6

Maria Zaharia
Dan Zaharia

MINISTERUL EDUCAȚIEI

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A VI-A

Editura Paralela 45

CUPRINS

Instrucțiuni de utilizare a manualului în format digital și tipărit

Varianta digitală a manualului cuprinde integral conținutul variantei tipărite și, în plus, o serie de activități multimedia interactive, care vor face învățarea mult mai plăcută și mai ușoară.

Simbolurile care indică activitățile multimedia interactive de învățare:

AMII static

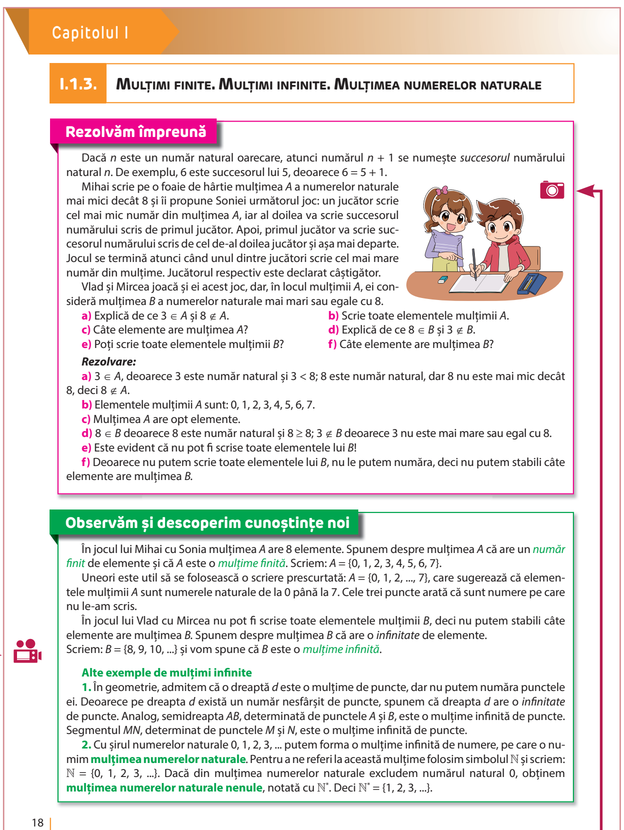
Activarea acestui buton permite vizualizarea optimizată a secvenței din manual.

AMII animat

Activarea acestui buton permite vizualizarea unui filmuleț, pentru care se pot controla începerea/întreruperea (prin butonul Start/Pauză), volumul și maximizarea ecranului.

AMII interactiv

Activarea acestui buton permite vizualizarea unor secvențe educaționale cu grad înalt de interactivitate, la finalul cărora este dat un feedback imediat. Exercițiile marcate cu acest simbol pot fi de tipul: completare, trage și plasează, bifarea variantei corecte, asocierea unor termeni din mai multe coloane.



Capitolul I

I.1.3. MULȚIMI FINITE. MULȚIMI INFINITE. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Rezolvăm împreună

Dacă n este un număr natural oarecare, atunci numărul $n + 1$ se numește *succesorul* numărului natural n. De exemplu, 6 este succesorul lui 5, deoarece $6 = 5 + 1$.

Mihai scrie pe o foaie de hârtie mulțimea A a numerelor naturale mai mici decât 8 și îi propune Soniei următorul joc: un jucător scrie cel mai mic număr din mulțimea A, iar al doilea va scrie succesorul numărului scris de primul jucător. Apoi, primul jucător va scrie succesorul numărului scris de cel de-al doilea jucător și așa mai departe. Jocul se termină atunci când unul dintre jucători scrie cel mai mare număr din mulțime. Jucătorul respectiv este declarat câștigător.

Vlad și Mircea joacă și ei acest joc, dar, în locul mulțimii A, ei consideră mulțimea B a numerelor naturale mai mari sau egale cu 8.

a) Explică de ce $3 \in A$ și $8 \notin A$.
b) Scrie toate elementele mulțimii A.
c) Câte elemente are mulțimea A?
d) Explică de ce $8 \in B$ și $3 \notin B$.
e) Poți scrie toate elementele mulțimii B?
f) Câte elemente are mulțimea B?

Rezolvare:

a) $3 \in A$, deoarece 3 este număr natural și $3 < 8$; 8 este număr natural, dar 8 nu este mai mic decât 8, deci $8 \notin A$.
b) Elementele mulțimii A sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
c) Mulțimea A are opt elemente.
d) $8 \in B$ deoarece 8 este număr natural și $8 \geq 8$; $3 \notin B$ deoarece 3 nu este mai mare sau egal cu 8.
e) Este evident că nu pot fi scrise toate elementele lui B!
f) Deoarece nu putem scrie toate elementele lui B, nu le putem număra, deci nu putem stabili câte elemente are mulțimea B.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În jocul lui Mihai cu Sonia mulțimea A are 8 elemente. Spunem despre mulțimea A că are un *număr finit* de elemente și că A este o *mulțime finită*. Scriem: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Uneori este util să se folosească o scriere prescurtată: $A = \{0, 1, 2, ..., 7\}$, care sugerează că elementele mulțimii A sunt numerele naturale de la 0 până la 7. Cele trei puncte arată că sunt numere pe care nu le-am scris.

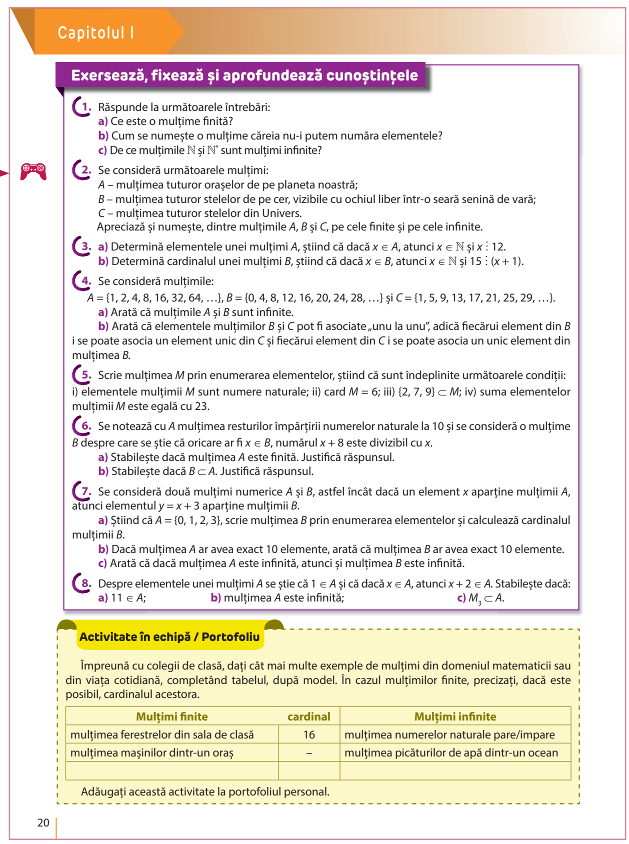
În jocul lui Vlad cu Mircea nu pot fi scrise toate elementele mulțimii B, deci nu putem stabili câte elemente are mulțimea B. Spunem despre mulțimea B că are o *infinitate* de elemente.
Scriem: $B = \{8, 9, 10, ...\}$ și vom spune că B este o *mulțime infinită*.

Alte exemple de mulțimi infinite

1. În geometrie, admitem că o dreaptă d este o mulțime de puncte, dar nu putem număra punctele ei. Deoarece pe dreapta d există un număr nesfârșit de puncte, spunem că dreapta d are o *infinitate* de puncte. Analog, semidreapta AB, determinată de punctele A și B, este o mulțime infinită de puncte. Segmentul MN, determinat de punctele M și N, este o mulțime infinită de puncte.

2. Cu șirul numerelor naturale 0, 1, 2, 3, ... putem forma o mulțime infinită de numere, pe care o numim **mulțimea numerelor naturale**. Pentru a ne referi la această mulțime folosim simbolul $\mathbb{N}$ și scriem: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Dacă din mulțimea numerelor naturale excludem numărul natural 0, obținem **mulțimea numerelor naturale nenule**, notată cu $\mathbb{N}^*$. Deci $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$.

18



Capitolul I

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la următoarele întrebări:
a) Ce este o mulțime finită?
b) Cum se numește o mulțime căreia nu-i putem număra elementele?
c) De ce mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$ sunt mulțimi infinite?

2. Se consideră următoarele mulțimi:
A – mulțimea tuturor orașelor de pe planeta noastră;
B – mulțimea tuturor stelelor de pe cer, vizibile cu ochiul liber într-o seară senină de vară;
C – mulțimea tuturor stelelor din Univers.
Apreciază și numește, dintre mulțimile A, B și C, pe cele finite și pe cele infinite.

3. a) Determină elementele unei mulțimi A, știind că dacă $x \in A$, atunci $x \in \mathbb{N}$ și $x \,\vdots\, 12$.
b) Determină cardinalul unei mulțimi B, știind că dacă $x \in B$, atunci $x \in \mathbb{N}$ și $15 \,\vdots\, (x + 1)$.

4. Se consideră mulțimile:
$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$, $B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots\}$ și $C = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \dots\}$.
a) Arată că mulțimile A și B sunt infinite.
b) Arată că elementele mulțimilor B și C pot fi asociate „unu la unu”, adică fiecărui element din B i se poate asocia un element unic din C și fiecărui element din C i se poate asocia un unic element din mulțimea B.

5. Scrie mulțimea M prin enumerarea elementelor, știind că sunt îndeplinite următoarele condiții: i) elementele mulțimii M sunt numere naturale; ii) card $M = 6$; iii) $\{2, 7, 9\} \subset M$; iv) suma elementelor mulțimii M este egală cu 23.

6. Se notează cu A mulțimea resturilor împărțirii numerelor naturale la 10 și se consideră o mulțime B despre care se știe că oricare ar fi $x \in B$, numărul $x + 8$ este divizibil cu x.
a) Stabilește dacă mulțimea A este finită. Justifică răspunsul.
b) Stabilește dacă $B \subset A$. Justifică răspunsul.

7. Se consideră două mulțimi numerice A și B, astfel încât dacă un element x aparține mulțimii A, atunci elementul $y = x + 3$ aparține mulțimii B.
a) Știind că $A = \{0, 1, 2, 3\}$, scrie mulțimea B prin enumerarea elementelor și calculează cardinalul mulțimii B.
b) Dacă mulțimea A ar avea exact 10 elemente, arată că mulțimea B ar avea exact 10 elemente.
c) Arată că dacă mulțimea A este infinită, atunci și mulțimea B este infinită.

8. Despre elementele unei mulțimi A se știe că $1 \in A$ și că dacă $x \in A$, atunci $x + 2 \in A$. Stabilește dacă:
a) $11 \in A$; b) mulțimea A este infinită; c) $M_3 \subset A$.

