EDITURA PARALELA 45

colecția

concursuri școlare

Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Editura Paralela 45

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : Olimpiade și concursuri școlare : clasele VII-VIII : 2018-2019 / Gheorghe Căiniceanu (coord.), Emilia-Ștefania Răducan, Carmen-Victorița Chirfot, ... - Pitești : Paralela 45, 2019
ISBN 978-973-47-3111-4

I. Căiniceanu, Gheorghe
II. Răducan, Emilia-Ștefania
III. Chirfot, Carmen-Victorița

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2019
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

EDITURA PARALELA 45

Gheorghe Căiniceanu
(coordonator)
Emilia-Ștefania Răducan, Carmen-Victorița Chirfot,
Mariana Draga-Tătucu, Elena Rîmniceanu,
Tomiță-Constantin Vasile, Leonard Giugiuc,
Daniel Stretcu, Denisa-Nicoleta Neciu, Vlad Lungu

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele VII-VIII

2018-2019

Editura Paralela 45

EDITURA PARALELA 45

clasa a VII-a

ETAPA LOCALĂ

Alba

7.O.1. Arătaţi că:

a) $\sqrt{192+\sqrt{13+\sqrt{6+\sqrt{8}}}}+\sqrt{22+\sqrt{3+\sqrt{35}}}<19$;

b) $\sqrt{11+\sqrt{6}+\sqrt{20}+\sqrt{42}}<5$.

7.O.2. a) Rezolvaţi ecuaţia: $\dfrac{1+2+...+2019}{2020-2019+2018...-1}+1=1+x+2+x+...+40+x$.

b) Arătaţi că ecuaţia $\dfrac{x+2019}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{12-6\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}(y+1010)$ are o infinitate de soluţii numere naturale.

7.O.3. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O, iar $E \in AC$ astfel încât $m(\sphericalangle EBC)=15°$. Fie EF bisectoarea unghiului AEB, $F \in AB$, M mijlocul lui EF, iar $MN \perp AC$, $N \in AC$. Dacă $MN \cap BE=\{P\}$, iar $BE=12$ cm, aflaţi-l pe FP.

7.O.4. Fie E, respectiv F mijloacele laturilor BC, respectiv CD ale paralelogramului $ABCD$. Fie $PE \parallel AF$, $P \in AB$, $PE \cap AC=\{M\}$, $PC \cap FM=\{T\}$, $PC \cap FE=\{S\}$.

a) Arătaţi că $AP=3 \cdot PB$.

b) Arătaţi că $\dfrac{SE}{SF}+\dfrac{TM}{TF}=1$.

Arad

7.O.5. Arătaţi că $\left(\dfrac{7}{1}+1\right)\left(\dfrac{7}{2}+1\right)\left(\dfrac{7}{3}+1\right)\cdot...\cdot\left(\dfrac{7}{9}+1\right)=\left(\dfrac{9}{1}+1\right)\left(\dfrac{9}{2}+1\right)\left(\dfrac{9}{3}+1\right)\cdot...\cdot\left(\dfrac{9}{7}+1\right)$.

7.O.6. Pe prelungirea laturii CD a paralelogramului $ABCD$ se ia punctul P astfel încât $CD=2 \cdot DP$. Notăm $BD \cap AP=\{M\}$, $BC \cap PA=\{N\}$, $DN \cap AB=\{G\}$. Demonstraţi că G este centrul de greutate al triunghiului MBN.

EDITURA PARALELA 45

7.O.7. a) Demonstraţi că $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{2018^2}<1$.

b) Arătaţi că oricare ar fi n, număr raţional pozitiv, astfel încât $\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+...+\frac{2018}{n+2018}=2017$, atunci $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+2018}=\frac{1}{n}$.

7.O.8. În triunghiul ABC, $AB = AC$, $m(\sphericalangle A) = 40°$, considerăm $D \in (AC)$ astfel încât $m(\sphericalangle ABD) = 60°$. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BD în E, iar T aparţine bisectoarei unghiului A, astfel încât $E \in (AT)$ şi $ET = AB$. Arătaţi că $ABTC$ este romb.

