

# EDITURA PARALELA 45

colecția

concurșuri  
școlare

*Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.*

Redactare: Roxana Pietreanu  
Tehnoredactare: Iuliana Ene  
Pregătire de tipar: Marius Badea  
Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**Matematică : Olimpiade și concursuri școlare : clasele IV-VI : 2019-2020 /**

Gheorghe Căiniceanu (coord.), Emilia-Ștefania Răducan, Carmen-Victorița Chirfot, .... - Pitești : Paralela 45, 2020  
ISBN 978-973-47-3311-8

I. Căiniceanu, Gheorghe  
II. Răducan, Emilia-Ștefania  
III. Chirfot, Carmen-Victorița

51

**COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ**

EDITURA PARALELA 45  
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,  
jud. Argeș, cod 110177  
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918  
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492  
E-mail: [comenzi@edituraparelela45.ro](mailto:comenzi@edituraparelela45.ro)  
sau accesați [www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*  
E-mail: [tipografie@edituraparelela45.ro](mailto:tipografie@edituraparelela45.ro)

Copyright © Editura Paralela 45, 2020

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.  
[www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

GHEORGHE CĂINICEANU  
(coordonator)  
EMILIA-ȘTEFANIA RĂDUCAN, CARMEN-VICTORIȚA CHIRFOT,  
GABRIELA-ROXANA BONDOC, MARIANA DRAGA-TĂTUCU,  
DANIEL STRETCU, VLAD LUNGU, LEONARD GIUGIUC,  
TOMIȚĂ-CONSTANTIN VASILE, ELENA RÎMNICEANU

# matematică

olimpiade și concursuri școlare  
clasele IV-VI

---

---

2019-2020

Editura Paralela 45

# clasa a IV-a



## ETAPA LOCALĂ

### Ilfov

**4.O.1.** a) Calculați  $5 \cdot [326 - 16 \cdot (54 : 9)] + 870$ .

b) Aflați termenul necunoscut din egalitatea  $3 + 3 \cdot [3 + 3 \cdot (3 + 3 \cdot 3)] = (3a + 3) \cdot 3 + 3$ .

**4.O.2.** Cinci prieteni, Ioana, Diana, Daniel, Cornel și Cristina, vor să cumpere o culegere de matematică.

Fiecare copil participă cu o sumă de bani astfel: Ioana și Diana cu 8 lei împreună, Ioana și Daniel cu 12 lei împreună, Ioana și Cornel cu 16 lei împreună, iar Ioana și Cristina cu 20 lei împreună. Aflați cu ce sumă de bani participă Ioana, știind că ceilalți patru prieteni participă cu 44 de lei în total.

**4.O.3.** Scrieți toate numerele naturale impare de forma  $\overline{abcd}$  cu toate cifrele distincte care au cifra zecilor 7 și suma cifrelor 11.

**4.O.4.** Trei buchete de trandafiri și patru buchete de lalele costă 260 lei, iar cu jumătate din prețul unui buchet de trandafiri se poate cumpăra un singur buchet de lalele, rămânând un rest de 10 lei. Care este prețul unui buchet de trandafiri?



## CONCURSURI INTERJUDEȚENE

### „Concurs de selecție Centrul Județean de Excelență Dolj”, Craiova, 28 septembrie 2019

**4.C.1.** a) Aflați numărul necunoscut  $a$ , dacă:

$$2019 - (6 \times 7 - 7 \times 4) : a + (9 \times 8 - 16 \times 3) : 6 = 9 \times 32 \times 7.$$

b) Calculați  $A : 11$ , dacă  $A = 12 + 23 + 34 + 45 + 56 + 67 + 78 + 89 + 91$ .

**4.C.2.** a) Ionel calculează produsul tuturor numerelor naturale impare mai mari decât 10 și mai mici decât 57. A obținut un număr care are ultima cifră 7. A calculat corect? Justificați răspunsul.

b) Maria are cu 7 mai multe colege decât colegi. În clasă sunt de două ori mai multe fete decât băieți. Câți colegi are Andrei, colegul Mariei?