Activitate în echipă / Portofoliu

Împreună cu colegii de clasă, dați cât mai multe exemple de mulțimi din domeniul matematicii sau din viața cotidiană, completând tabelul, după model. În cazul mulțimilor finite, precizați, dacă este posibil, cardinalul acestora.

Mulțimi finite	cardinal	Mulțimi infinite
mulțimea ferestrelor din sala de clasă	16	mulțimea numerelor naturale pare/impare
mulțimea mașinilor dintr-un oraș	–	mulțimea picăturilor de apă dintr-un ocean

Adăugați această activitate la portofoliul personal.

20

pentru activitate animată (film sau animație scurtă)

pentru activitate statică, de observare a unei imagini semnificative

pentru activitate interactivă

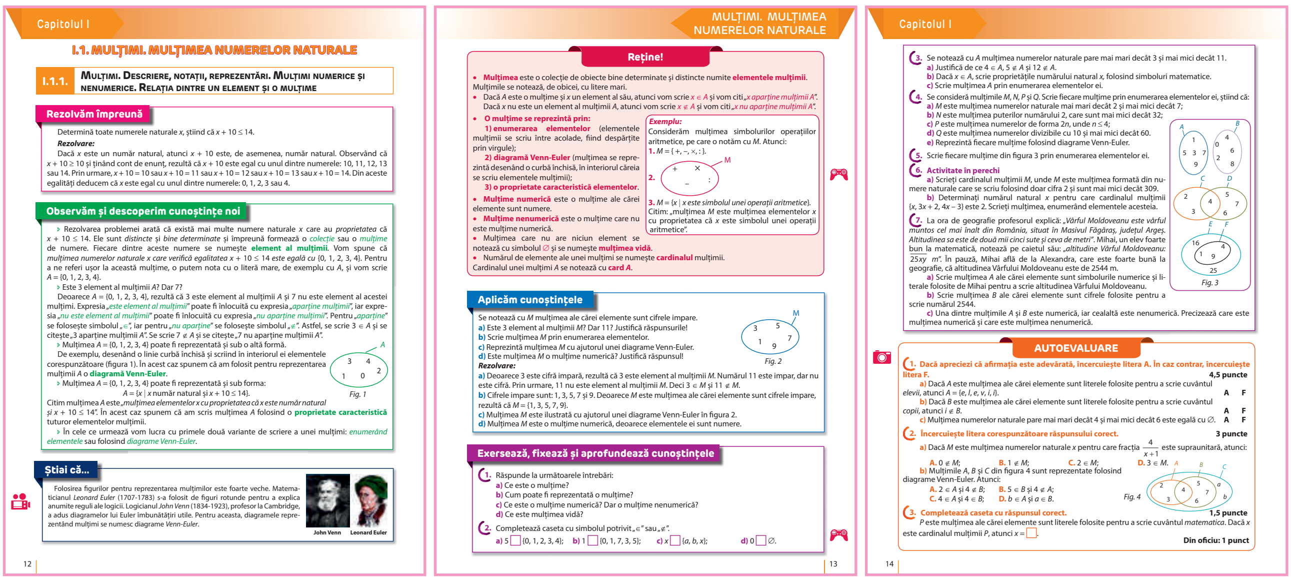
Manualul este organizat pe *capitole* și *unități de învățare*, care acoperă integral domeniile de conținut și asigură atât formarea, cât și dezvoltarea competențelor generale și specifice ale elevilor.

Fiecare unitate de învățare cuprinde *lecții de predare-învățare*, *exerciții și probleme recapitulative* – care constituie un suport pentru lecțiile recapitulative – și se finalizează printr-un test de *evaluare,* care acoperă întreaga gamă a tipologiei itemilor obiectivi, semiobiectivi și subiectivi.

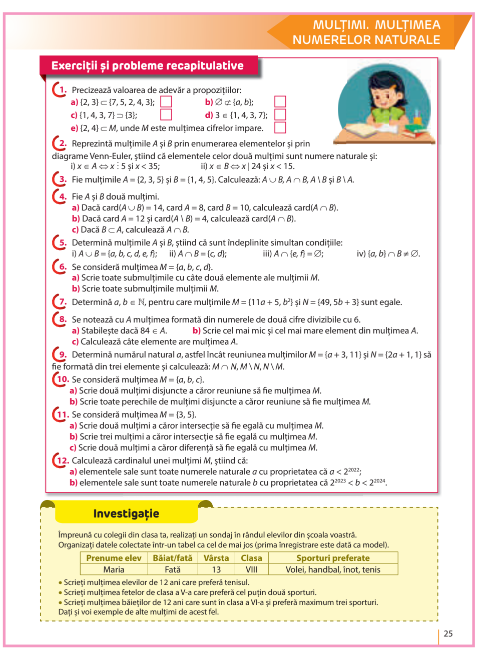
Secvențele metodice ale unei lecții sunt: *Ne amintim*, *Rezolvăm împreună*, *Observăm și descoperim cunoștințe noi*, *Reține!*, *Aplicăm cunoștințele*, *Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele,* acestea asigurând un demers didactic coerent și eficient. Lecția se finalizează cu test de *autoevaluare*, care permite elevilor măsurarea nivelului de competențe atins.

Manualul propune instrumente complementare de evaluare a activității: *portofoliu, proiect, investigație, observarea sistematică a activității și a comportamentului elevului.*

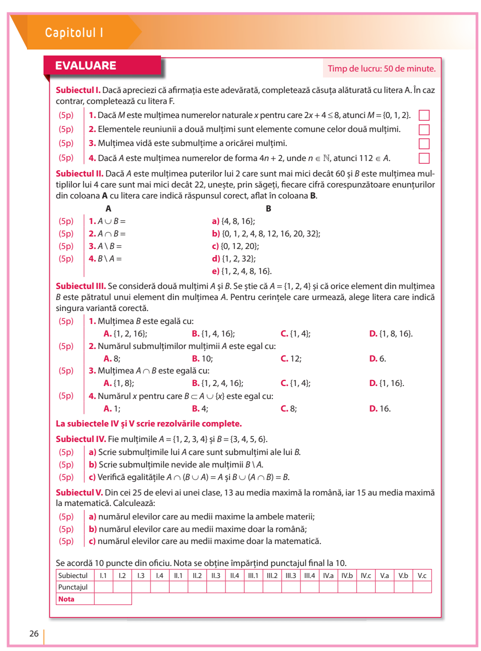
LECȚIE DE PREDARE-ÎNVĂȚARE



RECAPITULARE



EVALUARE



COMPETENȚE GENERALE ȘI SPECIFICE

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$
1.2. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale
1.3. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate
1.4. Recunoașterea fracțiilor echivalente, a fracțiilor ireductibile și a formelor de scriere a unui număr rațional
1.5. Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date
1.6. Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9 în $\mathbb{N}$
2.2. Prelucrarea cantitativă a unor date utilizând rapoarte și proporții pentru organizarea de date
2.3. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor
2.4. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ $(a \neq 0)$, $ax + b = c$, unde a, b și c sunt numere raționale
2.5. Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte
2.6. Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a *c.m.m.d.c.* și a *c.m.m.m.c.*
3.2. Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale
3.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi
3.4. Utilizarea proprietăților operațiilor pentru compararea și efectuarea calculelor cu numere raționale
3.5. Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice
3.6. Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în $\mathbb{N}$
4.2. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
4.3. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi
4.4. Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme, folosind operații în mulțimea numerelor raționale
4.5. Exprimarea, prin reprezentări geometrice sau în limbaj specific matematic, a noțiunilor legate de dreaptă, unghi și cerc
4.6. Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în $\mathbb{N}$
5.2. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, proporțiilor și a colecțiilor de date
5.3. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi
5.4. Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale
5.5. Analizarea seturilor de date numerice sau a reprezentărilor geometrice în vederea optimizării calculelor cu lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri și de arce de cerc
5.6. Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în $\mathbb{N}$
6.2. Modelarea matematică a unei situații date în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
6.3. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului
6.4. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale
6.5. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe și a unor măsuri de unghiuri/arce de cerc
6.6. Transpunerea, în limbaj specific, a unei situații date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

RECAPITULAREA MATERIEI DIN CLASA A V-A

TEST DE EVALUARE INIȚIALĂ 1

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.

(5p) **1.** Rezultatul calculului 2,(6) + 1,5 – 0,8(3) este ....

(5p) **2.** Suma divizorilor numărului 3^3 este egală cu ....

(5p) **3.** Rezultatul calculului $1\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(1-\frac{3}{8}\right)\right]$ este ....

(5p) **4.** Cel mai mic număr natural *n* care, împărțit pe rând la numerele 6, 8 și 10, dă de fiecare dată restul 5 este ....

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana **A** cu răspunsul corespunzător aflat în coloana **B**.

	A	B
(5p)	**1.** Aproximarea prin adaos la mii a numărului 247369 este ...	**a)** 1;
(5p)	**2.** Rotunjirea la mii a numărului 247369 este ...	**b)** 248000;
(5p)	**3.** Ultima cifră a numărului 2029^{2026} este ...	**c)** 247000;
(5p)	**4.** Ultima cifră a numărului 2022^{2024} este ...	**d)** 6;
		e) 9.

Subiectul III. Alege litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(5p) **1.** Dacă $2^{23} + 2^{23} = 2^n$, atunci *n* este egal cu:
A. 22; **B.** 23; **C.** 26; **D.** 24.

(5p) **2.** Dacă $5^{25} : 5^{23} = 5^n$, atunci *n* este egal cu:
A. 48; **B.** 2; **C.** 24; **D.** 3.

(5p) **3.** Dacă $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca} = \overline{abc}$, atunci $a + b + c$ este egal cu:
A. 11; **B.** 21; **C.** 18; **D.** 14.

(5p) **4.** Dacă $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab} = 999$, atunci $a + b + c$ este egal cu:
A. 18; **B.** 9; **C.** 14; **D.** 27.

Subiectul IV. Scrie rezolvările complete.

(10p) **1.** Dacă 3 robinete umplu un bazin în 60 de minute, calculează în câte minute vor umple bazinul 6 robinete de același tip.

(10p) **2.** În 16 vase sunt 62 ℓ de apă. Unele vase au capacitatea de 3 ℓ, iar altele de 10 ℓ. Determină câte vase au capacitatea de 3 ℓ.

(10p) **3.** Împărțind un număr natural la un alt număr natural obținem câtul 2 și restul 26. Calculează cele două numere, știind că suma lor este 137.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.1	IV.2	IV.3
Punctajul															
Nota															

TEST DE EVALUARE INIȚIALĂ 2

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.