Argeș

7.O.9. a) Dacă $x=\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$, $y=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}+\frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{\sqrt{48}}+\frac{\sqrt{9}+\sqrt{8}}{\sqrt{72}}\right):$

$:\frac{1}{3\sqrt{5}}$, calculaţi media geometrică a numerelor x şi y.

b) Aflaţi elementele mulţimii:

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}\ \middle|\ \frac{\left|3\sqrt{5}-7\right|+\sqrt{(3+2\sqrt{5})^2}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2x-5}\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Dumitru Borocan

7.O.10. Arătaţi că, dacă a, b, c sunt numere raţionale pozitive cu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, atunci:

a) $\frac{1}{a+bc}=\frac{a}{(a+c)(a+b)}$;

b) $\frac{1}{c+ab}+\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}=\frac{2}{(a-1)(b-1)(c-1)}$.

Gazeta Matematică nr. 9/2018

7.O.11. Se consideră dreptunghiul $ABCD$, E mijlocul lui (AD) şi $F \in (DC)$. Dreptele BE şi CD se intersectează în punctul M, AF şi BC în N, ND şi BM în P. Demonstraţi că $\sphericalangle FAC \equiv \sphericalangle PAM$.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică

7.O.12. Fie $ABCD$ un romb şi P un punct în interiorul său, astfel încât $AP = AB$. Fie M mijlocul segmentului PC, N şi Q mijloacele laturilor AD şi AB. Arătaţi că $BP \perp MN$ şi $DP \perp MQ$. În ce caz $MP \perp NQ$?

Marin Chirciu

EDITURA PARALELA 45

Bacău

7.O.13. a) Arătaţi că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

b) Arătaţi că numărul:

$$A = \sqrt{1} + \sqrt{1+3+5} + \sqrt{1+3+5+7+9} + ... + \sqrt{1+3+...+2021}$$

este pătrat perfect.

7.O.14. Fie numerele raţionale pozitive $a_1, a_2, ..., a_{2018}$, astfel încât suma lor este 1 şi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = ... = \frac{a_{2017}}{a_{2018}} = \frac{1}{3}$.

a) Arătaţi că $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{2017} = \frac{3^{2018}-1}{2}$.

b) Găsiţi a_{2018}.

7.O.15. Fie $ABCD$ paralelogram, $M \in (AB)$, $N \in (CD)$, astfel încât $[AM] \equiv [NC]$ şi O este centrul paralelogramului.

a) Demonstraţi că M, O şi N sunt coliniare.

b) Dacă aria lui $ABCD$ este 24 cm^2 şi $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, aflaţi aria triunghiului NOC.

7.O.16. Fie O intersecţia diagonalelor paralelogramului $ABCD$ şi $M \in (AO)$, iar $N \in BD$ astfel încât $MN \parallel AB$. Dacă $\{E\} = DM \cap AB$, $\{F\} = AN \cap BC$, iar $BE \equiv CF$, demonstraţi că $ABCD$ este romb.

Bihor

7.O.17. Arătaţi că $\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{3}\} + \{\sqrt{5}\} + ... + \{\sqrt{49}\} < 18$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului x.

7.O.18. Găsiţi numerele naturale m şi n pentru care $\frac{4n}{2m+3} = \frac{n-2}{m}$.

7.O.19. Fie M şi N mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[DC]$ ale rombului $ABCD$, $BM \cap AC = \{P\}$, iar $BN \cap AC = \{T\}$.

a) Arătaţi că $MNTP$ este un trapez isoscel.

b) Dacă $AN \cap BD = \{G\}$ şi $GP \perp AB$, demonstraţi că $ABCD$ este un pătrat.