- 4.C.3.** Un număr natural mai mare decât o sută se numește *senzațional*, dacă fiecare cifră, cu excepția primelor două, este suma celor două cifre din stânga sa (de exemplu, 1235 este *senzațional* deoarece  $3 = 1 + 2$  și  $5 = 2 + 3$ ).
- a) Dați exemplu de un număr *senzațional* de șase cifre. Justificați răspunsul.  
b) Care este cel mai mare număr *senzațional*? Justificați răspunsul.
- 4.C.4.** Se consideră numărul  $A = 36912151821\dots 2019$  obținut prin alipirea numerelor din șirul 3, 6, 9, 12, 15, ..., 2019, în această ordine.
- a) Ce cifră se găsește pe poziția 25 în numărul  $A$ ? Cifrele se numără de la stânga la dreapta. Justificați răspunsul.  
b) Câte cifre are numărul  $A$ ? Justificați răspunsul.

### „Cristian S. Calude”, Galați, 19 octombrie 2019

- 4.C.5.** Cel mai mic număr de forma  $\overline{abc}$ , știind că  $(a + 2) \cdot (8 + b \cdot c) = 96$  este:  
A. 228;                      B. 244;                      C. 164;                      D. 146;                      E. Alt răspuns.
- 4.C.6.** Un tren cu lungimea de 125 metri intră într-un tunel și iese în totalitate din tunel după 7 minute și jumătate. Știind că trenul parcurge în fiecare minut 250 metri, determinați ce lungime are tunelul?  
A. 1 250 metri;              B. 2 000 metri;              C. 1 750 metri;              D. 1 500 metri;              E. Alt răspuns.
- 4.C.7.** Din produsul primelor două numere de două cifre scădeți cel mai mare număr par mai mic decât triplul lui 15. Ce rezultat ați obținut?  
A. 68;                      B. 85;                      C. 66;                      D. 87;                      E. Alt răspuns.
- 4.C.8.** Numărul 8 355 rotunjit la cifra sutelor este:  
A. 8 350;                      B. 8 360;                      C. 8 450;                      D. 8 460;                      E. Alt răspuns.
- 4.C.9.** Suma a două numere este egală cu rezultatul calculului  $4\,014 + 4\,014 : 9 - 4 \times (470 + 471)$ . Împărțind suma celor două numere la diferența lor, se obțin câtul 3 și restul 6. Determinați cel mai mic dintre cele două numere.  
A. 233;                      B. 463;                      C. 696;                      D. 230;                      E. Alt răspuns.
- 4.C.10.** Determinați termenul necunoscut din  $x : 9 = 123$ .  
A. 1 117;                      B. 1 223;                      C. 1 107;                      D. 132;                      E. Alt răspuns.
- 4.C.11.** Întrebat ce a vânat, un vânător răspunde: în afară de 4 animale, toate sunt vulpi, în afară de 4 animale toți sunt mistreți, în afară de 4 animale, toți sunt urși, în afară de 4 animale, toți sunt lupi. Câte animale a vânat vânătorul?  
A. 16;                      B. 12;                      C. 6;                      D. 5;                      E. Alt răspuns.
- 4.C.12.** Un număr scris cu patru cifre are suma cifrelor 36. Care este suma cifrelor cu care este scris succesorul său?  
A. 1;                      B. 46;                      C. 44;                      D. 9;                      E. Alt răspuns.
- 4.C.13.** Fie un număr natural. Triplăm numărul și apoi scădem 54 din el. Procedăm astfel de trei ori și obținem 0. Determinați numărul.  
A. 36;                      B. 26;                      C. 24;                      D. 56;                      E. Alt răspuns.

