

ALGEBRĂ

I. Numere reale

1. Mulțimi de numere	4
2. Axa numerelor	8
3. Intervale	12
4. Reguli de calcul cu radicali	16
5. Adunarea și scăderea	19
6. Înmulțirea	23
7. Rapoarte de numere reale	26
8. Puteri de numere reale	29
9. Utilizarea literelor în calcul	32
10. Formule de calcul prescurtat	35
11. Descompunerea în factori	39
12. Alte formule de calcul prescurtat	42
13. Rapoarte algebrice	44
14. Probleme recapitulative	47

II. Funcții

1. Noțiunea de funcție	49
2. Funcții definite pe mulțimi finite	53
3. Funcții de forma $f(x) = ax + b$, definite pe \mathbb{R}	56
4. Funcții de forma $f(x) = ax + b$, definite pe intervale	61
5. Probleme recapitulative	66

III. Ecuații și inecuații

1. Ecuație; soluție a unei ecuații	68
2. Ecuații de forma $ax + b = 0$	70
3. Ecuații reducibile la forma $ax + b = 0$	73
4. Ecuații de forma $ax + by + c = 0$	78
5. Sisteme de ecuații	80
6. Rezolvarea sistemelor	83
7. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor	87
8. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$	90
9. Inecuații de forma $ax + b > 0$	95
10. Inecuații reducibile la forma $ax + b > 0$	98
11. Probleme recapitulative	101

IV. Teme de sinteză

1. Mulțimi de numere	103
2. Calcul algebric	105
3. Ecuații, inecuații, sisteme	108
4. Funcții	111

GEOMETRIE

I. Relații între puncte, drepte și plane

1. Corpuri geometrice	113
2. Puncte, drepte, plane	117
3. Determinarea dreptei și a planului	120
4. Tetraedrul și piramida	122
5. Pozițiile relative a două drepte	126
6. Pozițiile unei drepte față de un plan	129
7. Pozițiile relative a două plane	132
8. Unghiul a două drepte în spațiu	135
9. Drepte perpendiculare pe un plan	138
10. Distanțe în spațiu	141
11. Prisma	145
12. Secțiuni în corpurile studiate	148
13. Axe și plane de simetrie	151
14. Probleme recapitulative	153

II. Perpendicularitate în spațiu

1. Proiecții ortogonale pe plan	155
2. Unghiul unei drepte cu un plan	159
3. Diedru. Unghi plan al diedrului	163
4. Măsura unghiului a două plane	166
5. Plane perpendiculare	168
6. Teorema celor trei perpendiculare	172
7. Reciproce ale teoremei celor trei perpendiculare	175
8. Metode pentru calculul lungimilor	178
9. Probleme recapitulative	180

III. Calcul de arii și volume

1. Aria și volumul cubului	182
2. Aria și volumul paralelipipedului	184
3. Aria și volumul prisme	188
4. Aria piramidei	190
5. Aproximarea și calculul volumelor	193
6. Volumul piramidei	195
7. Aria și volumul trunchiului de piramidă	198
8. Aria și volumul cilindriului	202
9. Aria și volumul conului	204
10. Aria și volumul trunchiului de con	206
11. Aria și volumul sferei	208
12. Probleme recapitulative	210

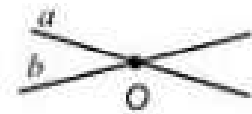
IV. Teme de sinteză

1. Paralelism și perpendicularitate	212
2. Congruență și asemănare	214
3. Măsurare și măsură	218
4. Proprietăți ale figurilor și corpurilor	218

Măsura unghiului a două drepte în spațiu

1 Ce înțelegem prin măsura unghiului a două drepte concurente?

Două drepte concurente formează două perechi de unghiuri opuse la vârf. În acest fel, unei perechi de drepte îi corespund două măsuri de unghiuri. Pentru a caracteriza înclinarea unei drepte față de cealaltă este suficient să considerăm doar una dintre aceste măsuri. Prin convenție, o alegem pe cea mai mică.



Definiții. ♦ Măsura unghiului dintre două drepte concurente este cea mai mică dintre măsurile unghiurilor formate de aceste drepte.
♦ Două drepte concurente sunt perpendiculare dacă măsura unghiului dintre ele este de 90° .

