

CUPRINS

I. Elemente de calcul matricial și sisteme de ecuații liniare

Matrice	1. Tabel de tip matricial. Matrice, mulțimi de matrice.	
	Operări cu matrice: adunarea, înmulțirea unei matrice cu scalar	3
Sisteme de ecuații liniare și determinanți	2. Operări cu matrice: înmulțirea	9
	3. Sisteme de ecuații liniare. Determinanți	16
	4. Proprietățile determinanților	24
	5. Interpretarea geometrică a sistemelor liniare cu două necunoscute	29
	6. Matrice inversabilă	32
	7. Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute	35

II. Elemente de analiză matematică

Mulțimea numerelor reale. Funcții reale	1. Mulțimi de puncte pe dreapta reală	44
	2. Funcții reale de variabilă reală	51
Limite de funcții	1. Limita unei funcții într-un punct. Limite laterale	59
	2. Operații cu limite de funcții. Limitele funcțiilor elementare	63
	3. Metode de eliminare a nedeterminărilor	70
	4. Asimptotele unei funcții	76
Continuitatea funcțiilor	1. Continuitate punctuală; continuitate pe un interval.	
	Operații cu funcții continue	82
	2. Studiul existenței soluțiilor reale ale unor ecuații și semnul unei funcții continue pe un interval	87
Derivabilitatea funcțiilor	1. Funcții care admit derivată. Funcții derivabile	92
	2. Derivate laterale. Derivatele unor funcții elementare	97
	3. Operații cu funcții derivabile. Derivate de ordinul al doilea	103
	4. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile pe un interval	110
	5. Calculul unor limite de funcții cu ajutorul derivatelor	118
	6. Rolul derivatei de ordinul întâi în studiul funcțiilor	120
	7. Rolul derivatei de ordinul al doilea în studiul funcțiilor	127
Reprezentarea grafică a funcțiilor	1. Reprezentarea grafică a funcțiilor	134
	2. Aplicații ale unor proprietăți locale sau globale ale funcțiilor	146
	3. Rezolvarea grafică a unor ecuații. Sirul lui Rolle	148
Probleme recapitulative	154
Teste grilă	162
Recapitulare pentru bacalaureat	172
Indicații și răspunsuri	175

Exerciții rezolvate.

1) Determină derivatele următoarelor funcții definite și derivabile pe intervalele date:

- a) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2\ln x$; b) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - \ln x$; c) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x}$;
d) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \ln x$; e) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3\ln x}{x}$.

Soluție.

a) $\forall x \in (0, \infty), f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$, pentru că $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

b) $\forall x \in (0, \infty), f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$;

c) $\forall x \in (0, \infty), f'(x) = 0 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, deoarece $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$;

d) $\forall x \in (0, \infty), f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$, deoarece $(f \cdot g)' = f'g + fg'$;

e) $\forall x \in (0, \infty), f'(x) = \frac{\left(1 + 3 \cdot \frac{1}{x}\right)x - (x + 3\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{x + 3 - x - 3\ln x}{x^2} = \frac{3 - 3\ln x}{x^2}$.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ este derivabilă și $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$.

Soluție.

Fie $u, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = x^2 + 1$ și $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Obținem $f = g \circ u$, u, g derivabile și $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $u'(x) = 2x$.

Atunci $f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$.

3) Fie I, J, K intervale ale dreptei reale și $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow K$, $h: K \rightarrow \mathbb{R}$ funcții derivabile; atunci funcția $F = h \circ g \circ f$ este derivabilă (pe I) și $F'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Soluție. $F'(x) = ((h \circ g) \circ f)'(x) = (h \circ g)'(f(x)) \cdot f'(x) = \dots = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Cu o sinteză a formulelor obținute, vom prezenta următorul *tabel al derivatelor funcțiilor elementare*:

f	D_f	f'	$D_{f'}$	Observații
c (constantă)	\mathbb{R}	0	\mathbb{R}	
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$n \cdot x^{n-1}$	\mathbb{R}	
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$	
$\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$	$[0, +\infty)$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt[n]{x}}$	$(0, +\infty)$	$f'_0(0) = +\infty$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	\mathbb{R}	$a^x \cdot \ln a$	\mathbb{R}	
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0, \infty)$	$a = e \Rightarrow (e^x)' = e^x$
$\log_a x, a > 0, a \neq 1$	$(0, \infty)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(0, \infty)$	

7. Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute

Fie sistemul liniar:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cu n necunoscute, $n \leq 3$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $b_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$.

Determinarea mulțimii soluțiilor sistemului liniar se face prin rezolvarea acestuia prin diferite metode. Indiferent de metoda folosită trebuie să precizăm tipul sistemului, adică:

- *compatibil* (dacă are soluții)
- *determinat* (dacă are soluție unică);
- *nedeterminat* (dacă are o infinitate de soluții);
- *incompatibil* (dacă nu are soluții).

Observație.

Următoarele proceduri aplicate unui sistem de ecuații liniare nu modifică compatibilitatea sau incompatibilitatea acestuia și nici eventualele soluții:

- adunarea unei ecuații a sistemului la o altă ecuație a sistemului;
- înmulțirea ecuațiilor sistemului prin factori nenuli;
- schimbarea ecuațiilor între ele.

Metode de rezolvare a sistemelor liniare

♦ **Metoda lui Gauss** a cibăită o importanță mai mare în ultimul timp pentru că se utilizează în programele de calculator.

Ideeza acestei metode este următoarea: sistemul liniar de m ecuații cu n necunoscute se transformă într-un alt sistem liniar echivalent în care una dintre necunoscute, de exemplu x_1 , apare într-o singură ecuație. Spunem că x_1 a fost eliminat din celelalte $m - 1$ ecuații. Prin aceeași metodă cele $m - 1$ ecuații, fără necunoscuta x_1 , se transformă astfel încât o altă necunoscută, de exemplu x_2 , să apară numai în una dintre acestea. Repetând procedeul, vom obține:

- un sistem în care ultima ecuație conține numai necunoscuta x_3 ; atunci sistemul este *compatibil determinat*;
- un sistem în care $x_3 = f(x_1, \dots, x_2)$, unde $k < n$; atunci sistemul este *compatibil nedeterminat*;
- un sistem în care o ecuație este de forma $0 = c$, $c \in \mathbb{C}^*$; atunci sistemul este *incompatibil*.



1) Să rezolvăm sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Soluție.

Scăzând prima ecuație din a doua și împărțind la (-2) obținem

Să rezolvăm sistemul liniar.

1) Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_3 = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

specificând, pentru fiecare sistem, dacă este *compatibil determinat*, *compatibil nedeterminat* sau *incompatibil*.

2) Rezolvă sistemele liniare:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

prin metoda lui Gauss.

3) Verifică dacă sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

este echivalent

cu sistemul: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 - 2x_3 = -12 \\ 13x_3 = 34 \end{cases}$

și calculează mulțimea soluțiilor.