- 4.C.14.** La produsul numerelor 268 și 3 adăugați câtul numerelor 267 și 3. Rezultatul obținut este:  
 A. 268;                      B. 575;                      C. 893;                      D. 267;                      E. Alt răspuns.
- 4.C.15.** Știind că dintre șase numere consecutive al treilea este 5 789, atunci al șaselea număr este:  
 A. 5 788;                      B. 5 792;                      C. 5 787;                      D. 5 793;                      E. Alt răspuns.
- 4.C.16.** Într-un parc zoo sunt 21 de girafe și elefanți. S-au mai adus 5 girafe și 2 elefanți. Acum numărul girafelor este egal cu numărul elefanților. Câți elefanți erau la început în parcul zoo?  
 A. 9;                              B. 12;                              C. 10;                              D. 11;                              E. Alt răspuns.
- 4.C.17.** În cele 9 căsuțe ale unui pătrat este scrisă la început cifra 0. Alegeți un pătrat format din patru căsuțe alăturate și măriți cu câte o unitate toate cele patru numere din căsuțele pătratului ales. Repetați operația de 100 de ori. În final se obține:

20	$a$	19
$b$	$c$	$d$
43	$e$	$f$

Ce număr este în căsuța lui  $f$  ?

- A. 63;                              B. 39;                              C. 62;                              D. 18;                              E. Alt răspuns.
- 4.C.18.** O furnică duce câte un grăunte la fiecare 12 minute, de la o grămadă de grăunțe la mușuroiul său. Știind că furnica merge 3 metri pe minut cu grăunțele și 6 metri pe minut fără grăunțe, care este distanța de la grămada de grăunțe la mușuroi?  
 A. 20 metri;                      B. 24 metri;                      C. 36 metri;                      D. 9 metri;                      E. Alt răspuns.
- 4.C.19.** Rezultatul calculului  $789 + 4 \times 47$  este egal cu:  
 A. 977;                              B. 3 727;                              C. 779;                              D. 987;                              E. Alt răspuns.
- 4.C.20.** Următorul număr din șirul 1, 5, 13, 29, 61, ... este:  
 A. 125;                              B. 183;                              C. 122;                              D. 128;                              E. Alt răspuns.
- 4.C.21.** Suma a trei numere este 149. Dacă scădem din fiecare număr considerat același număr  $x$ , obținem numerele 37, 41 și 53. Determinați diferența dintre cel mai mare și cel mai mic număr considerat.  
 A. 112;                              B. 94;                              C. 16;                              D. 12;                              E. Alt răspuns.
- 4.C.22.** Un trandafir și 4 lalele costă împreună 33 lei, iar patru trandafiri și o lalea costă 42 lei. Cât costă un trandafir și o lalea împreună?  
 A. 7;                              B. 9;                              C. 10;                              D. 15;                              E. Alt răspuns.
- 4.C.23.** Un elev are 22 de bancnote de 3, 5 și 10 lei și trebuie să plătească 105 lei. În câte moduri poate face plata?  
 A. Nu poate efectua plata cu aceste bancnote;                      B. 1;  
 C. 2;                              D. 3;                              E. Alt răspuns.
- 4.C.24.** Determinați câte numere naturale de trei cifre dau restul egal cu 1 prin împărțirea la 9.  
 A. 101;                              B. 98;                              C. 99;                              D. 100;                              E. Alt răspuns.

# clasa a V-a



## ETAPA LOCALĂ

### Alba

**5.0.1.** Comparați numerele  $A$  și  $B$ , unde:

$$A = [3 + 9 \cdot 3^{24} + 3^{85} \cdot 3^{16} + 3 \cdot (3^3)^{25}] : (1 + 3^{25} + 3^{100} + 3^{75}) \cdot 2^{99},$$
$$B = 3^{68} - \{3^3 \cdot 15 - [5 - (10001 - 9376) : 5^3] \cdot 5^{2020} - 27 \cdot 3^2\} \cdot 3^{63}.$$

**5.0.2.** a) Aflați  $x$  din egalitatea:

$$2019^0 + 3 \cdot \{5^2 + 2^2 \cdot [3^5 - 3^2 \cdot (x - 2011)]\} = 2020.$$

b) Arătați că numărul  $x = \overline{20ab} - \overline{b(a+1)}$  este pătrat perfect, știind că are loc egalitatea:

$$\overline{abba} + \overline{abb} - \overline{aa} - b = 1 + 3 + 5 + \dots + 89 + 25^3 : 25^2.$$

**5.0.3.** La un restaurant s-au adus cartofi. În prima zi s-a consumat o cincime din cantitatea de cartofi.

A doua zi s-a consumat o cincime din rest. A treia zi s-a folosit un sfert din cantitatea rămasă.