(5p) **1.** Trei sau mai multe puncte se numesc coliniare, dacă ....

(5p) **2.** Două unghiuri se numesc congruente, dacă ....

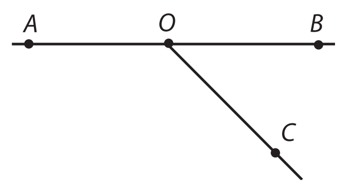
(5p) **3.** Prin distanța dintre două puncte A și B se înțelege ....

(5p) **4.** Un punct M este mijlocul segmentului AB, dacă ....

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana **A** cu răspunsul corespunzător aflat în coloana **B**.

Observă cu atenție desenul de mai jos și stabilește tipul unghiurilor din coloana A.

	A	B
(5p)	**1.** $\sphericalangle AOB$ este ...	**a)** unghi drept;
(5p)	**2.** $\sphericalangle AOC$ este ...	**b)** unghi nul;
(5p)	**3.** $\sphericalangle BOC$ este ...	**c)** unghi ascuțit;
(5p)	**4.** $\sphericalangle OAB$ este ...	**d)** unghi obtuz;
		e) unghi alungit.



Subiectul III. Alege litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(5p) **1.** Suma măsurilor a două unghiuri este egală cu $116°15'$. Dacă unul dintre unghiuri are măsura cu $20°17'$ mai mare decât a celuilalt, atunci măsura unghiului mai mic este egală cu:

A. $45°47'$; **B.** $47°59'$; **C.** $68°16'$; **D.** $18°59'$.

(5p) **2.** Cinci puncte distincte, dintre care oricare trei sunt necoliniare, determină:

A. 5 drepte; **B.** 10 drepte; **C.** 12 drepte; **D.** 8 drepte.

(5p) **3.** Se notează cu O mijlocul segmentului MN și cu Q simetricul punctului O față de punctul N. Dacă $MN = 4$ cm, atunci lungimea segmentului MQ este egală cu:

A. 2 cm; **B.** 4 cm; **C.** 6 cm; **D.** 8 cm.

(5p) **4.** Dacă P este un punct interior unui unghi drept MON și $\sphericalangle NOP = 3 \cdot \sphericalangle MOP$, atunci măsura unghiului MOP este egală cu:

A. $22°30'$; **B.** $30°$; **C.** $45°$; **D.** $60°$.

Subiectul IV. Scrie rezolvările complete.

1. Un unghi AOB are măsura egală cu $108°$, iar C este un punct exterior acestuia, astfel încât măsura unghiului BOC este egală cu $0,(6)$ din măsura unghiului AOB. Fie D un punct interior unghiului AOB, astfel încât măsura unghiului BOD să fie cu $36°$ mai mică decât măsura unghiului AOD.

(5p) **a)** Calculează măsura unghiului BOC.

(5p) **b)** Arată că punctele A, O, C sunt coliniare.

(5p) **c)** Arată că unghiurile AOD și BOC sunt congruente.

2. Se consideră un unghi alungit MON și semidreptele OP și OR, situate în același semiplan față de dreapta MN, astfel încât unghiul POR să fie un unghi drept și semidreapta OR să fie interioară unghiului MOP. Se știe că $\sphericalangle PON = \frac{1}{4} \cdot \sphericalangle ROM$, iar OS este semidreapta opusă semidreptei OP.

(5p) **a)** Calculează măsurile unghiurilor PON și ROM.

(5p) **b)** Arată că unghiul ROS este un unghi drept.

(5p) **c)** Calculează măsura unghiului SOM.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.1.a	IV.1.b	IV.1.c	IV.2.a	IV.2.b	IV.2.c
Punctajul																		
Nota																		

CAPITOLUL I

MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

CUPRINS

I.1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1.1. Mulțimi. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice și nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime

Rezolvăm împreună

Determină toate numerele naturale x, știind că $x + 10 \leq 14$.

Rezolvare:

Dacă x este un număr natural, atunci $x + 10$ este, de asemenea, număr natural. Observând că $x + 10 \geq 10$ și ținând cont de enunț, rezultă că $x + 10$ este egal cu unul dintre numerele: 10, 11, 12, 13 sau 14. Prin urmare, $x + 10 = 10$ sau $x + 10 = 11$ sau $x + 10 = 12$ sau $x + 10 = 13$ sau $x + 10 = 14$. Din aceste egalități deducem că x este egal cu unul dintre numerele: 0, 1, 2, 3 sau 4.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

- Rezolvarea problemei arată că există mai multe numere naturale x care au *proprietatea* că $x + 10 \leq 14$. Ele sunt *distincte* și *bine determinate* și împreună formează o *colecție* sau o *mulțime* de numere. Fiecare dintre aceste numere se numește **element al mulțimii**. Vom spune că *mulțimea numerelor naturale x care verifică egalitatea* $x + 10 \leq 14$ *este egală cu* $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Pentru a ne referi ușor la această mulțime, o putem nota cu o literă mare, de exemplu cu A, și vom scrie $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Este 3 element al mulțimii A? Dar 7?

Deoarece $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, rezultă că 3 este element al mulțimii A și 7 nu este element al acestei mulțimi. Expresia „*este element al mulțimii*” poate fi înlocuită cu expresia „*aparține mulțimii*”, iar expresia „*nu este element al mulțimii*” poate fi înlocuită cu expresia „*nu aparține mulțimii*”. Pentru „*aparține*” se folosește simbolul „$\in$”, iar pentru „*nu aparține*” se folosește simbolul „$\notin$”. Astfel, se scrie $3 \in A$ și se citește „3 aparține mulțimii A”. Se scrie $7 \notin A$ și se citește „7 nu aparține mulțimii A”.

- Mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ poate fi reprezentată și sub o altă formă.

De exemplu, desenând o linie curbă închisă și scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare (figura 1). În acest caz spunem că am folosit pentru reprezentarea mulțimii A o **diagramă Venn-Euler**.

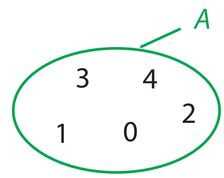


Fig. 1

- Mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ poate fi reprezentată și sub forma:

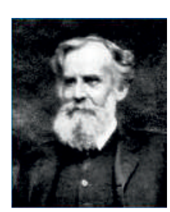
$$A = \{x \mid x \text{ număr natural și } x + 10 \leq 14\}.$$

Citim mulțimea A este „*mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este număr natural și* $x + 10 \leq 14$”. În acest caz spunem că am scris mulțimea A folosind o **proprietate caracteristică** tuturor elementelor mulțimii.

- În cele ce urmează vom lucra cu primele două variante de scriere a unei mulțimi: *enumerând elementele* sau folosind *diagrame Venn-Euler*.

Știai că...

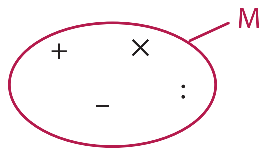
Folosirea figurilor pentru reprezentarea mulțimilor este foarte veche. Matematicianul *Leonard Euler* (1707-1783) s-a folosit de figuri rotunde pentru a explica anumite reguli ale logicii. Logicianul *John Venn* (1834-1923), profesor la Cambridge, a adus diagramelor lui Euler îmbunătățiri utile. Pentru aceasta, diagramele reprezentând mulțimi se numesc diagrame *Venn-Euler*.


John Venn


Leonard Euler

Reține!

- **Mulțimea** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte numite **elementele mulțimii**. Mulțimile se notează, de obicei, cu litere mari.
- Dacă A este o mulțime și x un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ și vom citi „*x aparține mulțimii A*”. Dacă x nu este un element al mulțimii A, atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi „*x nu aparține mulțimii A*”.
- **O mulțime se reprezintă prin:**
  1) enumerarea elementelor (elementele mulțimii se scriu între acolade, fiind despărțite prin virgule);
  2) diagramă Venn-Euler (mulțimea se reprezintă desenând o curbă închisă, în interiorul căreia se scriu elementele mulțimii);
  3) o proprietate caracteristică elementelor.
- **Mulțime numerică** este o mulțime ale cărei elemente sunt numere.
- **Mulțime nenumerică** este o mulțime care nu este mulțime numerică.
- Mulțimea care nu are niciun element se notează cu simbolul $\varnothing$ și se numește **mulțimea vidă**.
- Numărul de elemente ale unei mulțimi se numește **cardinalul** mulțimii. Cardinalul unei mulțimi A se notează cu **card *A***.

Exemplu:
Considerăm mulțimea simbolurilor operațiilor aritmetice, pe care o notăm cu M. Atunci:
1. $M = \{+, -, \times, :\}$.
2.


3. $M = \{x \mid x \text{ este simbolul unei operații aritmetice}\}$.
Citim: „mulțimea M este mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este simbolul unei operații aritmetice”.

Aplicăm cunoștințele

Se notează cu M mulțimea ale cărei elemente sunt cifrele impare.
a) Este 3 element al mulțimii M? Dar 11? Justifică răspunsurile!
b) Scrie mulțimea M prin enumerarea elementelor.
c) Reprezintă mulțimea M cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler.
d) Este mulțimea M o mulțime numerică? Justifică răspunsul!

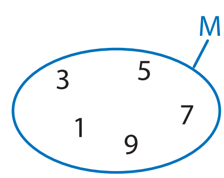


Fig. 2

Rezolvare:
a) Deoarece 3 este cifră impară, rezultă că 3 este element al mulțimii M. Numărul 11 este impar, dar nu este cifră. Prin urmare, 11 nu este element al mulțimii M. Deci $3 \in M$ și $11 \notin M$.
b) Cifrele impare sunt: 1, 3, 5, 7 și 9. Deoarece M este mulțimea ale cărei elemente sunt cifrele impare, rezultă că $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
c) Mulțimea M este ilustrată cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler în figura 2.
d) Mulțimea M este o mulțime numerică, deoarece elementele ei sunt numere.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la următoarele întrebări:
a) Ce este o mulțime?
b) Cum poate fi reprezentată o mulțime?
c) Ce este o mulțime numerică? Dar o mulțime nenumerică?
d) Ce este mulțimea vidă?

2. Completează caseta cu simbolul potrivit „$\in$” sau „$\notin$”.
a) $5 \square \{0, 1, 2, 3, 4\}$; **b)** $1 \square \{0, 1, 7, 3, 5\}$; **c)** $x \square \{a, b, x\}$; **d)** $0 \square \varnothing$.

3. Se notează cu *A* mulțimea numerelor naturale pare mai mari decât 3 și mai mici decât 11.
a) Justifică de ce $4 \in A$, $5 \notin A$ și $12 \notin A$.
b) Dacă $x \in A$, scrie proprietățile numărului natural *x*, folosind simboluri matematice.
c) Scrie mulțimea *A* prin enumerarea elementelor ei.

