CUPRINS

Mulțimile de numere și rezolvarea ecuațiilor

Ne amintim și explorăm!

Ce tipuri de ecuații liniare au soluții în N?

Să analizăm!

În soluționarea unor probleme din cotidian suntem conduși la rezolvarea unor ecuații și uneori suntem interesați să decidem dacă aceste ecuații au soluții în mulțimea numerelor naturale N.

Exemple

1) Ecuația $2 + x = 6$ are în mulțimea numerelor naturale soluția 4.

2) Ecuația $2x = 6$ are în mulțimea numerelor naturale soluția 3.

3) Ecuația $3 + x = 2$ nu are soluții în mulțimea numerelor naturale, deoarece avem $3 + x \geqslant 3$ pentru orice număr natural x.

4) Ecuația $3 \cdot x = 2$ nu are soluții în mulțimea numerelor naturale, deoarece 2 nu este divizibil prin 3.

1 Enunță probleme pentru a căror rezolvare suntem conduși la ecuațiile alăturate.

În general

Ecuația $x + a = b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ admite o soluție în mulțimea numerelor naturale dacă și numai dacă $b \geqslant a$. În acest caz soluția ecuației este numărul natural $b - a$.

Ecuația $a \cdot x = b$ $(a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0)$ admite o soluție în mulțimea numerelor naturale dacă și numai dacă a este un divizor al lui b. În acest caz, soluția ecuației este $\frac{b}{a}$.

Ecuațiile $x + a = b$ și $x = b - a$ sunt echivalente.

Ecuațiile $a \cdot x = b$ și $x = \frac{b}{a}, a \neq 0$, sunt echivalente.

Ce tipuri de ecuații liniare au soluții în Z?

Mulțimea numerelor naturale nu este suficient de „bogată" pentru a rezolva în ea orice ecuație de forma $a + x = b$ sau $a \cdot x = b$. Este nevoie să considerăm mulțimi de numere mai cuprinzătoare pentru a putea rezolva aceste ecuații.

Ecuația $x + a = b$ poate fi rezolvată în N în cazul în care $b \geqslant a$ și are soluția $b - a$, deoarece în acest caz $b - a$ este un număr natural. Dacă $b < a$, diferența $b - a$ nu mai aparține lui N, ci este un număr întreg negativ.

Este natural să încercăm să rezolvăm o ecuație de forma $x + a = b$ în mulțimea Z a numerelor întregi.

Să demonstrăm!

Ecuația $x + a = b$ are soluție în Z oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$; soluția acestei ecuații este $b - a$.

2 Rezolvă în Z ecuațiile $x + 12 = 2$, $x + (-1) = -7$.

Ecuația $x + a = b$ este echivalentă cu ecuația $(x + a) + (-a) = b + (-a)$, unde $(-a)$ este opusul lui a.

Folosind asociativitatea adunării din Z, faptul că $a + (-a) = 0$, precum și relația $b - a = b + (-a)$, deducem că soluția ecuației $x + a = b$ este $b - a$.

3 Explică de ce ecuația $x + a = b$ nu poate fi rezolvată în N, pentru unele numere $a, b \in \mathbb{N}$.