În a patra zi s-a folosit jumătate din cantitatea rămasă. Pentru a cincea zi au rămas 54 kg de cartofi.

Ce cantitate de cartofi a fost adusă?

**5.0.4.** a) Un număr natural împărțit la 13 dă restul 1 și împărțit la 3 dă restul 2. Care este restul împărțirii numărului la 39?

b) Trei numere naturale  $a$ ,  $b$ ,  $c$  îndeplinesc condițiile:  $a + 2b + 5c = 51$ ,  $5b = 8c$  și  $2c = a$ . Determinați cele trei numere.

### Arad

**5.0.5.** Se consideră numerele  $a = [5^2 + 9^3 - (2^{15})^4 : 2^{56} - (14 + 4 \cdot 2^0)^2 : 3] : (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$  și  $b = (16 \cdot 19 - 18 \cdot 16)^4 : 8^5$ . Determinați restul împărțirii sumei  $a^{2018} + b^{2020}$  la 5.

**5.0.6.** Se consideră numărul  $a = \underbrace{111\dots11}_{2019 \text{ de } 1}$ .

a) Arătați că  $a + 1 = 2^{2019}$ .

b) Demonstrați că  $a + 1$  se poate scrie ca sumă de patru numere impare consecutive.

**5.0.7.** Suma resturilor obținute prin împărțirea numerelor naturale  $1, 2, 3, \dots, n - 1, n$  la 21 este egală cu 20166. Determinați valoarea lui  $n$ .

**5.0.8.** Determinați numerele naturale  $n$  care verifică simultan relațiile  $21 \mid (n + 4)$  și  $131 \leq n \leq 215$ .

## Argeș

**5.O.9.** Fie  $n$  un număr natural. Notăm cu  $S(n)$  și  $U(n)$  suma cifrelor numărului natural, respectiv ultima cifră a sa. Determinați numerele naturale  $n$  care au proprietatea  $n + S(n) + U(n) = 2030$ .

**5.O.10.** a) Un număr natural  $\overline{ab}$  se numește *olimpic* dacă restul împărțirii lui  $a$  la  $b$  este 1. Determinați toate numerele *olimpice*  $\overline{ab}$ .

b) Un pătrat este împărțit în  $12 \times 12$  pătrățele, completate cu 15 numere egale cu 0 și 129 de numere egale cu 1. Arătați că există cel puțin un număr 1 care are toți vecinii săi (pe linie, pe coloană și pe diagonală) egali cu 1.

Adrian Boțan, *Gazeta Matematică* nr. 2/2019

**5.O.11.** a) Calculați  $a = 10^2 - 7^2$  și  $b = 85^2 - 68^2$ .

b) Scrieți numărul  $51^n$  ca o diferență de două pătrate perfecte nenule, unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**5.O.12.** La biblioteca școlii, în data de 15 ianuarie 2020, cu ocazia aniversării zilei de naștere a marelui poet Mihai Eminescu, un sponsor a donat un lot de  $n$  cărți care să fie oferite elevilor ce pot să recite, din memorie, măcar o poezie a marelui poet, prozator și jurnalist român. Doamna bibliotecară este rugată să așeze cărțile în cele  $x$  cutii puse la dispoziție tot de generosul sponsor. Dacă ar așeza câte 42 de cărți în fiecare cutie, ar rămâne 110 cărți, iar dacă ar așeza câte 50 de cărți în fiecare cutie ar rămâne 5 cutii goale.

a) Aflați numerele  $n$  și  $x$ .

b) Știind că toate cărțile au fost etichetate pe copertă cu numerele 1, 2, 3, ...,  $n$ , arătați că, oricum am lua la întâmplare 11 cărți, sigur am găsi două cărți care au înscrise pe copertă numere care se termină cu aceeași ultimă cifră.