4. Se consideră mulțimile *M*, *N*, *P* și *Q*. Scrie fiecare mulțime prin enumerarea elementelor ei, știind că:
a) *M* este mulțimea numerelor naturale mai mari decât 2 și mai mici decât 7;
b) *N* este mulțimea puterilor numărului 2, care sunt mai mici decât 32;
c) *P* este mulțimea numerelor de forma $2n$, unde $n \le 4$;
d) *Q* este mulțimea numerelor divizibile cu 10 și mai mici decât 60.
e) Reprezintă fiecare mulțime folosind diagrame Venn-Euler.

5. Scrie fiecare mulțime din figura 3 prin enumerarea elementelor ei.

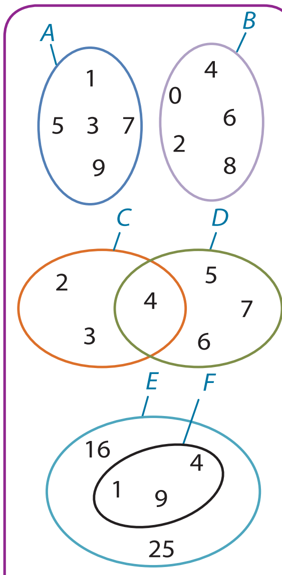


Fig. 3

6. Activitate în perechi
a) Scrieți cardinalul mulțimii *M*, unde *M* este mulțimea formată din numere naturale care se scriu folosind doar cifra 2 și sunt mai mici decât 309.
b) Determinați numerele naturale *x* pentru care cardinalul mulțimii $\{x, 3x + 2, 4x - 3\}$ este 2. Scrieți mulțimea, enumerând elementele acesteia.

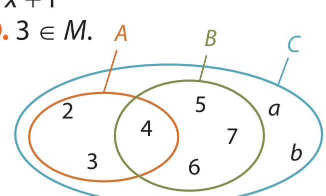
7. La ora de geografie profesorul explică: *„Vârful Moldoveanu este vârful muntos cel mai înalt din România, situat în Masivul Făgăraș, județul Argeș. Altitudinea sa este de două mii cinci sute și ceva de metri”*. Mihai, un elev foarte bun la matematică, notează pe caietul său: *„altitudine Vârful Moldoveanu:* $\overline{25xy}$ *m”*. În pauză, Mihai află de la Alexandra, care este foarte bună la geografie, că altitudinea Vârfului Moldoveanu este de 2544 m.
a) Scrie mulțimea *A* ale cărei elemente sunt simbolurile numerice și literale folosite de Mihai pentru a scrie altitudinea Vârfului Moldoveanu.
b) Scrie mulțimea *B* ale cărei elemente sunt cifrele folosite pentru a scrie numărul 2544.
c) Una dintre mulțimile *A* și *B* este numerică, iar cealaltă este nenumerică. Precizează care este mulțimea numerică și care este mulțimea nenumerică.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**
a) Dacă *A* este mulțimea ale cărei elemente sunt literele folosite pentru a scrie cuvântul *elevii*, atunci $A = \{e, l, e, v, i, i\}$. **A F**
b) Dacă *B* este mulțimea ale cărei elemente sunt literele folosite pentru a scrie cuvântul *copii*, atunci $i \notin B$. **A F**
c) Mulțimea numerelor naturale pare mai mari decât 4 și mai mici decât 6 este egală cu $\varnothing$. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**
a) Dacă *M* este mulțimea numerelor naturale *x* pentru care fracția $\dfrac{4}{x+1}$ este supraunitară, atunci:
A. $0 \notin M$; **B.** $1 \notin M$; **C.** $2 \in M$; **D.** $3 \in M$.
b) Mulțimile *A*, *B* și *C* din figura 4 sunt reprezentate folosind diagrame Venn-Euler. Atunci:
A. $2 \in A$ și $4 \notin B$; **B.** $5 \in B$ și $4 \notin A$;
C. $4 \in A$ și $4 \in B$; **D.** $b \in A$ și $a \in B$.

Fig. 4


3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**
P este mulțimea ale cărei elemente sunt literele folosite pentru a scrie cuvântul *matematica*. Dacă *x* este cardinalul mulțimii *P*, atunci $x = \square$.

Din oficiu: 1 punct

I.1.2. Relații între mulțimi

Rezolvăm împreună

Se consideră mulțimile:

- *A* – mulțimea numerelor mai mari decât 3 și mai mici decât 8;
- *B* – mulțimea numerelor 4, 5, 6 și 7;
- *C* – mulțimea numerelor de două cifre mai mici decât 14;
- *D* – mulțimea numerelor mai mari sau egale cu 10 și mai mici decât 17;
- *E* – mulțimea numerelor mai mari sau egale cu 2 și mai mici sau egale cu 6.

a) Identifică două mulțimi care au aceleași elemente.

b) Identifică o mulțime ale cărei elemente sunt și elemente ale mulțimii *D*.

A este mulțimea numerelor mai mari decât 3 și mai mici decât 8 și $B = \{4, 5, 6, 7\}$. ***Cele două mulțimi A și B au aceleași elemente?***

Rezolvare:

Scriem fiecare mulțime *A*, *B*, *C*, *D* și *E* prin enumerarea elementelor: $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{10, 11, 12, 13\}$, $D = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ și $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Cum $A = \{4, 5, 6, 7\}$ și $B = \{4, 5, 6, 7\}$, rezultă că mulțimile *A* și *B* sunt *două mulțimi care au aceleași elemente*.

b) Cum $C = \{10, 11, 12, 13\}$ și $D = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, un exemplu de *mulțime ale cărei elemente sunt și elemente ale mulțimii D* este *mulțimea C*.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Rezolvarea anterioară arată că există *mulțimi care au aceleași elemente*. Din acest motiv, despre două mulțimi care au aceleași elemente spunem că sunt **mulțimi egale**. Prin urmare, mulțimile *A* și *B* sunt mulțimi egale. Notăm $A = B$.

Mai observăm, de exemplu, că mulțimile *A* și *E* nu au aceleași elemente, deci *A* și *E* nu sunt mulțimi egale. Notăm $A \neq E$.

2. Deoarece toate elementele mulțimii *C* sunt și elemente ale mulțimii *D*, despre mulțimea *C* spunem că este **inclusă** în mulțimea *D*. Notăm $C \subset D$ și citim „*mulțimea C este inclusă în mulțimea D*”. Se mai spune că *mulțimea D include mulțimea C*. Notăm $D \supset C$.

Mai observăm, de exemplu, că nu orice element al mulțimii *A* este și element al mulțimii *E*. Spunem că *mulțimea A nu este inclusă în mulțimea E*. Notăm $A \not\subset E$. Se mai spune că *mulțimea E nu include mulțimea A*. Notăm $E \not\supset A$.

Știai că...

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), matematician german, a fost unul dintre inițiatorii studiului sistematic al *teoriei mulțimilor*, care a devenit o *teorie fundamentală a matematicii*. El a definit *mulțimile infinite*, conceptul de *cardinal al unei mulțimi* și a introdus construcții fundamentale în teoria mulțimilor, cum ar fi *mulțimea părților unei mulțimi*; aceasta este mulțimea tuturor submulțimilor posibile ale unei mulțimi, iar Cantor a arătat că numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu *n* elemente este 2^n.


Philipp Cantor

Reține!

- Două mulțimi sunt **egale** dacă au aceleași elemente. Dacă A și B sunt două mulțimi egale, notăm $A = B$, iar dacă nu sunt egale notăm $A \neq B$.
- O mulțime este **inclusă** într-o altă mulțime, dacă toate elementele primei mulțimi sunt și elemente ale celeilalte mulțimi.
- Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi: $\varnothing \subset A$, oricare ar fi mulțimea A.
- Orice mulțime este inclusă în ea însăși: $A \subset A$, oricare ar fi mulțimea A.
- Două mulțimi sunt egale dacă și numai dacă fiecare dintre ele este o submulțime a celeilalte mulțimi: dacă $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$.

notezi	citești
$A = B$	mulțimile A și B sunt egale
$A \neq B$	mulțimile A și B nu sunt egale
$A \subset B$ sau $B \supset A$	mulțimea A este inclusă în mulțimea B mulțimea A este o submulțime a mulțimii B mulțimea A este o parte a mulțimii B mulțimea B include mulțimea A
$A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$	mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B mulțimea B nu include mulțimea A

Aplicăm cunoștințele

Se consideră mulțimile: $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ și $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, reprezentate în diagrama din figura 1.

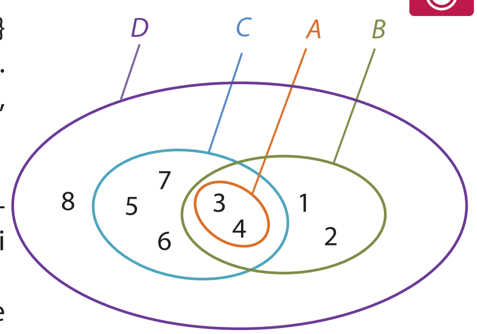


Fig. 1

a) Copiați și completați în căsuța alăturată enunțului litera A, dacă enunțul este adevărat. În caz contrar, completați litera F.

$B \subset D$ ☐; $C \subset B$ ☐; $C \subset D$ ☐; $A \subset D$ ☐.

b) Una dintre mulțimile date le conține pe celelalte trei. Numește mulțimea respectivă și scrie relația dintre aceasta și celelalte trei mulțimi.

c) Una dintre mulțimi este conținută de celelalte trei. Numește mulțimea respectivă și scrie relația dintre aceasta și celelalte trei mulțimi.

Rezolvare:

a) $B \subset D$ deoarece orice element al mulțimii B este și element al mulțimii D.

$C \not\subset B$ deoarece nu orice element al mulțimii C este și element al mulțimii B. De exemplu, $5 \in C$ și $5 \notin B$.

$C \subset D$ deoarece orice element al mulțimii C este și element al mulțimii D.

$A \subset D$ deoarece orice element al mulțimii A este și element al mulțimii D.

Rezultă: $B \subset D$ $\boxed{A}$; $C \subset B$ $\boxed{F}$; $C \subset D$ $\boxed{A}$; $A \subset D$ $\boxed{A}$.

b) Mulțimea D le conține pe celelalte trei mulțimi: $A \subset D$, $B \subset D$ și $C \subset D$.

c) Mulțimea A este conținută în celelalte trei mulțimi: $A \subset B$, $A \subset C$ și $A \subset D$.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. **a)** Despre două mulțimi A și B se știe că $A \subset B$ și $B \subset A$. Sunt mulțimile A și B egale? Justifică răspunsul.

b) Despre două mulțimi A și B se știe că $A = B$. Se poate spune că $A \subset B$ și $B \subset A$? Justifică răspunsul.

