

CUPRINS

Unitatea de învățare 1. Ecuații și inecuații liniare	6
Situatii cotidiene care conduc la ecuații sau inecuații	7
Modele de rezolvare a ecuațiilor, inecuațiilor și sistemelor	9
Rezolvarea unor ecuații, inecuații sau sisteme	18
Unitatea de învățare 2. Reprezentări grafice. Liniaritate	20
Reprezentarea și interpretarea datelor	21
Metoda grafică în studiul ecuațiilor și al inecuațiilor liniare	24
Elemente de programare liniară	30
Unitatea de învățare 3. *Legi de compoziție	34
Scrierea pozițională a numerelor raționale	35
Operații algebrice	40
Aplicații ale proprietăților operațiilor algebrice	48
Unitatea de învățare 4. Matrice	52
Calcul tabelar	53
Matrice și operații cu matrice	55
Utilizarea matricelor în practică	63
Unitatea de învățare 5. Determinanți și sisteme liniare	66
Rezolvarea sistemelor prin reducerea „în scară”	67
Sisteme și determinanți	69
Calculul determinanților: aplicații	78
Unitatea de învățare 6. *Grupuri	82
Mulțimile de numere și rezolvarea ecuațiilor	83
Structuri algebrice: monoizi și grupuri	86
Structuri algebrice: aplicații în geometrie	94
Unitatea de învățare 7. *Inele și corpuri	98
Proprietăți ale operațiilor algebrice	99
Structuri algebrice: inele și corpuri	101
Structuri algebrice pe mulțimea părților unei mulțimi	105
Unitatea de învățare 8. Matrice inversabile	108
Matrice și coduri	109
Inversa unei matrice. Metode de calcul	111
Ecuații matriceale	118
Probleme recapitulative	123
Răspunsuri	126
Bibliografie	128

Mulțimile de numere și rezolvarea ecuațiilor

Ne amintim și explorăm!

♦ Ce tipuri de ecuații liniare au soluții în \mathbb{N} ?

Să analizăm!

În soluționarea unor probleme din cotidian suntem conduși la rezolvarea unor ecuații și uneori suntem interesați să decidem dacă aceste ecuații au soluții în mulțimea numerelor naturale \mathbb{N} .

Exemple

- 1) Ecuația $2 + x = 6$ are în mulțimea numerelor naturale soluția 4.
- 2) Ecuația $2x = 6$ are în mulțimea numerelor naturale soluția 3.
- 3) Ecuația $3 + x = 2$ nu are soluții în mulțimea numerelor naturale, deoarece avem $3 + x \geq 3$ pentru orice număr natural x .
- 4) Ecuația $3 \cdot x = 2$ nu are soluții în mulțimea numerelor naturale, deoarece 2 nu este divizibil prin 3.

În general

Ecuația $x + a = b$ ($a, b \in \mathbb{N}$) admite o soluție în mulțimea numerelor naturale dacă și numai dacă $b \geq a$. În acest caz soluția ecuației este numărul natural $b - a$.

Ecuația $a \cdot x = b$ ($a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$) admite o soluție în mulțimea numerelor naturale dacă și numai dacă a este un divizor al lui b . În acest caz, soluția ecuației este $\frac{b}{a}$.

🕒 *Enunță probleme pentru a căror rezolvare suntem conduși la ecuațiile alăturate.*

⚠️ Ecuațiile $x + a = b$ și $x = b - a$ sunt echivalente.

Ecuațiile $a \cdot x = b$ și $x = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$, sunt echivalente.

♦ Ce tipuri de ecuații liniare au soluții în \mathbb{Z} ?

Mulțimea numerelor naturale nu este suficient de „bogată” pentru a rezolva în ea orice ecuație de forma $a + x = b$ sau $a \cdot x = b$. Este nevoie să considerăm mulțimi de numere mai cuprinzătoare pentru a putea rezolva aceste ecuații.

Ecuația $x + a = b$ poate fi rezolvată în \mathbb{N} în cazul în care $b \geq a$ și are soluția $b - a$, deoarece în acest caz $b - a$ este un număr natural. Dacă $b < a$, diferența $b - a$ nu mai aparține lui \mathbb{N} , ci este un număr întreg negativ.

Este natural să încercăm să rezolvăm o ecuație de forma $x + a = b$ în mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi.

Să demonstrăm!

Ecuația $x + a = b$ are soluție în \mathbb{Z} oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$; soluția acestei ecuații este $b - a$.

Ecuația $x + a = b$ este echivalentă cu ecuația $(x + a) + (-a) = b + (-a)$, unde $(-a)$ este opusul lui a .

Folosind asociativitatea adunării din \mathbb{Z} , faptul că $a + (-a) = 0$, precum și relația $b - a = b + (-a)$, deducem că soluția ecuației $x + a = b$ este $b - a$.

🕒 *Rezolvă în \mathbb{Z} ecuațiile:*
 $x + 12 = 2$, $x + (-1) = -7$.

🕒 *Explică de ce ecuația $x + a = b$ nu poate fi rezolvată în \mathbb{N} pentru unele numere $a, b \in \mathbb{N}$.*