7.O.20. Pe laturile triunghiului ABC considerăm punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ şi $P \in (AB)$, astfel încât $AM \cap BN \cap CP = \{O\}$. Arătaţi că:

$$\frac{MO}{MA} + \frac{NO}{NB} + \frac{PO}{PC} = 1.$$

EDITURA PARALELA 45

clasa a VIII-a

ETAPA LOCALĂ

Alba

8.O.1. a) Arătaţi că, pentru orice numere reale x, y pozitive, nenule, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{2}{x+y}-\frac{1}{xy}\leq 1.$$

b) Demonstraţi că, pentru orice numere reale a, b, c pozitive, nenule, pentru care $a + b + c = 1$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{1+a}{b+c}+\frac{1+b}{c+a}+\frac{1+c}{a+b}\leq\frac{1}{abc}.$$

8.O.2. a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5\sqrt{x+y}+3\sqrt{1-x}+2\sqrt{37-y}=38$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $xyz + 2z + 6x + 3y = 2xz + yz + 3xy + 2023$.

8.O.3. Fie E un punct situat pe muchia AA' a paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$ şi fie M, N, P respectiv proiecţiile vârfului A pe EB, EC, ED. Arătaţi că:

a) $CE \perp (MNP)$;

b) $\frac{MB}{ME}+\frac{PD}{PE}=\frac{NC}{NE}$.

8.O.4. Se dă ΔABC echilateral de latură 12 cm şi punctele $E, F \in AB$, astfel încât $AE \equiv EF \equiv FB$, iar $EM \perp AB$, $M \in AC$. Se ridică $MN \perp (ABC)$, $MN = 6$ cm.

a) Calculaţi distanţele de la N la vârfurile triunghiului ABC.

b) Dacă $P \in MN$, $NP = 2$ cm, aflaţi măsura unghiului diedru dintre (PAF) şi (ABC).

c) Dacă $MS \perp AP$, $S \in AP$ şi $MT \perp FP$, $T \in FP$, aflaţi $m(\sphericalangle(ST, ME))$.

Arad

8.O.5. a) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $-2 \leq x \leq 3$ şi $x - 5y + 2 = 0$, calculaţi:

$$E=\sqrt{(x+2)^2+2y^2}+\sqrt{(x-3)^2+2(y-1)^2}.$$

b) Arătaţi că, dacă $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$, atunci $x \in [-1; 5]$ şi $y \in [0; 6]$.

EDITURA PARALELA 45

8.O.6. Se consideră numerele:

$$A=\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2019}-\sqrt{2018}\right) \text{ şi}$$

$$B=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2019}+\sqrt{2018}\right).$$

a) Calculaţi $A \cdot B$ şi arătaţi că $A + B > 2$.

b) Calculaţi $\left[\dfrac{B}{1010\cdot A}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

8.O.7. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AA' = 3\sqrt{5}$ cm, $AB = 6$ cm şi $BC = 3$ cm, notăm cu M mijlocul segmentului AB. Aflaţi tangenta unghiului determinat de planele $A'DM$ şi $D'DM$.

8.O.8. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată de bază ABC. Punctul M este mijlocul muchiei BC, măsura unghiului dintre dreptele SM şi SA este egală cu $90°$ şi $SA = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Arătaţi că triunghiul SAC este dreptunghic.

b) Fie A', B' mijloacele muchiilor SA, respectiv SB, iar P şi Q proiecţiile punctelor A' şi, respectiv, B' pe planul (ABC). Calculaţi aria triunghiului CPQ.

Argeș

8.O.9. Fie numerele reale x şi y care verifică relaţiile $x + 5y - 1 = 0$ şi $x \in [6; 11]$. Demonstraţi că numărul $a = \sqrt{x^2+y^2-12x+2y+37}+\sqrt{x^2+y^2-22x+4y+125}$ este iraţional.

8.O.10. Fie numărul $A=9\cdot\underbrace{111...1}_{2017}\underbrace{555...5}_{2017}+9$. Calculaţi $\sqrt{A}$.

Gazeta Matematică nr. 1/2018

8.O.11. În cubul $ALGEBRIC$:

a) demonstraţi că $AI \perp (BEL)$;

b) calculaţi o funcţie trigonometrică pentru unghiurile determinate de dreptele RC, LG şi, respectiv, AG cu planul (BEL).