2. Determină mulțimea M, pentru care $\{a, b\} \subset M \subset \{a, b, c, d, e\}$.

3. Determină numărul natural n pentru care mulțimile $A = \{2n + 3, 3n + 2\}$ și $B = \{9, 11\}$ sunt egale.

4. Regiunile istorice ale României sunt: Banat, Bucovina, Crișana, Dobrogea, Maramureș, Moldova, Muntenia, Oltenia și Transilvania (figura 2). Se notează cu *M* mulțimea ale cărei elemente sunt orașele *Arad, Brașov, București, Cluj, Constanța, Covasna, Craiova, Deva, Galați, Miercurea Ciuc, Iași, Sfântu Gheorghe, Timișoara, Târgu Mureș*.

a) Scrie submulțimea mulțimii *M*, care conține orașele din Transilvania.

b) Scrie submulțimea mulțimii *M*, care conține orașele din Moldova.

5. Se consideră mulțimile:

$A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 100\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 101\}$.

Fig. 2

Elementele unei mulțimi *C* sunt numerele de forma $2x + 1$, unde $x \in A$, iar elementele unei mulțimi *D* sunt numerele de forma $2x - 1$, unde $x \in B$. Arată că:

a) $201 \in C$ și $203 \notin C$; **b)** $201 \in D$ și $200 \notin D$; **c)** $C = D$.

6. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 100\}$ și două mulțimi *B* și *C*. Elementele mulțimii *B* sunt numerele de forma $2x$, unde $x \in A$, iar elementele mulțimii *C* sunt numerele de forma $4x$, unde $x \in A$. Arată că:

a) $52 \in B$ și $52 \in C$; **b)** $82 \in B$ și $82 \notin C$;

c) mulțimile *B* și *C* au același cardinal, dar nu sunt egale.

7. Se consideră mulțimile *A* și *B*.

a) Dacă mulțimea *A* are cinci elemente, calculează numărul submulțimilor mulțimii *A* care au două elemente și numărul submulțimilor mulțimii *A* care au patru elemente.

b) Dacă mulțimea *A* are cinci elemente, determină numărul submulțimilor mulțimii *A*.

c) Calculează cardinalul mulțimii *B*, știind că are exact 16 submulțimi.

8. Fie un număr natural *x*, $x > 2$.

a) Scrie în ordine crescătoare numerele: $2x + 1$, $x + 3$, $x - 2$, $3x$.

b) Determină numărul *x* pentru care mulțimile $A = \{2x + 1, x + 3, x - 2, 3x\}$ și $B = \{3, 8, 11, 15\}$ sunt egale.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) $\{2, 3, 8\} \supset \{1, 2, 3, 6, 8, 10\}$. A F

b) $\{25\} \subset M$, unde *M* este mulțimea pătratelor numerelor naturale. A F

c) $\varnothing \subset \{0\}$. A F

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

a) Dacă orice element al mulțimii *A* este element al mulțimii *B*, atunci ...

b) Dacă există cel puțin un element al mulțimii *A* care nu este element al mulțimii *B*, atunci ...

c) Dacă orice element al mulțimii *A* este element al mulțimii *B* și orice element al mulțimii *B* este element al mulțimii *A*, atunci ...

1) $B \subset A$;

2) $A = B$;

3) $A \subset B$;

4) $A \neq B$.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi *M* cu 4 elemente este egal cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

I.1.3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale

Rezolvăm împreună

Dacă n este un număr natural oarecare, atunci numărul $n + 1$ se numește *succesorul* numărului natural n. De exemplu, 6 este succesorul lui 5, deoarece $6 = 5 + 1$.

Mihai scrie pe o foaie de hârtie mulțimea A a numerelor naturale mai mici decât 8 și îi propune Soniei următorul joc: un jucător scrie cel mai mic număr din mulțimea A, iar al doilea va scrie succesorul numărului scris de primul jucător. Apoi, primul jucător va scrie succesorul numărului scris de cel de-al doilea jucător și așa mai departe. Jocul se termină atunci când unul dintre jucători scrie cel mai mare număr din mulțime. Jucătorul respectiv este declarat câștigător.

Vlad și Mircea joacă și ei acest joc, dar, în locul mulțimii A, ei consideră mulțimea B a numerelor naturale mai mari sau egale cu 8.

a) Explică de ce $3 \in A$ și $8 \notin A$.
b) Scrie toate elementele mulțimii A.
c) Câte elemente are mulțimea A?
d) Explică de ce $8 \in B$ și $3 \notin B$.
e) Poți scrie toate elementele mulțimii B?
f) Câte elemente are mulțimea B?

Rezolvare:

a) $3 \in A$, deoarece 3 este număr natural și $3 < 8$; 8 este număr natural, dar 8 nu este mai mic decât 8, deci $8 \notin A$.

b) Elementele mulțimii A sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

c) Mulțimea A are opt elemente.

d) $8 \in B$ deoarece 8 este număr natural și $8 \geq 8$; $3 \notin B$ deoarece 3 nu este mai mare sau egal cu 8.

e) Este evident că nu pot fi scrise toate elementele lui B!

f) Deoarece nu putem scrie toate elementele lui B, nu le putem număra, deci nu putem stabili câte elemente are mulțimea B.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În jocul lui Mihai cu Sonia mulțimea A are 8 elemente. Spunem despre mulțimea A că are un *număr finit* de elemente și că A este o *mulțime finită*. Scriem: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Uneori este util să se folosească o scriere prescurtată: $A = \{0, 1, 2, ..., 7\}$, care sugerează că elementele mulțimii A sunt numerele naturale de la 0 până la 7. Cele trei puncte arată că sunt numere pe care nu le-am scris.

În jocul lui Vlad cu Mircea nu pot fi scrise toate elementele mulțimii B, deci nu putem stabili câte elemente are mulțimea B. Spunem despre mulțimea B că are o *infinitate* de elemente.
Scriem: $B = \{8, 9, 10, ...\}$ și vom spune că B este o *mulțime infinită*.

Alte exemple de mulțimi infinite

1. În geometrie, admitem că o dreaptă d este o mulțime de puncte, dar nu putem număra punctele ei. Deoarece pe dreapta d există un număr nesfârșit de puncte, spunem că dreapta d are o *infinitate* de puncte. Analog, semidreapta AB, determinată de punctele A și B, este o mulțime infinită de puncte. Segmentul MN, determinat de punctele M și N, este o mulțime infinită de puncte.

2. Cu șirul numerelor naturale 0, 1, 2, 3, ... putem forma o mulțime infinită de numere, pe care o numim **mulțimea numerelor naturale**. Pentru a ne referi la această mulțime folosim simbolul $\mathbb{N}$ și scriem: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Dacă din mulțimea numerelor naturale excludem numărul natural 0, obținem **mulțimea numerelor naturale nenule**, notată cu $\mathbb{N}^*$. Deci $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$.

Ne amintim

Numărul natural a este *divizibil* cu numărul natural nenul b dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$. Numărul a din relația de mai sus se numește *multiplu* al numărului b, iar b se numește *divizor* al numărului a.

Notații: $a \,\vdots\, b$ („*a este divizibil cu b*”); $b \mid a$ („*b divide pe a*”).

Rezolvăm împreună

Fie n un număr natural oarecare. Vom nota cu D_n mulțimea tuturor divizorilor numărului n, iar cu M_n mulțimea tuturor multiplilor numărului n.

a) Scrie divizorii numărului 12.
b) Scrie mulțimea D_{12}.
c) Scrie multiplii numărului 3, mai mici decât 17.
d) Scrie mulțimea M_3.
e) Care dintre mulțimile D_{12} și M_3 este finită și care este infinită?
f) Dacă $p \in \mathbb{N}$, scrie mulțimea M_p.

Rezolvare:

a) Dacă x este divizor al lui 12, atunci $x \in \mathbb{N}$ și $12 \,\vdots\, x$. Rezultă că divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 12.
b) Mulțimea divizorilor lui 12 este: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
c) Dacă x este un multiplu al numărului 3, atunci $x = 3n$ și $n \in \mathbb{N}$. Rezultă că multiplii lui 3 sunt: $3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, ...$. Prin urmare, multiplii lui 3 mai mici decât 17 sunt: 0, 3, 6, 9, 12, 15.
d) Mulțimea multiplilor lui 3 este $M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$.
e) Mulțimea D_{12} este finită (are 6 elemente), iar mulțimea M_3 este infinită.
f) Dacă $x \in M_p$, atunci $x = np$ și $n \in \mathbb{N}$, deci $M_p = \{0, p, 2p, 3p, 4p, 5p, \ldots\}$.

Reține!

- **Mulțime finită** este o mulțime care are un număr finit de elemente.
- **Mulțime infinită** este o mulțime care nu este finită.
- Mulțimea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ a numerelor naturale și mulțimea $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ a numerelor naturale nenule sunt **mulțimi infinite**.
- Mulțimea tuturor divizorilor numărului natural nenul p, notată cu D_p, este mulțime finită.
- Mulțimea tuturor multiplilor numărului natural nenul p, notată cu M_p, este mulțime infinită.

Aplicăm cunoștințele

Scrie mulțimea A, știind că dacă $x \in A$, atunci $x \in \mathbb{N}^*$, $x \in M_2$, $x \in M_7$ și $x \leq 50$.

Rezolvare:

Deoarece $x \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $x \neq 0$ (1). Deoarece $x \in M_2$, rezultă că $x \in \{0, 2, 4, 6, ...\}$ (2). Deoarece $x \in M_7$, rezultă că $x \in \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, ...\}$ (3). Din (1), (2), (3) și $x \leq 50$ rezultă că $x \in \{14, 28, 42\}$. Deci $A = \{14, 28, 42\}$.

Știai că...

Cerul are cel mult zece mii de stele care pot fi văzute cu ochiul liber? Cu toate acestea, nu toată lumea poate vedea toate stelele; fiecare vede doar ce este deasupra capului în propria lui regiune.

Universul observabil conține o valoare estimată de 10^{24} stele, dar majoritatea sunt invizibile pentru ochiul liber (Universul observabil este o regiune sferică a Universului, care cuprinde toată materia ce poate fi observată de pe Pământ, inclusiv de către telescoapele spațiale și sondele de explorare).

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la următoarele întrebări:
a) Ce este o mulțime finită?
b) Cum se numește o mulțime care nu are un număr finit de elemente?
c) De ce mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$ sunt mulțimi infinite?

2. Se consideră următoarele mulțimi:
A – mulțimea tuturor orașelor de pe planeta noastră;
B – mulțimea tuturor stelelor de pe cer, vizibile cu ochiul liber într-o seară senină de vară;
C – mulțimea tuturor stelelor din Univers.
Apreciază și numește, dintre mulțimile A, B și C, pe cele finite și pe cele infinite.