## Bacău

**5.O.13.** La un concurs de șah au participat toți cei 30 de elevi ai unei clase. Primul băiat a jucat cu 3 fete, al doilea băiat a jucat cu 4 fete, al treilea cu 5 fete ș.a.m.d., ultimul jucând cu toate fetele. Câte fete sunt în clasă?

**5.O.14.** Arătați că numărul  $n = 36 \cdot \overbrace{111\dots 1}^{100 \text{ de } 1} + 4$  este pătrat perfect.

**5.O.15.** Determinați valorile naturale ale lui  $n$  și cifra nenulă  $x$  pentru care:

$$3^{n+6} + 3^{n+5} + 3^{n+4} + 2 \cdot 3^{n+3} + 4 \cdot 3^n = \overline{xxxx}.$$

Maria Negrilă și Anton Negrilă, *Gazeta Matematică* nr. 10/2012

**5.O.16.** Arătați că numărul  $a = 2017^{2007} + 2018^{2008} + 2019^{2009} + 2020^{2010}$  nu este pătrat perfect.

## Bihor

**5.O.17.** Un număr  $x$  de 7 cifre, format cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 și 6, are proprietățile:

i) fiecare cifră a numărului  $x$  apare în număr exact o dată;

ii) suma oricăror trei cifre consecutive ale numărului  $x$  este divizibilă cu trei;

iii) oricare două cifre alăturate ale numărului  $x$  au parități diferite;

iv) numărul format din primele două cifre ale numărului  $x$  este un număr prim.

Aflați numărul  $x$ .



**5.O.18.** Determinați ultima cifră a numărului  $4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\dots(a_{2019}+a_1)} - 1$ , unde  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2019}$  sunt numere naturale nenule.

**5.O.19.** Aflați cifrele  $a, b, c, x, y$ , dacă  $\overline{abc} + \overline{ab} + c = \overline{cxya}$ .

**5.O.20.** Fie  $n$  un număr nenul și  $S_n$  suma primelor  $n$  numere naturale impare care nu sunt divizibile cu 5.

a) Arătați că dacă  $n$  se divide cu 4, atunci  $S_n$  se divide cu  $5n$ .

b) Aflați restul împărțirii lui  $S_{2020}$  la 2021.

## ► Bistrița-Năsăud

**5.O.21.** Aflați câte numere de forma  $\overline{a5b}$  se pot scrie, știind că  $a$  și  $b$  sunt cifre distincte, care verifică egalitatea:

$$[3 + (a \cdot b + 31 \cdot 8 - 603 : 3) : 7] \cdot 2 + 1996 = 2020.$$

**5.O.22.** Se consideră numărul  $N = 7 \cdot 4^{10} + 7 \cdot 4^9 + 7 \cdot 4^8 + \dots + 7 \cdot 4^1 + 7$ .

a) Demonstrați că  $N$  este număr impar.

b) Determinați ultima cifră a numărului  $N$ .

c) Arătați că  $N + 5^{2019}$  este divizibil cu 2.

**5.O.23.** a) Calculați  $42^2 + 16^2$ .

b) Scrieți numărul  $2020^5$  ca sumă de două pătrate perfecte.

**5.O.24.** Aflați trei numere naturale, știind că diferența dintre primul și al treilea este 76, împărțindu-l pe al doilea la al treilea obținem câtul 3 și restul 5, iar împărțindu-l pe primul la diferența dintre al doilea și al treilea obținem câtul 2 și restul 6.

## ► Botoșani

**5.O.25.** a) Verificați dacă  $2020 = 44^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2$ .

b) Arătați că  $2020^{2n+1}$  se poate scrie ca sumă de patru pătrate perfecte, oricare ar fi numărul natural  $n$ .