8.O.12. Fie G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor BDC, respectiv ACD, situate în plane diferite, N mijlocul segmentului (CD), $M \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{AB}{BM}=\dfrac{5}{3}$ şi $MN \cap AG_1 = \{E\}$. Arătaţi că $EG_2 \parallel (BCD)$.

Bacău

8.O.13. Determinaţi numerele reale x, y, ştiind că verifică relaţia $x^2+y^2+2x\sqrt{2}-y+\dfrac{9}{4}=0$.

8.O.14. a) Dacă a, b sunt numere reale şi x, y sunt numere reale strict pozitive, demonstraţi inegalitatea $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\geq\dfrac{(a+b)^2}{x+y}$. Când se obţine egalitate?

EDITURA PARALELA 45

b) Determinaţi numerele reale strict pozitive x, y, z ce verifică relaţiile $x + y + z = 27$ şi $\frac{1}{2x+y+2} + \frac{1}{2y+z+3} + \frac{1}{2z+x+4} = \frac{1}{10}$.

8.O.15. Se consideră o piramidă patrulateră regulată $SABCD$, cu latura bazei $AB = 12$ cm. Determinaţi înălţimea piramidei, ştiind că $m(\sphericalangle((SBC), (SAC))) = 60°$.

8.O.16. Se consideră tetraedrul $ABCD$ şi fie M, P, N, Q, R, S mijloacele muchiilor AB, BC, CD, DA, AC şi, respectiv, BD.

a) Demonstraţi că dreptele MN, PQ şi RS sunt concurente.

b) Dacă $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$, demonstraţi că patrulaterul $MRNS$ este dreptunghi.

Bihor

8.O.17. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, M mijlocul muchiei $D'C'$ şi $DT \perp MC$, $T \in MC$.

a) Arătaţi că $DT \perp (MBC)$.

b) Dacă distanţa dintre dreptele AD şi BM este $a\sqrt{5}$, determinaţi lungimea muchiei cubului.

8.O.18. a) Demonstraţi că $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \leq x + y + z$, $(\forall)\ x, y, z > 0$.

b) Aflaţi maximul expresiei $\sqrt{ab+ac} + \sqrt{ab+bc} + \sqrt{ac+bc}$, unde $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 2019$.

8.O.19. Cei 28 de colegi ai lui Gigel au venit în vizită la el. Gigel are un baton de ciocolată sub formă de paralelipiped dreptunghic, $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm şi $AA' = 4$ cm, pe care doreşte să-l împartă cu colegii şi fratele lui, astfel încât fiecare să primească un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 1 cm, 1 cm şi 2 cm. Fratele lui fiind mai mic, se grăbeşte şi îşi mănâncă porţia, încălcând însă regula stabilită de Gigel. Ştiind că fratele lui a mâncat două cubuleţe, fiecare cu muchia de 1 cm, unul cu un vârf în A şi celălalt cu un vârf în B, aflaţi dacă Gigel mai poate împărţi ciocolata după regula stabilită de el iniţial.

8.O.20. a) Demonstraţi că restul împărţirii unui pătrat perfect la 3 nu poate fi 2.

b) Fie $a = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + 11} \in \mathbb{Q}$, unde p, q şi r sunt numere prime, cu $p < q < r$. Arătaţi că $p = 2$, iar apoi determinaţi numerele q şi r.

Bistriţa-Năsăud

8.O.21. Aflaţi valoarea minimă a expresiei $E(x) = x^2 - x + 1$.

8.O.22. Aflaţi numerele reale pozitive x şi y, astfel încât $x + 4y + 1 = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{xy}$.

8.O.23. Aflaţi dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic, ştiind că acestea sunt invers proporţionale cu $0,(2)$, $\frac{1}{2}$ şi 2, iar lungimea diagonalei paralelipipedului este $14\sqrt{2}$ m.

8.O.24. Fie $VABC$ o piramidă regulată cu baza triunghiul echilateral ABC şi M mijlocul laturii BC. Dacă triunghiul BMV este isoscel, determinaţi măsura unghiului dintre dreapta AV şi planul (VBC).

EDITURA PARALELA 45

CUPRINS

EDITURA PARALELA 45