3. **a)** Determină elementele unei mulțimi A, știind că dacă $x \in A$, atunci $x \in \mathbb{N}$ și $x \,\vdots\, 12$.
b) Determină cardinalul unei mulțimi B, știind că dacă $x \in B$, atunci $x \in \mathbb{N}$ și $15 \,\vdots\, (x + 1)$.

4. Despre două mulțimi A și B se știe că:
- dacă n este un număr natural și $x = 1995n + 1$, atunci x aparține lui A;
- dacă p este un număr natural și $x = 1985p + 3$, atunci x aparține lui B.

a) Dacă se scriu mulțimile A și B prin enumerarea elementelor în ordine crescătoare, determină primele trei elemente ale fiecărei mulțimi.
b) Stabilește dacă mulțimile A și B au elemente comune. Justifică răspunsul.

5. Scrie mulțimea M prin enumerarea elementelor, știind că sunt îndeplinite următoarele condiții: i) elementele mulțimii M sunt numere naturale; ii) card $M = 6$; iii) $\{2, 7, 9\} \subset M$; iv) suma elementelor mulțimii M este egală cu 23.

6. Se notează cu A mulțimea resturilor împărțirii numerelor naturale la 10 și se consideră o mulțime B despre care se știe că oricare ar fi $x \in B$, numărul $x + 8$ este divizibil cu x.
a) Stabilește dacă mulțimea A este finită. Justifică răspunsul.
b) Stabilește dacă $B \subset A$. Justifică răspunsul.

7. Se consideră două mulțimi numerice A și B, astfel încât dacă un element x aparține mulțimii A, atunci elementul $y = x + 3$ aparține mulțimii B.
a) Știind că $A = \{0, 1, 2, 3\}$, scrie mulțimea B prin enumerarea elementelor și calculează cardinalul mulțimii B.
b) Dacă mulțimea A ar avea exact 10 elemente, arată că mulțimea B ar avea exact 10 elemente.
c) Arată că dacă mulțimea A este infinită, atunci și mulțimea B este infinită.

8. Despre elementele unei mulțimi A se știe că $1 \in A$ și că dacă $x \in A$, atunci $x + 2 \in A$. Stabilește dacă:
a) $11 \in A$; **b)** mulțimea A este infinită; **c)** $M_3 \subset A$.

Activitate în echipă / Portofoliu

Împreună cu colegii de clasă, dați cât mai multe exemple de mulțimi din domeniul matematicii sau din viața cotidiană, completând tabelul, după model. În cazul mulțimilor finite, precizați, dacă este posibil, cardinalul acestora.

Mulțimi finite	cardinal	Mulțimi infinite
mulțimea ferestrelor din sala de clasă	16	mulțimea numerelor naturale pare/impare
mulțimea mașinilor dintr-un oraș	–	mulțimea picăturilor de apă dintr-un ocean

Adăugați această activitate la portofoliul personal.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

a) Mulțimea divizorilor numărului 24 este o mulțime finită. **A F**

b) Mulțimea multiplilor unui număr natural p este o mulțime infinită. **A F**

c) Dacă A și B sunt două puncte distincte care aparțin unei drepte d, atunci segmentul AB este o mulțime finită de puncte. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) A. $D_4 \subset D_8$ și $D_8 \subset D_{16}$; **B.** $D_{16} \subset D_8$ și $D_8 \subset D_4$; **C.** $D_4 \subset D_{16}$ și $D_{16} \subset D_8$; **D.** $D_8 \subset D_{16}$ și $D_{16} \subset D_4$.

b) A. $M_4 \subset M_8$ și $M_8 \subset M_{16}$; **B.** $M_{16} \subset M_8$ și $M_8 \subset M_4$; **C.** $M_4 \subset M_{16}$ și $M_{16} \subset M_8$; **D.** $M_8 \subset M_{16}$ și $M_{16} \subset M_4$.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Dintre mulțimile $A = D_{2024}$ și $B = M_4$, finită este mulțimea $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

I.1.4. OPERAȚII CU MULȚIMI: REUNIUNE, INTERSECȚIE, DIFERENȚĂ

Rezolvăm împreună

Sorina consideră următoarele două mulțimi:

- mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *arbore*, notată cu A;
- mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *aerul*, notată cu B.

Folosindu-se de elementele celor două mulțimi, Alexandra consideră următoarele trei mulțimi:

- mulțimea I, a elementelor comune mulțimilor A și B;
- mulțimea R, a elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile considerate de Sorina;
- mulțimea D, a elementelor care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B.

a) Scrie mulțimile A, B, I, R și D prin enumerarea elementelor.

b) Folosind diagrame Venn-Euler, ilustrează mulțimile:

1. A, B și I; **2.** A, B și R; **3.** A, B și D.

Rezolvare:

a) $A = \{a, r, b, o, e\}$, $B = \{a, r, u, l, e\}$. Deoarece *elementele comune* mulțimilor A și B sunt: a, r și e, rezultă $I = \{a, r, e\}$. Elementele care *aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile considerate* de Sorina sunt a, r, b, o, e, u, l. Rezultă că $R = \{a, r, b, o, e, u, l\}$.

Elementele care *aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B* sunt b și o. Rezultă că $D = \{b, o\}$.

b) Vezi figurile 1, 2 și 3.

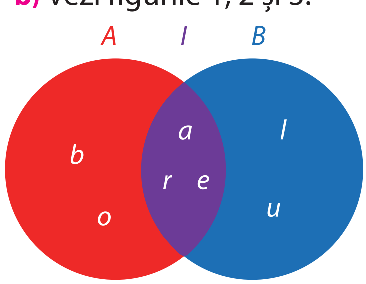


Fig. 1

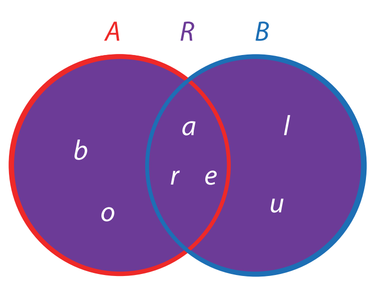


Fig. 2

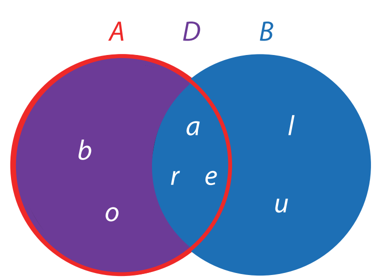


Fig. 3

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Rezolvarea exercițiului pune în evidență procedee, numite ***operații cu mulțimi***, prin care din două mulțimi date obținem o nouă mulțime. Astfel:

1) considerând *elementele comune* celor două mulțimi A și B a rezultat mulțimea $I = \{a, r, e\}$, numită *mulțimea A intersectată cu mulțimea B*, pentru care se folosește notația $A \cap B$. Prin urmare, $A \cap B = \{a, r, e\}$;

2) considerând elementele care *aparțin cel puțin uneia dintre cele două mulțimi* a rezultat mulțimea $R = \{a, r, b, o, e, u, l\}$, numită *mulțimea A reunită cu mulțimea B*, pentru care se folosește notația $A \cup B$. Prin urmare, $A \cup B = \{a, r, b, o, e, u, l\}$;

3) considerând *elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B* a rezultat mulțimea $D = \{b, o\}$, numită *mulțimea A minus mulțimea B*, notată $A \setminus B$ sau $A - B$. Deci $A \setminus B = \{b, o\}$.

Reține!

- Prin **operație cu mulțimi** se înțelege procedeul prin care, din orice două mulțimi date, obținem o nouă mulțime.
- Prin operații cu mulțimi, din două mulțimi date A și B rezultă mulțimile:
  - **mulțimea *A* reunită cu mulțimea *B***, notată $A \cup B$;
  - **mulțimea *A* intersectată cu mulțimea *B***, notată $A \cap B$;
  - **mulțimea *A* minus mulțimea *B***, notată $A \setminus B$.
- Operațiile cu mulțimi prin care din două mulțimi oarecare A și B rezultă mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ se numesc: **reuniune**, **intersecție**, respectiv **diferență**.
- $A \cup B$ este mulțimea formată din **elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile *A* sau *B*** (figura 4). Prin urmare:
  - dacă $x \in A \cup B$, atunci $x \in A$ sau $x \in B$;
  - dacă $x \in A$ sau $x \in B$, atunci $x \in A \cup B$.
- $A \cap B$ este mulțimea formată din **elementele comune mulțimilor *A* și *B*** (figura 5). Prin urmare:
  - dacă $x \in A \cap B$, atunci $x \in A$ și $x \in B$;
  - dacă $x \in A$ și $x \in B$, atunci $x \in A \cap B$.
- $A \setminus B$ este mulțimea formată din **elementele care aparțin mulțimii *A* și nu aparțin mulțimii *B*** (figura 6). Prin urmare:
  - dacă $x \in A \setminus B$, atunci $x \in A$ și $x \notin B$;
  - dacă $x \in A$ și $x \notin B$, atunci $x \in A \setminus B$.
- Două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă se numesc **mulțimi disjuncte**.

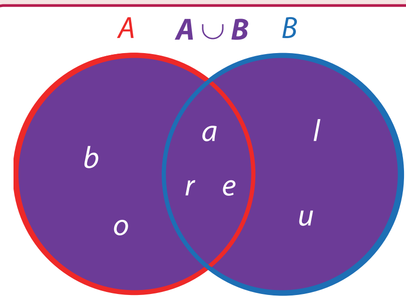


Fig. 4

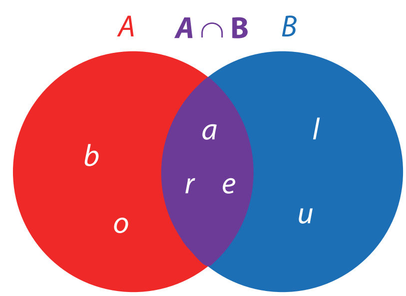


Fig. 5

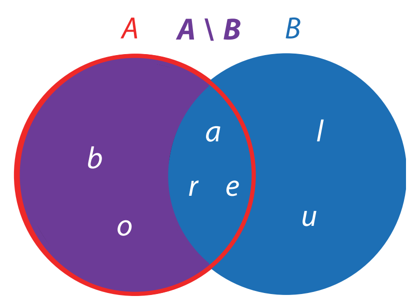
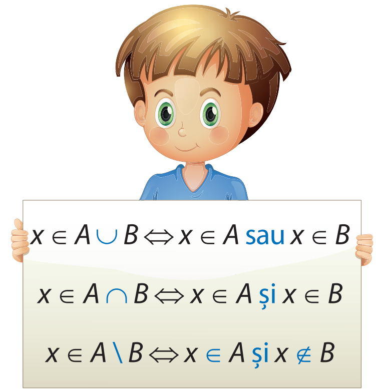


Fig. 6

Aplicăm cunoștințele



1. Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $B = \{2, 3, 4, 7\}$. Determină mulțimile:
a) $A \cup B$; **b)** $A \cap B$; **c)** $A \setminus B$; **d)** $B \setminus A$.

