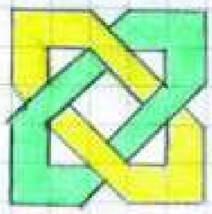
Proiect Algebră și geometrie pe rețeaua cu pătrățele

Plan de lucru

✔ **Materiale necesare:** coli dintr-un caiet de matematică, riglă, creioane colorate.
✔ **Scop:** Veți realiza desene interesante trasând segmente de lungimi date și veți determina lungimile unor segmente.

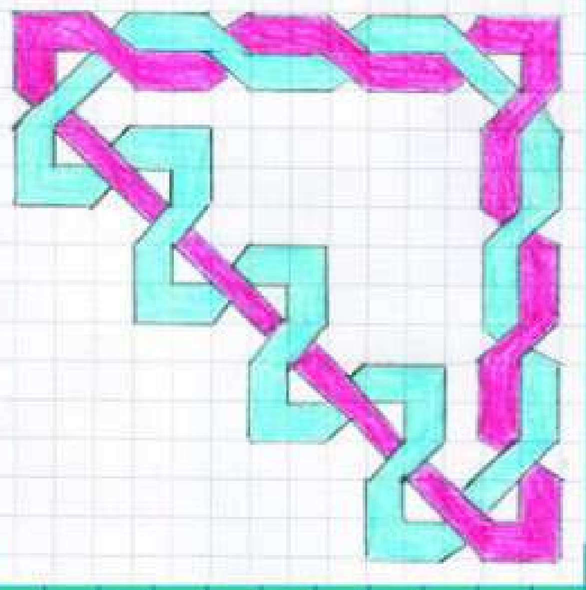
Realizarea proiectului

Lucrați în echipe de câte trei, patru sau cinci colegi!



✔ Realizați, pe hârtie cu pătrățele, folosind creioane colorate, modele asemănătoare celor alăturate, compuse din „împletituri".

✔ Atașați o fișă cu exerciții, în care:
- exprimați lungimea fiecărui „lanț" (linie frântă închisă) din modelele realizate;
- aproximați convenabil această lungime;
- explicați modul în care ați realizat calculele.



✔ Valorificați în proiectul vostru exercițiile notate cu . Acolo veți avea de calculat lungimile unor segmente prin noi metode învățate. Folosiți în modelele voastre segmente care au lungimea obținută în aceste exerciții.

✔ Reuniți toate materialele realizate într-un poster.

Pentru început:

✔ Copiați pe caiete imaginea alăturată (observând cu atenție modul în care a fost realizat desenul).

✔ Calculați lungimea totală a segmentelor orizontale și verticale care mărginesc „lanțul" de culoare roșie.

Interacțiune

În cadrul echipei:

✔ Discutați etapele proiectului și împărțiți sarcinile între membri.
✔ Fiecare rezolvă propria sarcină, dar colaborează și cu ceilalți pentru a obține la final un produs foarte bun al întregii echipe.
✔ Discutați și stabiliți forma finală a posterului pe care aplicați toate materialele realizate.

Prezentare

Lucrați cu toată clasa!

✔ Expuneți posterele realizate.
✔ Fiecare echipă va evalua posterele celorlalte echipe.
- Alegeți prin vot posterul care v-a plăcut cel mai mult.
- Atenție! Nicio echipă nu votează propriul poster.

✔ Stabiliți clasamentul final, totalizând punctele propuse de fiecare echipă.

Test inițial

Timp de lucru: 50 minute

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni și rezultate necesare pentru parcurgerea acestei Unități de învățare. Fiecare problemă propusă valorează 1 punct. Se acordă 1 punct din oficiu.

I. *Scrie pe foaia de rezolvare cuvintele sau rezultatele care, înscrise în spațiile punctate, formează enunțuri adevărate.*

Unități de măsură; transformări

1. Completează pe caietul tău răspunsurile corecte!

a) 3,4 m = ... cm; **b)** 250 dm^2 = ... m^2.