Desenăm	Interpretăm	Notăm
	<p>Măsura unghiului dintre dreptele a și b este de 30°.</p> <p>Dreptele c și d sunt drepte perpendiculare.</p>	<p>$m \angle(a; b) = 30^\circ$</p> <p>$m \angle(c; d) = 90^\circ$ sau $c \perp d$.</p>

În figura alăturată, dreptele d_1 și d_2 sunt paralele. Unghiurile marcate pe figură, formate de aceste drepte cu secanta d_3 , sunt congruente. (De ce?)

Rezultă că $m \angle(d_1; d_3) = m \angle(d_2; d_3)$.

Observăm că măsura unghiului a două drepte concurente nu se modifică dacă una dintre ele se înlocuiește cu o dreaptă paralelă cu ea.



2 Cum se definește măsura unghiului a două drepte necoplanare?

Două drepte necoplanare nu formează un unghi. Totuși, putem exprima cât de înclinate sunt aceste drepte una față de cealaltă prin măsura unghiului dintre două drepte concurente. În acest mod, putem defini măsura unghiului dintre două drepte oarecare din spațiu. Definiția nu poate fi dată la întâmplare. Ea trebuie să păstreze proprietățile măsurii unghiului dintre două drepte concurente.



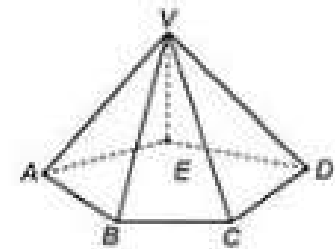
1. Profesorul Numerus le-a propus elevilor „definiția”: „măsura unghiului dintre două drepte necoplanare este măsura unghiului format de una dintre ele cu o dreaptă concurentă cu ea”. Ce crezi, este această „definiție” acceptabilă?



Definiție. Măsura unghiului a două drepte oarecare este măsura unghiului dintre paralelele duse la aceste drepte printr-un punct dat.

Să observăm figura alăturată!

Spre deosebire de alte corpuri, una dintre fețele piramidei are un rol privilegiat; această față este baza piramidei. Baza piramidei intervine în definirea ariei laterale și a ariei totale ale piramidei.



Notăm aria laterală cu A_l , aria totală cu A_t și aria bazei cu A_b . Avem:

$$A_t = A_l + A_b$$

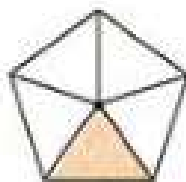
Definiții. ♦Aria laterală a piramidei este suma ariilor fețelor laterale.

♦Aria totală a piramidei este suma ariilor tuturor fețelor.

Să comparăm!

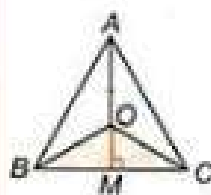
În plan

Un poligon regulat se descompune în triunghiuri isoscele congruente.



Pentru a calcula aria unui poligon regulat, este suficient să calculăm aria unuia dintre triunghiurile astfel formate.

Definiție. Apotemă a unui poligon regulat este înălțimea dusă din centrul poligonului pe o latură a acestuia.



Exemplu:

În triunghiul echilateral ABC, [OM] este apotemă.

Un poligon regulat are toate apotemele congruente.

Aria unui poligon regulat este semiprodusul dintre perimetrul și apotema poligonului.

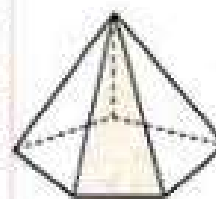
Altfel spus:

Dacă P este perimetrul și a este apotema poligonului, atunci:

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

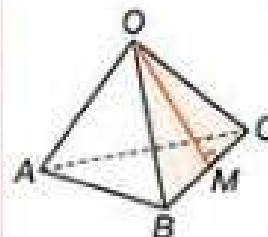
În spațiu

O piramidă regulată are fețele laterale triunghiuri isoscele congruente.



Pentru a calcula aria laterală a unei piramide regulate, este suficient să calculăm aria uneia dintre fețele laterale ale piramidei.

Definiție. Apotemă a unei piramide regulate este înălțimea dusă din vârful piramidei în oricare față laterală.



Exemplu:

În piramida triunghiulară regulată OABC, [OM] este apotemă.

O piramidă regulată are toate apotemele congruente.

Aria laterală a unei piramide regulate este semiprodusul dintre perimetrul bazei și apotema piramidei.

Altfel spus:

Dacă P_b este perimetrul bazei și a_p este apotema piramidei, atunci:

$$A = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$$