Rezolvare:

a) Deoarece $A \cup B$ este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B, rezultă că: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b) Deoarece $A \cap B$ este mulțimea formată din elementele comune mulțimilor A și B, rezultă că $A \cap B = \{2, 3, 4\}$.

c) Deoarece $A \setminus B$ este mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B, rezultă că $A \setminus B = \{1, 5, 6\}$.

d) Deoarece $B \setminus A$ este mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii B și nu aparțin mulțimii A, rezultă că $B \setminus A = \{7\}$.

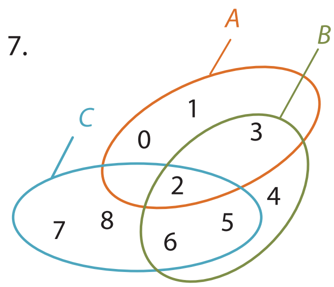


Fig. 7

2. Fie mulțimile A, B și C reprezentate cu ajutorul diagramelor din figura 7.
a) Scrie mulțimile A, B și C prin enumerarea elementelor.
b) Calculează: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A \cap C) \setminus B$.

Rezolvare:

a) Elementele mulțimii A sunt: 0, 1, 2 și 3. Elementele mulțimii B sunt: 2, 3, 4, 5 și 6. Elementele mulțimii C sunt: 2, 5, 6, 7 și 8.
Deci $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ și $C = \{2, 5, 6, 7, 8\}$.

b) Mulțimea $A \cup B$ este mulțimea elementelor care aparțin lui A sau lui B.
Rezultă că: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ și $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Mulțimea $A \setminus B$ este formată din elementele care aparțin lui A și nu aparțin lui B: $A \setminus B = \{0, 1\}$.
Mulțimea $A \setminus C$ este formată din elementele care aparțin lui A și nu aparțin lui C: $A \setminus C = \{0, 1, 3\}$.
Mulțimea $B \setminus C$ este formată din elementele care aparțin lui B și nu aparțin lui C: $B \setminus C = \{3, 4\}$.
Mulțimea $A \cup B \cup C$ este mulțimea elementelor care aparțin lui A *sau* lui B *sau* lui C:
$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Mulțimea $A \cap B \cap C$ este mulțimea elementelor comune mulțimilor A, B și C: $A \cap B \cap C = \{2\}$.
Pentru a calcula $(A \cap C) \setminus B$ procedăm astfel:

1. Calculăm $A \cap C$.
   Mulțimea $A \cap C$ este mulțimea elementelor care aparțin și lui A și lui C. Deci $A \cap C = \{2\}$.
2. Calculăm $(A \cap C) \setminus B$.
   Mulțimea $(A \cap C) \setminus B$ este mulțimea elementelor care aparțin lui $A \cap C$ și care nu aparțin lui B.
   Deci $(A \cap C) \setminus B = \{2\} \setminus \{2, 3, 4, 5, 6\} = \varnothing$.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la întrebările următoare.
a) Ce se înțelege prin *operație cu mulțimi*?
b) Fiind date două mulțimi M, N și x un element al mulțimii $M \cup N$, numai una dintre afirmațiile care urmează este adevărată. Care este aceasta?
A. $x \in M$ și $x \in N$; **B.** $x \in M$ sau $x \in N$; **C.** $x \in M$ și $x \notin N$; **D.** $x \notin M$ și $x \in N$.
c) Pentru două mulțimi M și N, dacă $x \in M$ și $x \notin N$ numai una dintre afirmațiile care urmează este adevărată. Care este aceasta?
A. $x \notin M \setminus N$; **B.** $x \in M \setminus N$; **C.** $x \in M \cap N$; **D.** $x \in N \setminus M$.

2. Se consideră următoarele mulțimi de semne grafice: $A = \{+, -, \times, *\}$ și $B = \{°, +, \times, \#, <, \geq\}$. Calculează:
a) $A \cup B$; **b)** $A \cap B$; **c)** $A \setminus B$; **d)** $B \setminus A$.

3. Diagrama din figura 8 reprezintă trei mulțimi: A, B și C. Folosindu-se de diagrama respectivă și de operațiile cu mulțimi, Alexandra, Irina, Sonia și Mihai reprezintă fiecare câte o mulțime, după cum urmează:

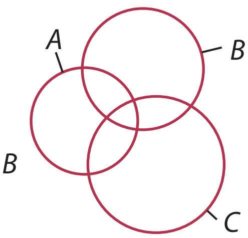
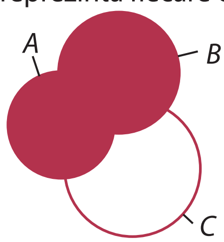
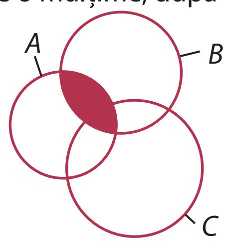


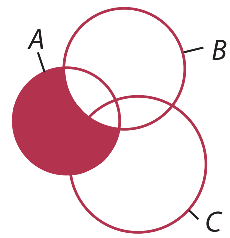
Fig. 8



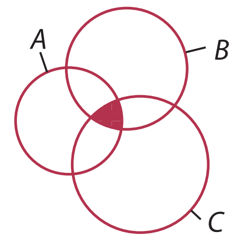
Alexandra



Irina



Sonia



Mihai

Scrie mulțimea reprezentată de:

a) Alexandra; **b)** Irina; **c)** Sonia; **d)** Mihai.

4. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ și $B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24\}$.

a) Calculează mulțimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

b) Verifică egalitatea: $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$.

5. Cei 25 de elevi ai unei clase au participat la două olimpiade școlare. Se știe că la olimpiada de fizică au participat 15 elevi, iar la olimpiada de matematică au participat 17 elevi. Notăm cu F mulțimea elevilor care au participat la olimpiada de fizică, cu M mulțimea elevilor care au participat la olimpiada de matematică și cu X mulțimea elevilor care au participat la ambele olimpiade școlare.

a) Arată că $F \cap M \neq \varnothing$.

b) Reprezintă cu ajutorul diagramelor Venn-Euler mulțimile: F, M, X și $F \cap M$.

c) Determină numărul elevilor care au participat numai la olimpiada de matematică, numărul elevilor care au participat numai la olimpiada de fizică și numărul elevilor care au participat la ambele olimpiade.

6. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 4, 7\}$ și $B = \{1, 4, 7, 8, 9\}$. Calculează mulțimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$, apoi verifică egalitățile:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A),\ \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A).$$

7. Se consideră trei mulțimi: $A = \{1, 5, 7, 10\}$, $B = \{1, 7, 8\}$, $C = \{1, 5, 8, 9\}$.

a) Calculează mulțimile: $B \cup C$, $B \cap C$, $A \setminus B$ și $A \setminus C$.

b) Verifică egalitatea: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

8. Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; ii) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$; iii) $A \setminus B = \{1, 2\}$.

AUTOEVALUARE

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

a) Reuniunea semidreptelor opuse AB și AC este dreapta BC. **A F**

b) Oricare ar fi două drepte a și b, dacă $a \parallel b$, atunci $a \cap b = \varnothing$. **A F**

c) Oricare ar fi punctele A și B, intersecția semidreptelor AB și BA este dreapta AB. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Dacă $x \notin M \cup N$, atunci: **A.** $x \notin M$ sau $x \notin N$; **B.** $x \in M \setminus N$; **C.** $x \in N \cap M$; **D.** $x \notin M$ și $x \notin N$.

b) Dacă $x \notin M$ și $x \in N$, atunci: **A.** $x \notin M \cup N$; **B.** $x \in M \setminus N$; **C.** $x \in N \setminus M$; **D.** $x \in N \cap M$.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 punct**

Dacă semidreptele AB și AC sunt opuse și dacă punctul M aparține segmentului AB, iar punctul N aparține segmentului AC, atunci intersecția segmentelor MN și AB este $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. Precizează valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\{2, 3\} \subset \{7, 5, 2, 4, 3\}$; **b)** $\varnothing \not\subset \{a, b\}$;

c) $\{1, 4, 3, 7\} \supset \{3\}$; **d)** $3 \in \{1, 4, 3, 7\}$;

e) $\{2, 4\} \subset M$, unde M este mulțimea cifrelor impare.

2. Reprezintă mulțimile A și B prin enumerarea elementelor și prin diagrame Venn-Euler, știind că elementele celor două mulțimi sunt numere naturale și:

i) $x \in A \Leftrightarrow x \,\vdots\, 5$ și $x < 35$; ii) $x \in B \Leftrightarrow x \mid 24$ și $x < 15$.

3. Fie mulțimile $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{1, 4, 5\}$. Calculează: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

4. Fie A și B două mulțimi.

a) Dacă $\text{card}(A \cup B) = 14$, $\text{card } A = 8$, $\text{card } B = 10$, calculează $\text{card}(A \cap B)$.

b) Dacă $\text{card } A = 12$ și $\text{card}(A \setminus B) = 4$, calculează $\text{card}(A \cap B)$.

c) Dacă $B \subset A$, calculează $A \cap B$.

5. Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; ii) $A \cap B = \{c, d\}$; iii) $A \cap \{e, f\} = \varnothing$; iv) $\{a, b\} \cap B \neq \varnothing$.

6. Se consideră mulțimea $M = \{a, b, c, d\}$.

a) Scrie toate submulțimile cu câte două elemente ale mulțimii M.

b) Scrie toate submulțimile mulțimii M.

7. Determină $a, b \in \mathbb{N}$, pentru care mulțimile $M = \{11a + 5, b^2\}$ și $N = \{49, 5b + 3\}$ sunt egale.

8. Se notează cu A mulțimea formată din numerele de două cifre divizibile cu 6.

a) Stabilește dacă $84 \in A$. **b)** Scrie cel mai mic și cel mai mare element din mulțimea A.

c) Calculează câte elemente are mulțimea A.

9. Determină numărul natural a, astfel încât reuniunea mulțimilor $M = \{a + 3, 11\}$ și $N = \{2a + 1, 1\}$ să fie formată din trei elemente și calculează: $M \cap N$, $M \setminus N$, $N \setminus M$.

10. Se consideră mulțimea $M = \{a, b, c\}$.

a) Scrie două mulțimi disjuncte a căror reuniune să fie mulțimea M.

b) Scrie toate perechile de mulțimi disjuncte a căror reuniune să fie mulțimea M.