**5.O.26.** a) Se consideră numerele:

$$a = \underbrace{111\dots11}_{2020 \text{ cifre}} + \underbrace{222\dots22}_{2020 \text{ cifre}} + \underbrace{333\dots33}_{2020 \text{ cifre}} + \dots + \underbrace{999\dots99}_{2020 \text{ cifre}} \text{ și}$$

$$b = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots99}_{2019 \text{ cifre}} + 2020.$$

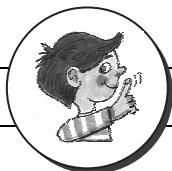
Aflați câtul și restul împărțirii lui  $a$  la  $b$ .

b) Câte numere naturale de trei cifre, nu toate egale, care coincid cu răsturnatele lor, se pot forma folosind cifrele 1, 2, 3, 4, 5?

**5.O.27.** Determinați cel mai mare număr natural de trei cifre  $\overline{abc}$  care împărțit la 16 dă restul 3, iar răsturnatul lui,  $\overline{cba}$ , dă restul 12 la împărțirea cu 15.

**5.O.28.** Orđonați crescător numerele:  $a = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2020}$ ,  $b = 4^1 \cdot 4^3 \cdot 4^5 \cdot \dots \cdot 4^{2021}$ ,  $c = 8^1 \cdot 8^4 \cdot 8^7 \cdot \dots \cdot 8^{2020}$  și  $d = 16^1 \cdot 16^5 \cdot 16^9 \cdot \dots \cdot 16^{2021}$ .

# clasa a VI-a



## ETAPA LOCALĂ

### Alba

**6.0.1.** a) Aflați numărul  $\overline{abc}$ , știind că cifrele sale sunt numere prime care verifică egalitatea:

$$\overline{ab} + 53 \cdot \overline{ac} + \overline{bc} = 2020.$$

b) Determinați numerele naturale prime  $a, b, c, d$  pentru care avem:

$$2a + 5b + 50c + 250d = 2020.$$

**6.0.2.** a) Știind că  $\frac{a}{10} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} = \frac{d}{1} = \frac{e}{11}$ , arătați că  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$ .

b) Scrieți numărul 484 ca o sumă de patru pătrate perfecte.

**6.0.3.** Se consideră un segment  $AB$  și punctele  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$ .

a) Dacă  $AA_1 = 3$  cm,  $A_1A_2 = 3$  cm,  $A_2A_3 = 2 \cdot 3^1$  cm,  $A_3A_4 = 2 \cdot 3^2$  cm,  $A_4A_5 = 2 \cdot 3^3$  cm, ...,  $A_8B = 2 \cdot 3^7$  cm, aflați lungimea segmentului  $AB$ .

b) Dacă  $M$ , respectiv  $P$ , sunt mijloacele segmentelor  $AB$ , respectiv  $A_8B$ , aflați lungimea segmentului  $MP$ .

**6.0.4.** Fie  $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \dots, \sphericalangle HOA$  opt unghiuri în jurul punctului  $O$ , astfel încât  $m(\sphericalangle AOB) = x^\circ$ ,  $m(\sphericalangle BOC) = x^\circ + 6^\circ$ ,  $m(\sphericalangle COD) = x^\circ + 2 \cdot 6^\circ$ ,  $m(\sphericalangle DOE) = x^\circ + 3 \cdot 6^\circ$  etc.

a) Aflați măsurile celor 8 unghiuri.

b) Arătați că unghiul  $BOH$  este drept.

c) Arătați că punctele  $A, O, F$  sunt coliniare.

### Arad

**6.0.5.** a) Determinați numerele naturale de forma  $\overline{abcd}$ , știind că  $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = 611$ .

b) Fie numerele naturale nenule  $a, b$  și  $c$  și proporțiile:  $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{5} = \frac{b}{c}$ . Dacă  $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} = 372$ , determinați numerele  $a, b$  și  $c$ .

**6.0.6.** Se consideră mulțimea  $M = \{ \overline{ab} \mid a > b \text{ și } (a - b)^2 \text{ divide } a + b \}$ . Determinați elementele mulțimii  $M$ .