Operații cu numere raționale

2. Calculează:

a) 1,2 + 3,56 = ...; **b)** 2,4 × 0,6 = ...; **c)** 8,25 : 1,5; **d)** $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ = ...;

e) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$; **f)** $\frac{2}{5} : \frac{3}{10}$; **g)** 3009 – 109 = ...; **h)** 5 · (-7) = ...

Numere prime

3. Valoarea de adevăr a enunțului *„Toate numerele din lista următoare sunt numere prime: 13; 23; 43; 53; 73; 83."* este ...

II. *Scrie pe foaia de rezolvare litera corespunzătoare răspunsului corect pentru următoarele exerciții:*

Compararea numerelor raționale

4. Cel mai mare dintre numerele –3,45; 2,2(32); 1; –12; 2,233 este:

A. –12; **B.** 2,233; **C.** 2,2(32); **D.** –3,45.

Divizibilitate

5. Cifra unităților scrisă în locul marcat cu □, pentru ca numărul $\overline{402□}$ să devină divizibil cu 9 este:

A. 10; **B.** 9; **C.** 8; **D.** 3.

Metode de rezolvare a problemelor

6. Geo a ales un număr. După ce l-a înmulțit cu 3 și a adunat rezultatul cu 5, a obținut 13,16. Numărul ales de Geo este:

A. 2,64; **B.** 3,72; **C.** 2,72; **D.** 6,02.

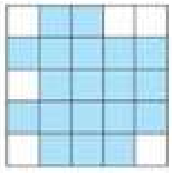
III. *Scrie pe foaia de rezolvare soluțiile complete ale exercițiilor următoare:*

Arii

7. Calculează aria figurii colorate din imagine, folosind ca unitate de măsură pătrățelele din rețea. Procedează în două moduri:

a) află din câte pătrățele este formată figura;

b) numără câte pătrățele sunt în afara figurii.

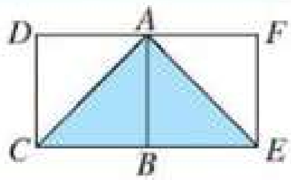


Proprietăți ale triunghiurilor

8. În figura alăturată, $ABCD$ și $ABEF$ sunt pătrate.

a) Arată că triunghiurile ABC și ADC sunt congruente.

b) Demonstrează că triunghiul ACE este triunghi dreptunghic isoscel.



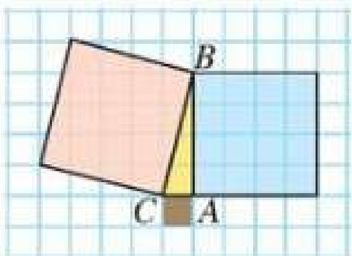
Teorema lui Pitagora

9. Pe o foaie cu pătrățele a fost desenat triunghiul dreptunghic ABC și câte un pătrat pe fiecare dintre laturile acestuia, ca în figura alăturată.

a) Calculează ariile pătratelor desenate pe catetele AB și AC, știind că pătrățelele au latura de 0,5 cm.

b) Calculează aria pătratului desenat pe ipotenuza BC.

c) Scrie relația dintre ariile calculate la **a)** și cea calculată la **b)**.



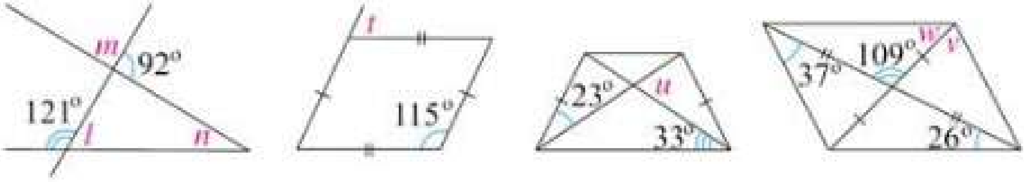
Dacă ai obținut mai puțin de jumătate din punctaj la acest test, este util să revezi definițiile și proprietățile conceptelor menționate mai sus, pentru a înțelege mai bine ceea ce urmează.