11. Se consideră mulțimea $M = \{3, 5\}$.

a) Scrie două mulțimi a căror intersecție să fie egală cu mulțimea M.

b) Scrie trei mulțimi a căror intersecție să fie egală cu mulțimea M.

c) Scrie două mulțimi a căror diferență să fie egală cu mulțimea M.

12. Calculează cardinalul unei mulțimi M, știind că:

a) elementele sale sunt toate numerele naturale a cu proprietatea că $a < 2^{2022}$;

b) elementele sale sunt toate numerele naturale b cu proprietatea că $2^{2023} < b < 2^{2024}$.

Investigație

Împreună cu colegii din clasa ta, realizați un sondaj în rândul elevilor din școala voastră.
Organizați datele colectate într-un tabel ca cel de mai jos (prima înregistrare este dată ca model).

Prenume elev	Băiat/fată	Vârsta	Clasa	Sporturi preferate
Maria	Fată	13	VIII	Volei, handbal, înot, tenis

- Scrieți mulțimea elevilor de 12 ani care preferă tenisul.
- Scrieți mulțimea fetelor de clasa a V-a care preferă cel puțin două sporturi.
- Scrieți mulțimea băieților de 12 ani care sunt în clasa a VI-a și preferă maximum trei sporturi.

Dați și voi exemple de alte mulțimi de acest fel.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Dacă M este mulțimea numerelor naturale x pentru care $2x + 4 \leq 8$, atunci $M = \{0, 1, 2\}$. ☐

(5p) **2.** Elementele reuniunii a două mulțimi sunt elemente comune celor două mulțimi. ☐

(5p) **3.** Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi. ☐

(5p) **4.** Dacă A este mulțimea numerelor de forma $4n + 2$, unde $n \in \mathbb{N}$, atunci $112 \in A$. ☐

Subiectul II. Dacă A este mulțimea puterilor lui 2 care sunt mai mici decât 60 și B este mulțimea multiplilor lui 4 care sunt mai mici decât 22, unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana **B**.

	A	**B**
(5p)	**1.** $A \cup B =$	**a)** $\{4, 8, 16\}$;
(5p)	**2.** $A \cap B =$	**b)** $\{0, 1, 2, 4, 8, 12, 16, 20, 32\}$;
(5p)	**3.** $A \setminus B =$	**c)** $\{0, 12, 20\}$;
(5p)	**4.** $B \setminus A =$	**d)** $\{1, 2, 32\}$;
		e) $\{1, 2, 4, 8, 16\}$.

Subiectul III. Se consideră două mulțimi A și B. Se știe că $A = \{1, 2, 4\}$ și că orice element din mulțimea B este pătratul unui element din mulțimea A. Pentru cerințele care urmează, alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Mulțimea B este egală cu:

A. $\{1, 2, 16\}$; **B.** $\{1, 4, 16\}$; **C.** $\{1, 4\}$; **D.** $\{1, 8, 16\}$.

(5p) **2.** Numărul submulțimilor mulțimii A este egal cu:

A. 8; **B.** 10; **C.** 12; **D.** 6.

(5p) **3.** Mulțimea $A \cap B$ este egală cu:

A. $\{1, 8\}$; **B.** $\{1, 2, 4, 16\}$; **C.** $\{1, 4\}$; **D.** $\{1, 16\}$.

(5p) **4.** Numărul x pentru care $B \subset A \cup \{x\}$ este egal cu:

A. 1; **B.** 4; **C.** 8; **D.** 16.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

Subiectul IV. Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

(5p) **a)** Scrie submulțimile lui A care sunt submulțimi ale lui B.

(5p) **b)** Scrie submulțimile nevide ale mulțimii $B \setminus A$.

(5p) **c)** Verifică egalitățile $A \cap (B \cup A) = A$ și $B \cup (A \cap B) = B$.

Subiectul V. Din cei 25 de elevi ai unei clase, 13 au media maximă la română, iar 15 au media maximă la matematică. Calculează:

(5p) **a)** numărul elevilor care au medii maxime la ambele materii;

(5p) **b)** numărul elevilor care au medii maxime doar la română;

(5p) **c)** numărul elevilor care au medii maxime doar la matematică.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

I.2. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

I.2.1. DESCOMPUNEREA NUMERELOR NATURALE ÎN PRODUS DE PUTERI DE NUMERE PRIME

Ne amintim

- Determină câtul și restul împărțirii numărului $a = 317$ la numărul $b = 15$, apoi scrie relația dintre deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul acestei împărțiri.

Rezolvare: Numărul $a = 317$ este *deîmpărțitul*, iar numărul $b = 15$ este *împărțitorul*. Efectuăm împărțirea, parcurgând etapele învățate în clasa a V-a.

Câtul împărțirii numărului $a = 317$ la numărul $b = 15$ este numărul $c = 21$, iar *restul* împărțirii este numărul $r = 2$. Atunci $317 = 15 \cdot 21 + 2$ și $2 < 15$ sau $a = b \cdot c + r$ și $r < b$.

deîmpărțit

3	1	7		1	5	← *împărțitor*
3	0			2	1	← *cât*
=	1	7				
	1	5				
	=	2				← *rest*

- **Teorema împărțirii cu rest**

▪ Oricare ar fi numărul natural a și oricare ar fi numărul natural nenul b, există numerele naturale q și r, unic determinate, astfel încât $a = b \cdot q + r$ și $r < b$.

▪ Dacă $r = 0$, atunci $a = b \cdot q$. În acest caz se spune că:
- *a este un multiplu al lui b*;
- *a este divizibil cu b* (se scrie $a \vdots b$);
- *b este un divizor al lui a*;
- *b divide a* (se scrie $b \mid a$).

Exemplu: Împărțind numărul 315 la 7 rezultă câtul 45 și restul 0. Rezultă că $315 = 7 \cdot 45$ și spunem că:
- 315 *este un multiplu al lui* 7;
- 315 *este divizibil cu* 7 ($315 \vdots 7$);
- 7 *este un divizor al lui* 315;
- 7 *divide* 315 ($7 \mid 315$).

- **Enunță și exemplifică criteriile de divizibilitate cu: 2, 3, 5, 9, 10.**

- **Enunță și exemplifică noțiunile de număr prim și număr compus.**

Rezolvăm împreună

Arată că numărul 252 se scrie ca un produs de puteri de numere prime.

Rezolvare:

252	:	2	=	126		$252 = 2 \cdot 126$
126	:	2	=	63	→	$126 = 2 \cdot 63$
					→	$\boxed{252 = 2 \cdot 2 \cdot 63}$
63	:	3	=	21	→	$63 = 3 \cdot 21$
					→	$\boxed{252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 21}$
21	:	3	=	7	→	$21 = 3 \cdot 7$
					→	$\boxed{252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}$
7	:	7	=	1		

Rezultă că $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Deci 252 este un produs de puteri de numere prime.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Numărul 252 este divizibil cu numărul prim 2.
Se împarte 252 la numărul prim 2. Rezultă câtul 126.
Câtul 126 se împarte la următorul număr prim cu care acesta este divizibil și așa mai departe, până când câtul împărțirii devine 1.
În general, calculele se organizează conform modelului prezentat în coloana colorată.

252	2	$\leftarrow 252 \,\vdots\, 2$
126	2	$\leftarrow 126 \,\vdots\, 2$
63	3	$\leftarrow 63 \,\vdots\, 3$
21	3	$\leftarrow 21 \,\vdots\, 3$
7	7	$\leftarrow 7 \,\vdots\, 7$
1		

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

Reține!

- **Orice număr natural compus poate fi scris ca un produs de puteri de numere prime.**
- Prin **descompunerea în factori primi** a unui număr natural se înțelege scrierea numărului respectiv ca un produs de puteri de numere prime.
- Metoda prin care un număr natural se scrie ca un produs de puteri de numere prime este numită și ***algoritmul de descompunere a numerelor în factori primi***.

Aplicăm cunoștințele

Arată că numărul 311 este prim.

Rezolvare: Pentru a arăta că numărul 311 este prim trebuie să arătăm că 311 nu are divizori proprii. Conform criteriilor de divizibilitate, observăm că acest număr nu este divizibil cu niciunul dintre numerele prime 2, 3 sau 5.
Verificăm dacă numărul 311 are ca divizori vreunul dintre numerele prime 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... Pentru aceasta, îl împărțim pe 311 la aceste numere.

$311 \mid 7 \quad \leftarrow î$	$311 \mid 11 \quad \leftarrow î$	$311 \mid 13 \quad \leftarrow î$	$311 \mid 17 \quad \leftarrow î$	$311 \mid 19 \quad \leftarrow î$
$28 \mid 44 \quad \leftarrow c$	$22 \mid 28 \quad \leftarrow c$	$26 \mid 23 \quad \leftarrow c$	$17 \mid 18 \quad \leftarrow c$	$19 \mid 16 \quad \leftarrow c$
$=31 \quad c > î$	$=91 \quad c > î$	$=51 \quad c > î$	$141 \quad c > î$	$121 \quad c < î$
28	88	39	136	114
$=3$	$=3$	12	$==5$	$==7$
$311 = 7 \cdot 44 + 3$	$311 = 11 \cdot 28 + 3$	$311 = 13 \cdot 23 + 12$	$311 = 17 \cdot 18 + 5$	$311 = 19 \cdot 16 + 7$

Efectuând împărțirile, observăm că de fiecare dată restul împărțirii este nenul și, ca urmare, niciunul dintre numerele prime mai mici sau egale cu 19 nu este divizor al numărului 311.
Comparăm de fiecare dată *câtul* (notat cu *c*) cu *împărțitorul* (notat cu *î*). Împărțind pe 311 succesiv la numerele prime 7, 11, 13 și 17, de fiecare dată obținem câtul mai mare decât împărțitorul. Împărțind pe 311 la următorul număr prim, care este 19, rezultă *câtul mai mic decât împărțitorul*.
Considerăm un număr prim p, $p > 19$ și admitem că $p \mid 311$. Rezultă că $311 = p \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $p > 19$, rezultă că $n < 17$ (în caz contrar, am avea $n \geq 17$ și atunci $p \cdot n > 19 \cdot 17$, adică $311 > 323$, ceea ce este absurd). Dacă n nu este prim, îl descompunem în factori primi. Atunci, deoarece $311 = p \cdot n$ și $n < 17$, rezultă că descompunerea lui 311 conține factori primi mai mici decât 17. Acest fapt este absurd deoarece, conform rezultatelor anterioare, 311 nu este divizibil cu niciunul dintre numerele prime mai mici sau egale cu 19. Prin urmare, dacă p este prim și $p > 19$, atunci $p \nmid 311$.
În concluzie, numărul 311 este prim.