equiv ME$. N - mijlocul lui BE și N - mijlocul lui $MP \Rightarrow BMEP$ este paralelogram cu $BM = ME \Rightarrow BMEP$ este romb. Pe de altă parte, $m(\sphericalangle BME) = m(\sphericalangle BMC) + m(\sphericalangle CME) = m(\sphericalangle BMC) + m(\sphericalangle AMB) = m(\sphericalangle AMC) = 90^\circ \Rightarrow BMEP$ este pătrat.

7.0.4. a) În $\triangle AEC$, FO - linie mijlocie $\Rightarrow FO \parallel AE$ (1). În $\triangle DFO$, EM - linie mijlocie $\Rightarrow FO \parallel EM$ (2) $\Rightarrow A, E$ și M sunt coliniare; b) În $\triangle ADO$, MN - linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel AD$, dar $AD \perp AB \Rightarrow MN \perp AB$. În $\triangle ABM$ avem $MN \perp AB$, deci MN este înălțime, $AO \perp BM$, deci AO este înălțime, iar $MN \cap AO \cap BN = \{N\}$, deci N este ortocentrul triunghiului $ABM \Rightarrow BN \perp AM$; dar $AE \parallel FO, M \in AE \Rightarrow FO \perp BN$; c) În $\triangle AEC$ avem AF - mediană, EO - mediană și



CUPRINS

	enunțuri	soluții
clasa a VII-a		
Etapa locală	5	74
Concursuri interjudețene.....	26	107
clasa a VIII-a		
Etapa locală	39	124
Concursuri interjudețene.....	62	165