Recapitulăm prin probleme

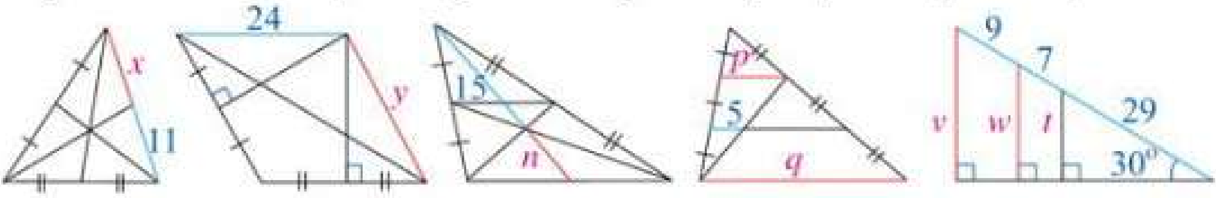
1. Determină măsurile unghiurilor notate cu x și y din desenul alăturat.

2. În patrulaterul convex $ABCD$, $\sphericalangle B = \sphericalangle A + 12°$, $\sphericalangle C = \sphericalangle B + 12°$ și $\sphericalangle D = \sphericalangle C + 12°$. Calculează măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

3. Folosind datele din fiecare figură, calculează măsurile notate cu litere.



4. Află lungimile notate cu litere pentru figurile de mai jos. Atenție la ipotezele precizate pe desen!



5. a) Demonstrează că patrulaterul determinat de mijloacele laturilor unui patrulater oarecare $ABCD$ este un paralelogram, numit *paralelogramul lui Varignon*.

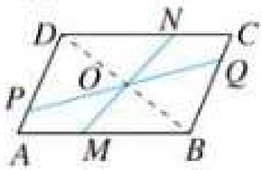
b) În ce condiții paralelogramul lui Varignon este romb?

c) În ce condiții paralelogramul lui Varignon este dreptunghi?

6. Fie $MNPQ$ un trapez cu baza mare MN. Perpendiculara din Q pe MP intersectează MN în R și perpendiculara din N pe MP intersectează PQ în S. Arată că $RNSQ$ este paralelogram.

7. Trapezul $ABCD$ este isoscel, cu baza mare AB, iar $E, F \in AB$ astfel încât $CE \perp AB$ și $DF \perp AB$. Știind că $CDFE$ este pătrat, $AD = 5$ cm și $CE = 3$ cm, calculează lungimea liniei mijlocii a trapezului $ABCD$.

8. Se consideră un paralelogram $ABCD$, cu centrul O prin care se duc dreptele oarecare MN și PQ, ca în figura de mai jos. Demonstrează că $MPNQ$ este paralelogram.



9. Fie un triunghi ABC, cu $\sphericalangle B = 2 \cdot (\sphericalangle C)$. Bisectoarea unghiului B intersectează segmentul AC în D. Fie E simetricul lui D în raport cu BC. Stabilește natura patrulaterului $BECD$.

10. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ADE și DCF. Arată că $EB = AF$ și $EB \perp AF$.

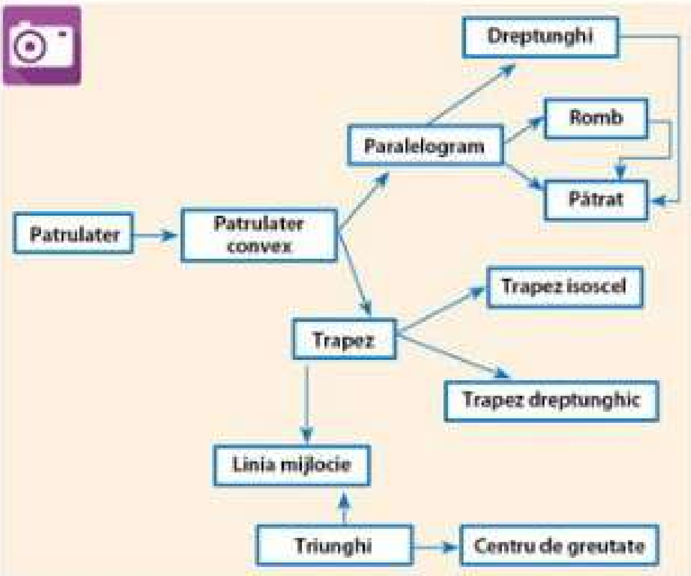
11. AB, AC și BC sunt alei într-un parc, iar D este mijlocul lui BC. Dovedește că distanța de la A la D nu poate fi mai mare decât media aritmetică a lui AB și AC.