- 6.0.7.** În jurul punctului  $O$  se consideră cinci unghiuri:  $\sphericalangle AOB$ ,  $\sphericalangle BOC$ ,  $\sphericalangle COD$ ,  $\sphericalangle DOE$ ,  $\sphericalangle EOA$ , astfel încât măsurile unghiurilor  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  sunt direct proporționale cu numerele 3, 12, respectiv 7, iar măsurile unghiurilor  $COD$ ,  $DOE$ ,  $EOA$  sunt invers proporționale cu numerele 4, 2, respectiv 7.
- Aflați măsurile celor cinci unghiuri.
  - Aflați măsura unghiului  $MON$ , unde  $OM$  și  $ON$  sunt bisectoarele unghiurilor  $AOB$ , respectiv  $EOA$ .
- 6.0.8.** Se consideră unghiul ascuțit  $AOB$  și semidreapta  $(OC$ , semidreapta opusă semidreptei  $(OA$ . Construim  $OD \perp OA$  și  $OE \perp OB$ , astfel încât punctele  $D$  și  $E$  sunt de aceeași parte cu  $B$  față de dreapta  $AC$ . Semidreapta  $(OF$  este bisectoarea unghiului  $AOE$ .
- Demonstrați că unghiurile  $AOB$  și  $COE$  sunt complementare.
  - Demonstrați că  $(OF$  este bisectoarea unghiului  $BOD$ .
  - Dacă se știe și că măsura unghiului  $AOB$  este o treime din măsura unghiului  $COE$ , calculați măsura unghiului  $AOF$ .

## Argeș

- 6.0.9.** Fie  $a$  și  $b$  două numere naturale mai mari sau egale cu 2. Dacă  $a$  și  $b$  au același număr de divizori și produsul divizorilor primului număr este egal cu produsul divizorilor celui de-al doilea număr, atunci cele două numere sunt egale.
- 6.0.10.** Se consideră 2021 bile numerotate cu  $4^1, 4^2, 4^3, \dots, 4^{2021}$ . Se aleg două bile oarecare și se înlocuiesc cu o altă bilă pe care se scrie câtul împărțirii dintre cel mai mare și cel mai mic număr înscris pe bile. Noului grup de bile i se aplică același procedeu, până rămâne o singură bilă. Aflați ultima cifră cu care va fi numerotată bila.
- 6.0.11.** În cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  se consideră două diametre  $AB$  și  $CD$ . Construim diametrul  $EF$ , astfel încât semidreapta  $OE$  este bisectoarea unghiului  $AOC$ . Arătați că raza  $OG$ , unde  $G$  este mijlocul arcului mic  $AD$ , este perpendiculară pe  $EF$ . Dacă măsura arcului  $AE$  este  $20^\circ$ , calculați măsura unghiului  $GOD$ .
- 6.0.12.** În jurul punctului  $O$  se consideră 9 unghiuri:  $\sphericalangle A_0OA_1 = x^\circ$ ,  $\sphericalangle A_1OA_2 = (2x + 1)^\circ$ ,  $\sphericalangle A_2OA_3 = (3x + 2)^\circ$ , ...,  $\sphericalangle A_7OA_8 = (8x + 7)^\circ$  și  $\sphericalangle A_8OA_0 = (9x - n)^\circ$ , unde  $x$  și  $n$  sunt numere naturale nenule. Determinați măsurile celor nouă unghiuri.

Traian Preda, *Gazeta Matematică* nr. 12/2019

## Bacău

- 6.0.13.** Aflați numerele naturale nenule  $a$  și  $b$  care au proprietățile:  $3a + 16b = 2020$  și  $cmmmc[a; b] = 35 \cdot cmmdc(a; b)$ .
- 6.0.14.** Un număr de șase muncitori au început o lucrare pe care și-au propus să o termine în 20 de zile, lucrând câte 8 ore pe zi. După 4 zile, doi muncitori pleacă. În cât timp va fi terminată lucrarea, dacă cei rămași lucrează câte 6 ore pe zi?
- 6.0.15.** Semidreptele  $[OA_1, [OA_2, [OA_3, \dots, [OA_{100}$  determină o sută de unghiuri congruente în jurul punctului  $O$ . Se colorează semidreapta  $[OA_1$  și apoi se colorează fiecare a șasea semidreaptă după cea colorată (deci, se colorează  $[OA_1, [OA_7, [OA_{13}, \dots)$ . În acest procedeu de stabilire a semidreptei ce urmează să fie colorată, se numără și semidreptele colorate întâlnite pe parcurs.
- Determinați câte semidrepte rămân necolorate.

b) Demonstrați că rămân semidrepte opuse necolorate după finalizarea procedurii și determinați numărul dreptelor determinate de acestea.

c) Precizați dacă rămân semidrepte necolorate perpendiculare.

