CUPRINS

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

Capitolul 1. Grupuri

Capitolul II. Inele. Corpuri

Capitolul III. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul IV. Primitive

BIBLIOGRAFIE

• I.D. Ion, Nicolae R. – *„Algebră”*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1981
• Năchilă P., Becheanu M., Brânzei D. – *„Subiecte posibile pentru admitere”*, Editura Paralela 45, Pitești 1997
• Năchilă P., Stoica C. – *„Probleme pentru admiterea în învățământul superior”*, Editura Scorpion, București 1997
• Nicolescu M. – *„Analiză Matematică”*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1980
• Roșculeț M. – *„Analiza matematică”*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1984
• Sirețchi Gh. – *„Calcul diferențial și integral”*, Editura Științifică și Enciclopedică, București 1985
• Donciu N., Flondor D. – *„Algebră și analiză matematică”*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1967
• Chițescu I., Alexandrescu P. – *„Analiza matematică”*, Editura Paralela 45, Pitești 2000

III.10. Polinoame cu coeficienți reali

Teoremă. Fie $f \in \mathbb{R}[X], f \neq 0$. Dacă $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, este rădăcină a polinomului f, atunci:

a) $\overline{z} = a - bi$ este rădăcină a polinomului f;

b) z și $\overline{z}$ au același ordin de multiplicitate.

Demonstrație. **a)** Știm că, dacă $f \in \mathbb{R}[X], z \in \mathbb{C}$, atunci $f\left(\overline{z}\right) = \overline{f(z)}$. Deoarece $f(z) = 0$ rezultă că $f\left(\overline{z}\right) = 0$ și deci $\overline{z}$ este rădăcină a lui f.

b) Fie $m \in \mathbb{N}^*$ ordinul de multiplicitate al rădăcinii z. Atunci există un polinom g astfel încât $f = (X - z)^m \cdot g$ și $g(z) \neq 0$. Avem $z \neq \overline{z}$ deoarece $b \neq 0$. Deoarece $f\left(\overline{z}\right) = 0$ rezultă că $\left(z - \overline{z}\right)^m \cdot g\left(\overline{z}\right) = 0$, adică $g\left(\overline{z}\right) = 0$.

Atunci există un polinom g_1 astfel încât $g = \left(X - \overline{z}\right) \cdot g_1$ și deci $f = (X - z)^{m-1}\left(X - \overline{z}\right)(X - z) \cdot g_1 = \left[X^2 - \left(z + \overline{z}\right)X + z\overline{z}\right] \cdot (X - z)^{m-1} \cdot g_1 = \left(X^2 - 2aX + a^2 + b^2\right)(X - z)^{m-1} \cdot g_1$. Cum f și $X^2 - 2aX + a^2 + b^2$ sunt polinoame din $\mathbb{R}[X]$ rezultă că $(X - z)^{m-1} \cdot g_1 = f_1 \in \mathbb{R}[X]$. Dacă $m > 1$, se continuă procedeul cu f_1. După m pași obținem descompunerea lui f astfel $f = \left(X^2 - 2aX + a^2 + b^2\right)^m \cdot h = (X - z)^m (X - \overline{z})^m h$, unde $h \in \mathbb{R}[X]$. Deci $\left(X - \overline{z}\right)^m \mid f$ și $\left(X - \overline{z}\right)^{m+1}$ nu divide pe f, deoarece în acest caz $h\left(\overline{z}\right) = 0$ și deci $h(z) = 0$, adică $(X - z)^{m+1} \mid f$ (fals).

Observații.

■ Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ și $z \in \mathbb{C}$ este rădăcină a lui f, atunci este posibil ca f să nu aibă rădăcina $\overline{z}$.

EXEMPLU

Polinomul $f = X^2 + (1 - i)X - i$ are rădăcina i și nu are rădăcina $\overline{i} = -i$.

■ Teorema este foarte utilă pentru determinarea rădăcinilor unor ecuații algebrice cu coeficienți reali când se cunoaște o rădăcină complexă a sa.

Exercițiul rezolvat 1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că ecuația $x^4 - 5x^3 + 10x^2 + ax + b = 0$ admite rădăcina $x_1 = 1 + i$.

Soluția I. $f(1+i) = 0 \Leftrightarrow a + b + 6 + i(a + 10) = 0 \Leftrightarrow a + b + 6 = 0,\ a + 10 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = -10, b = 4$. Ecuația are și rădăcina $x_2 = 1 - i$. Deoarece $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$, $x_1x_2x_3x_4 = 4$ rezultă că $x_3 + x_4 = 3, x_3x_4 = 2$ și deci $x_{3,4}$ sunt rădăcinile ecuației $x^3 - 3x + 2 = 0$, adică $x_{3,4} \in \{1; 2\}$.