12. (*Teorema lui Thebault*) În exteriorul paralelogramului $ABCD$ se construiesc pătratele $ABEF$, $BCGH$, $CDJI$ și $DALK$, având centrele M, N, O și respectiv P. Demonstrează că:

a) $\Delta ODP \equiv \Delta OCN$; **b)** $MNOP$ este romb; **c)** $MNOP$ este pătrat.

13. Fie $ABCD$ un patrulater convex, E mijlocul laturii AB și F mijlocul lui CD. Arată că $EF \leq \frac{AD + BC}{2}$.

Ce am învățat?



Rezolv testele pentru a verifica dacă pot:

- să folosesc proprietățile patrulaterelor când rezolv probleme;
- să identific linia mijlocie a unui triunghi sau a unui trapez și să utilizez proprietățile acesteia în rezolvarea unor probleme;
- să aplic în rezolvarea unor probleme cu patrulatere rezultate studiate la paralelism, perpendicularitate și proprietăți ale triunghiurilor;
- să aleg reprezentări potrivite pentru a calcula lungimile unor segmente și măsurile unor unghiuri;
- să demonstrez, utilizând proprietățile specifice, că un patrulater dintr-o reprezentare geometrică este unul particular.

TESTUL 1

1. Un patrulater convex are două unghiuri drepte și un alt unghi cu măsura de 30°. Calculează măsura celui de-al patrulea unghi al patrulaterului.
2. Determină lungimea liniei mijlocii a unui trapez cu lungimile bazelor de 4 cm și 7 cm.
3. Într-un paralelogram, suma lungimilor laturilor sale este egală cu 48 cm, iar lungimea unei laturi este egală cu dublul lungimii alteia. Calculează lungimile laturilor paralelogramului.
4. Un plic are formă dreptunghiulară. O diagonală formează cu o latură un unghi cu măsura de 40°. Determină măsurile unghiurilor formate de cele două diagonale.
5. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, M mijlocul laturii BC și N simetricul lui M în raport cu mijlocul laturii AC. Demonstrează că $AMCN$ este romb.

TESTUL 2

1. Un romb are un unghi de 60° și diagonala opusă acestuia are lungimea de 6 cm. Calculează suma lungimilor laturilor rombului.
2. În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii AB, iar N al laturii AC. Dacă $MN = 5{,}6$ dm, determină lungimea laturii BC.
3. Banca unui elev are formă de trapez isoscel cu un unghi de 50°. Determină măsurile celorlalte unghiuri ale trapezului.
4. Demonstrează că distanțele de la centrul unui paralelogram la două din laturile opuse ale acestuia sunt egale.
5. Fie $ABCD$ dreptunghi, P și Q situate pe latura CD astfel încât $CQ = DP < \frac{CD}{2}$ și $\{E\} = AP \cap BQ$. Arată că:
   a) $APQB$ este trapez isoscel;
   b) punctele E, F, G și O sunt coliniare, unde F este mijlocul lui CD, G mijlocul lui AB și O punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului.

Să analizăm!

Proprietățile adunării numerelor reale

Comutativitate

$(-2{,}5)+(-1) = (-1)+(-2{,}5)$

$a + b = b + a$ pentru orice numere reale a și b.

$\left(-\sqrt{2}\right) + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \left(-\sqrt{2}\right)$

Asociativitate

$\left[\left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)\right] + (+3) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left[(-1) + (+3)\right]$

$(a + b) + c = a + (b + c)$ pentru orice numere reale a, b și c.

$\left[3 + \left(-\sqrt{2}\right)\right] + 2\sqrt{3} = 3 + \left[\left(-\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{3}\right]$

Numărul real zero este element neutru la adunare

$1{,}6 + 0 = 1{,}6$

$a + 0 = a$ pentru orice număr real a.

