CUPRINS

Exerciţii rezolvate.

1) Determină derivatele următoarelor funcţii definite şi derivabile pe intervalele date:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=-2\ln x$; b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x-\ln x$; c) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2+\dfrac{\ln x}{x}$;

d) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\ln x$; e) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+3\ln x}{x}$.

Soluţii.

a) $\forall x\in(0,\infty),\ f'(x)=-2\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{2}{x}$, pentru că $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

b) $\forall x\in(0,\infty),\ f'(x)=2-\dfrac{1}{x}$;

c) $\forall x\in(0,\infty),\ f'(x)=0+\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, deoarece $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$;

d) $\forall x\in(0,\infty),\ f'(x)=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x$, deoarece $(f\cdot g)'=f'g+fg'$;

e) $\forall x\in(0,\infty),\ f'(x)=\dfrac{\left(1+3\cdot\frac{1}{x}\right)x-(x+3\ln x)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{x+3-x-3\ln x}{x^2}=\dfrac{3-3\ln x}{x^2}$.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ este derivabilă şi $f'(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

Soluţie.

Fie $u,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ u(x)=x^2+1$ şi $g(x)=\sqrt[3]{x}$. Obţinem $f=g\circ u$, g, u derivabile şi $g'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $u'(x)=2x$.

Atunci $f'(x)=g'(u(x))\cdot u'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\cdot 2x=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

3) Fie I, J, K intervale ale dreptei reale şi $f:I\to J,\ g:J\to K,\ h:K\to\mathbb{R}$ funcţii derivabile; atunci funcţia $F=h\circ g\circ f$ este derivabilă (pe I) şi $F'(x)=h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)$.

Soluţie. $F'(x)=((h\circ g)\circ f)'(x)=(h\circ g)'(f(x))\cdot f'(x)=\ =h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)$.

Ca o sinteză a formulelor obţinute, vom prezenta următorul ***tabel al derivatelor funcţiilor elementare***.

f	D_f	f'	$D_{f'}$	Observaţii
c (constantă)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}^*$	$(0,+\infty)$	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$(0,+\infty)$	
$\sqrt[2]{x},\ n\in\mathbb{N}^*$	$[0,+\infty)$	$\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$(0,+\infty)$	$f'_d(0)=+\infty$
$a^x,\ a>0,\ a\neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x\cdot\ln a$	$\mathbb{R}$	
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\dfrac{1}{x}$	$(0,\infty)$	$a=e\Rightarrow(e^x)'=e^x$
$\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$	$(0,\infty)$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	$(0,\infty)$	

7. Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute

Fie sistemul liniar: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ de m ecuații

cu n necunoscute, $n \leq 3$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $b_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$.

Determinarea mulțimii soluțiilor sistemului liniar se face prin rezolvarea acestuia prin diferite metode. Indiferent de metoda folosită trebuie să precizăm tipul sistemului, adică:

- *compatibil* (dacă are soluții)
  - *determinat* (dacă are soluție unică);
  - *nedeterminat* (dacă are o infinitate de soluții);
- *incompatibil* (dacă nu are soluții).

Observație.

Următoarele proceduri aplicate unui sistem de ecuații liniare nu modifică compatibilitatea sau incompatibilitatea acestuia și nici eventualele soluții:

- adunarea unei ecuații a sistemului la o altă ecuație a sistemului;
- înmulțirea ecuațiilor sistemului prin factori nenuli;
- schimbarea ecuațiilor între ele.

Metode de rezolvare a sistemelor liniare

♦ ***Metoda lui Gauss*** a căpătat o importanță mai mare în ultimul timp pentru că se utilizează în programele de calculator.

Ideea acestei metode este următoarea: sistemul liniar de m ecuații cu n necunoscute se transformă într-un alt sistem liniar echivalent în care una dintre necunoscute, de exemplu x_1, apare într-o singură ecuație. Spunem că x_1 a fost eliminat din celelalte $m - 1$ ecuații. Prin aceeași metodă cele $m - 1$ ecuații, fără necunoscuta x_1, se transformă astfel încât o altă necunoscută, de exemplu x_2, apare numai în una dintre acestea. Repetând procedeul, vom obține:

a) un sistem în care ultima ecuație conține numai necunoscuta x_n; atunci sistemul este *compatibil determinat*;

b) un sistem în care $x_k = f(x_{k+1}, \ldots, x_n)$, unde $k < n$; atunci sistemul este *compatibil nedeterminat*;

c) un sistem în care o ecuație este de forma $0 = c$, $c \in \mathbb{C}^*$; atunci sistemul este *incompatibil*.

EXEMPLU

1) Să rezolvăm sistemul liniar: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Soluție.

Scăzând prima ecuație din a doua și împărțind la (–2) obținem

Să rezolvăm sisteme liniare.

1) Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} x_1 + \quad\quad x_3 = 2 \\ \quad x_2 + \quad\quad = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 \quad\quad = 3 \\ \quad\quad\quad x_3 = 7 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$,

specificând, pentru fiecare sistem, dacă este compatibil determinat, compatibil nedeterminat sau incompatibil.

2) Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

prin metoda lui Gauss.

3) Verifică dacă sistemul

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$ este echivalent

cu sistemul: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ \quad -x_2 - 2x_3 = -12 \\ \quad\quad 13x_3 = 34 \end{cases}$

și calculează mulțimea soluțiilor.