**6.O.16.** Considerăm numerele prime  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$  și aceleași numere, eventual în altă ordine, notate  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

a) Aflați  $n$ , știind că produsul  $(p_1 + q_1)(p_2 + q_2)\dots(p_n + q_n)$  este impar.

b) Demonstrați că  $(14^{p_n} - 9^{q_n})(14^{p_{n-1}} - 9^{q_{n-1}})\dots(14^{p_1} - 9^{q_1})$  este divizibil cu  $5^{n-2}$ , pentru orice  $n > 2$ .

## Bihor

**6.O.17.** În jurul punctului  $O$  se formează unghiurile  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOA$  și  $AOB$ . Știind că măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor  $COD$  și  $DOA$  este de  $95^\circ$ , măsura unghiului  $COD$  este două treimi din măsura unghiului  $AOD$  și suplementul unghiului  $AOB$  este egal cu complementul unghiului  $BOC$ , aflați măsurile unghiurilor  $COD$ ,  $DOA$ ,  $AOB$  și  $BOC$ .

**6.O.18.** Fie numărul  $n = 2020^3$ .

a) Descompuneți  $n$  în factori primi.

b) Demonstrați că oricum am alege 9 divizori naturali ai lui  $n$ , între ei există doi al căror produs este pătrat perfect.

c) Aflați cel mai mic număr natural nenul  $m$ , astfel încât oricum am alege  $m$  divizori ai numărului  $n$  între ei să existe doi al căror produs să nu fie pătrat perfect.

**6.O.19.** Se consideră mulțimile  $A = \{3p + 2 \mid p \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = \{5k + 4 \mid k \in \mathbb{N}\}$  și  $C = \{15m + 14 \mid m \in \mathbb{N}\}$ .

a) Verificați dacă numerele 14 și 29 aparțin mulțimii  $A \cap B$ .

b) Arătați că  $A \cap B = C$ .

c) Aflați câte numere  $x$  îndeplinesc condițiile  $x \in C$  și  $500 \leq x \leq 1000$ .

**6.O.20.** Se consideră numerele strict pozitive și distincte  $x_1, x_2, \dots, x_{63}$ , astfel încât  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{63}} > 6$ .

Arătați că cel puțin unul dintre aceste numere nu este natural.

## Bistrița-Năsăud

**6.O.21.** a) Știind că  $\frac{a}{4} = \frac{4b}{13} = \frac{c}{2} = \frac{d}{1}$  și că  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 505$ , aflați numerele naturale  $a, b, c, d$ .

b) Scrieți numărul 2020 ca o sumă de patru pătrate perfecte.

**6.O.22.** Se consideră punctele coliniare  $A, B, C, D$ . Știind că  $AC = 8$  cm,  $BC = 7$  cm și  $AD = 9$  cm, determinați lungimea segmentului  $BD$ .

**6.O.23.** Fie numerele  $a = \frac{5^{74} + 2}{2^{174} + 5}$  și  $b = \frac{5^{71} + 2}{2^{161} + 5}$ . Arătați că  $a < 0,4$  și  $a < b$ .

## CUPRINS

	enunțuri	soluții
<b>clasa a IV-a</b>		
Etapa locală .....	5	74
Concursuri interjudețene.....	5	74
<b>clasa a V-a</b>		
Etapa locală .....	13	80
Concursuri interjudețene.....	30	100
<b>clasa a VI-a</b>		
Etapa locală .....	42	111
Concursuri interjudețene.....	62	138