$\sqrt{5} + 0 = \sqrt{5}$

Orice număr real are un opus, tot număr real

$3{,}7 + (-3{,}7) = 0$

$a + (-a) = 0$ pentru orice număr real a.

$\sqrt{7} + \left(-\sqrt{7}\right) = 0$

Scurt demers de cercetare

Știm că suma a două numere raționale este un număr rațional.
Ce fel de număr este suma dintre un număr rațional și un număr irațional?

Explorează și tu, cu numere diferite!

$5 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. $5+\sqrt{2}$ este rațional sau irațional?
Presupunem că $5+\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Notăm $5+\sqrt{2} = a$, $a \in \mathbb{Q}$. Rezultă $\sqrt{2} = a-5$.
Dar $a-5 \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Am ajuns la o contradicție. Așadar $5+\sqrt{2}$ este irațional.

Adunând un număr rațional cu un număr irațional, obținem alte exemple de numere iraționale.

Există numere iraționale a căror sumă să fie număr rațional? Există numere iraționale a căror sumă să fie număr irațional ? Dați exemple pentru ambele situații. **Gândim critic și constructiv!**

Evaluăm nivelul de bază

Calculează: ① $\sqrt{2}+5\sqrt{2}$; ② $6\sqrt{5}-4\sqrt{5}$; ③ $2\sqrt{3}+\sqrt{27}-5\sqrt{3}$.

Rezolvări comparative

Elevii au comparat numerele $a=\sqrt{5}+\sqrt{45}$ și $b=4\sqrt{5}$.

Rezolvarea lui Tic

$a=\sqrt{5}+\sqrt{45}=\sqrt{5+45}=\sqrt{50}$

$b=4\sqrt{5}=\sqrt{4^2\cdot 5}=\sqrt{80}$

$50<80 \Rightarrow \sqrt{50}<\sqrt{80} \Rightarrow a<b$

Rezolvarea lui Geo

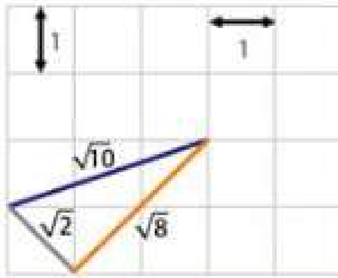
$a=\sqrt{5}+\sqrt{45}=\sqrt{5}+\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{5}+3\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

deci $a=b$

Exprimare orală Spune care dintre cei doi copii a rezolvat corect exercițiul de mai sus și precizează ce a greșit celălalt elev.

Observație

Din desenul alăturat, observăm că $\sqrt{2}+\sqrt{8}>\sqrt{10}$ pentru că suma lungimilor a două laturi ale unui triunghi este mai mare decât lungimea celei de-a treia.
În concluzie, dacă a și b sunt două numere reale, strict pozitive, $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.



Exerciții propuse

1. Calculează: **a)** $213+79$; **b)** $34-29$; **c)** $-21+32$; **d)** $\frac{1}{2}+\frac{7}{2}$; **e)** $\frac{9}{5}-\frac{3}{5}$; **f)** $\frac{3}{2}+\frac{1}{5}$; **g)** $6+(-11)$ **h)** $0{,}2+5$; **i)** $3{,}5-2{,}09$; **j)** $(-3{,}52)+(+5{,}74)-(+3{,}28)$; **k)** $5-\frac{7}{2}$; **l)** $-\frac{11}{6}+\frac{1}{3}$; **m)** $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{5}{18}\right)$.

2. Calculează: **a)** $7\sqrt{2}+8\sqrt{2}$; **b)** $9\sqrt{5}-3\sqrt{5}$; **c)** $0{,}8\sqrt{3}-0{,}5\sqrt{3}$; **d)** $12\sqrt{11}-\left(-7\sqrt{11}\right)$.

3. Compară numerele: **a)** $\sqrt{7}$ și $1+\sqrt{7}$; **b)** $\sqrt{3}$ și $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; **c)** $\sqrt{5}-2$ și $\sqrt{5}$; **d)** $\sqrt{11}+\sqrt{6}$ și $\sqrt{11}-\sqrt{6}$.

4. Calculează: $b=a-2{,}5$; $c=3{,}5-b$; $d=\sqrt{2}+c-b$, pentru $a=-2{,}5$.

5. Scrie mai simplu, grupând convenabil termenii: **a)** $3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-10\sqrt{2}$; **b)** $6\sqrt{13}-4\sqrt{13}+5\sqrt{13}$; **c)** $-34\sqrt{7}+6\sqrt{7}+18\sqrt{7}-9\sqrt{7}$; **d)** $4\sqrt{3}+7\sqrt{3}-2\sqrt{3}$; **e)** $\frac{2}{3}\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{5}\sqrt{6}+\frac{3}{2}\sqrt{6}$.

6. Calculează: **a)** $6\sqrt{3}+\left(3\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right)+3\sqrt{3}$; **b)** $\left(9\sqrt{5}-12\sqrt{5}\right)-\left(6\sqrt{5}-8\sqrt{5}\right)$; **c)** $4\sqrt{7}-2\sqrt{7}-\left(2\sqrt{7}-4\sqrt{7}\right)$; **d)** $5\sqrt{2}-\left(3\sqrt{2}-7\sqrt{2}\right)$; **e)** $-4{,}5\sqrt{5}-\left(6\sqrt{5}-4\sqrt{5}\right)$; **f)** $8\sqrt{7}-\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}+8\sqrt{7}-\frac{5}{6}\sqrt{7}\right)$.

7. Aplică proprietățile adunării numerelor reale și precizează care dintre egalitățile următoare este adevărată: **a)** $\left(-\sqrt{5}+1\right)+2=-\sqrt{5}+4$; **b)** $\left(1{,}3-\sqrt{7}\right)+\sqrt{7}=1{,}3+(-7+7)$; **c)** $2\sqrt{54}+\left(-2\sqrt{54}\right)-\left(-\sqrt{96}\right)=5\sqrt{6}$; **d)** $2{,}25\sqrt{\frac{1}{25}}-1{,}45+\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$.

8. Dacă $a=\frac{5}{22}$, $b=-\frac{6}{55}$, $c=-\frac{7}{35}$ și $d=\frac{7}{66}$, calculează $a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-a$ și apoi $A=(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-a)$. Ce observi?

9. Scrie în forma cea mai simplă: **a)** $3\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{50}$; **b)** $\sqrt{27}+2\sqrt{3}-\sqrt{75}$.

10. Calculează: **a)** $\sqrt{\frac{12}{49}}-\sqrt{\frac{27}{25}}+\sqrt{\frac{48}{121}}$; **b)** $\sqrt{\frac{32}{27}}+\sqrt{\frac{8}{27}}-\sqrt{\frac{50}{48}}$.

11. Calculează $\left(a-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-a\right)$ pentru $a=\sqrt{3}-1$.

12. Aproximează prin lipsă cu o zecimală exactă și compară numerele: **a)** $2+\sqrt{3}$ și $3+\sqrt{2}$; **b)** $4-\sqrt{3}$ și $3-\sqrt{2}$; **c)** $4+\sqrt{2}$ și $4\sqrt{2}$; **d)** $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ și $\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

Scurt demers de cercetare

13. Considerăm suma: $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\ldots+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{9900}}$.
   a) Ce legături există între numărătorii și numitorii termenilor sumei?
   b) Scrie altfel fiecare termen pentru a putea calcula rezultatul.

Alege și rezolvă în 5 minute!

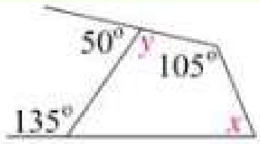
A Calculează $6\sqrt{7}-3\sqrt{7}$.

B Calculează $3\sqrt{2}-\left(6\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right)$.

C Calculează $\sqrt{252}+3\sqrt{448}-2\sqrt{700}$.

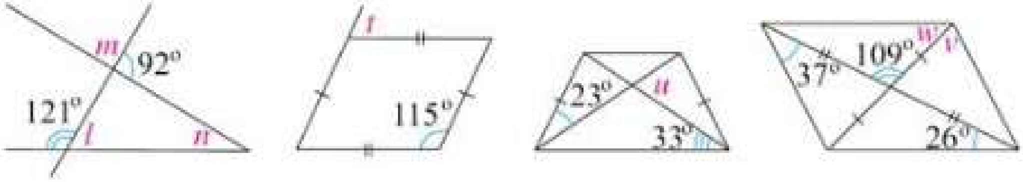
Recapitulăm prin probleme

1. Determină măsurile unghiurilor notate cu x și y din desenul alăturat.

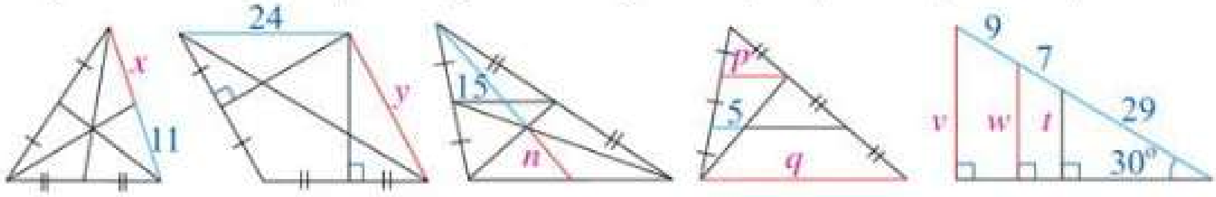


2. În patrulaterul convex $ABCD$, $\sphericalangle B = \sphericalangle A + 12°$, $\sphericalangle C = \sphericalangle B + 12°$ și $\sphericalangle D = \sphericalangle C + 12°$. Calculează măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

3. Folosind datele din fiecare figură, calculează măsurile notate cu litere.



4. Află lungimile notate cu litere pentru figurile de mai jos. Atenție la ipotezele precizate pe desen!



5. a) Demonstrează că patrulaterul determinat de mijloacele laturilor unui patrulater oarecare $ABCD$ este un paralelogram, numit *paralelogramul lui Varignon*.

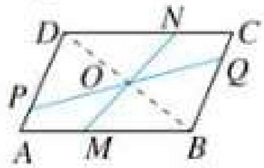
b) În ce condiții paralelogramul lui Varignon este romb?

c) În ce condiții paralelogramul lui Varignon este dreptunghi?

6. Fie $MNPQ$ un trapez cu baza mare MN. Perpendiculara din Q pe MP intersectează MN în R și perpendiculara din N pe MP intersectează PQ în S. Arată că $RNSQ$ este paralelogram.

7. Trapezul $ABCD$ este isoscel, cu baza mare AB, iar $E, F \in AB$ astfel încât $CE \perp AB$ și $DF \perp AB$. Știind că $CDFE$ este pătrat, $AD = 5$ cm și $CE = 3$ cm, calculează lungimea liniei mijlocii a trapezului $ABCD$.

8. Se consideră un paralelogram $ABCD$, cu centrul O prin care se duc dreptele oarecare MN și PQ, ca în figura de mai jos. Demonstrează că $MPNQ$ este paralelogram.



9. Fie un triunghi ABC, cu $\sphericalangle B = 2 \cdot (\sphericalangle C)$. Bisectoarea unghiului B intersectează segmentul AC în D. Fie E simetricul lui D în raport cu BC. Stabilește natura patrulaterului $BECD$.

10. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ADE și DCF. Arată că $EB = AF$ și $EB \perp AF$.

11. AB, AC și BC sunt alei într-un parc, iar D este mijlocul lui BC. Dovedește că distanța de la A la D nu poate fi mai mare decât media aritmetică a lui AB și AC.

12. (*Teorema lui Thebault*) În exteriorul paralelogramului $ABCD$ se construiesc pătratele $ABEF$, $BCGH$, $CDJI$ și $DALK$, având centrele M, N, O și respectiv P. Demonstrează că:

a) $\Delta ODP \equiv \Delta OCN$; **b)** $MNOP$ este romb; **c)** $MNOP$ este pătrat.

13. Fie $ABCD$ un patrulater convex, E mijlocul laturii AB și F mijlocul lui CD. Arată că $EF \leq \dfrac{AD + BC}{2}$.