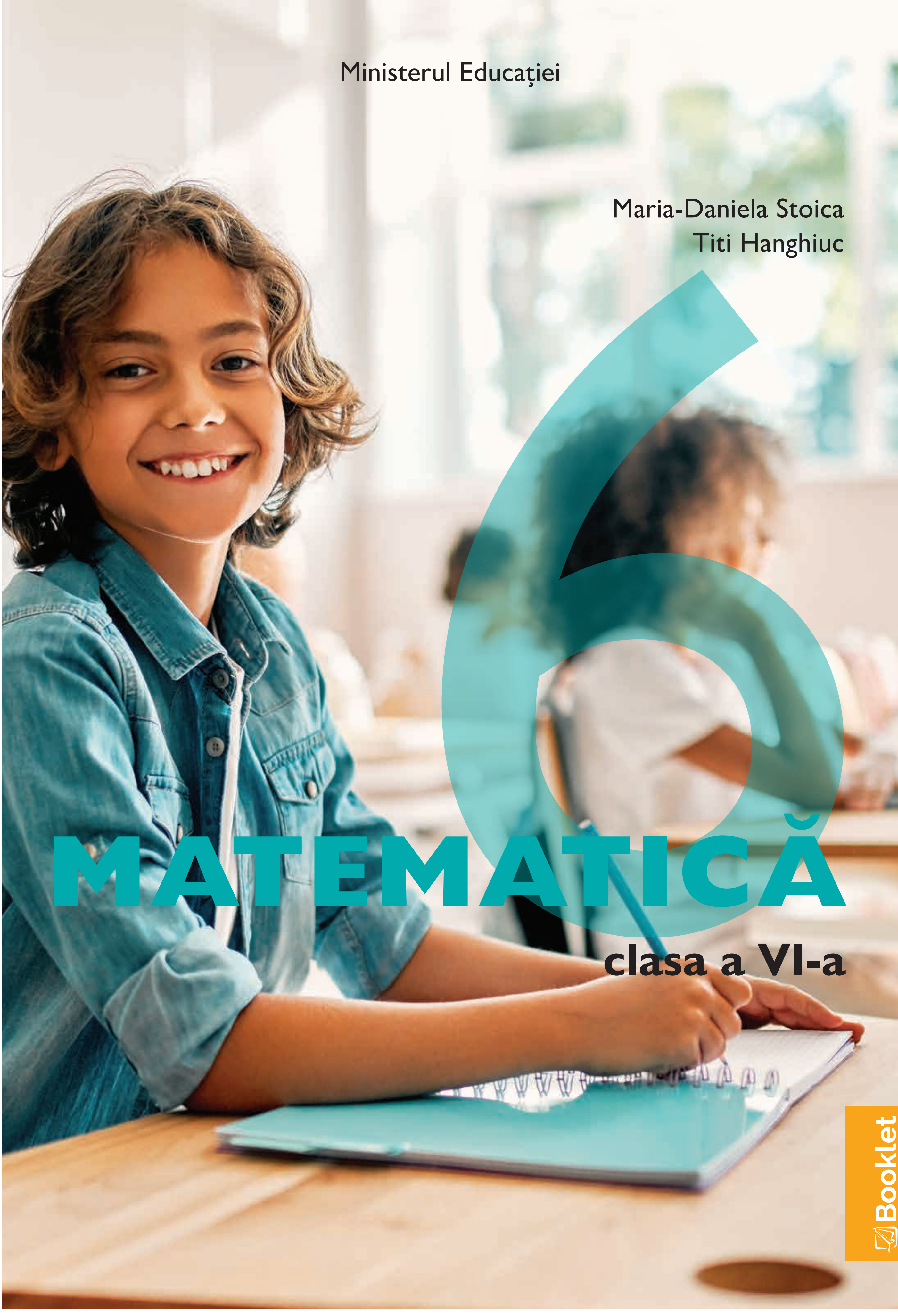
Ministerul Educației

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc

MATEMATICĂ

clasa a VI-a



Booklet

Recapitulare inițială 7

UNITATEA 1
Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime 10
2. Relații între mulțimi 14
3. Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale 18
4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență 21
5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime 25
6. Determinarea celui mai mare divizor comun și a celui mai mic multiplu comun. Numere prime între ele 27
7. Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{N}$ 32

Exerciții recapitulative 35

Evaluare 36

UNITATEA 2
Rapoarte, proporții

1. Rapoarte 38
2. Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor. Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție 42
3. Proporții derivate 45
4. Șir de rapoarte egale 49
5. Mărimi direct proporționale 52
6. Mărimi invers proporționale 55
7. Regula de trei simplă 58
8. Elemente de organizare a datelor. Reprezentarea datelor prin grafice în contextul proporționalității. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice 60
9. Probabilități 64

Exerciții recapitulative 67

Evaluare 68

UNITATEA 3
Mulțimea numerelor întregi

1. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axa numerelor. Modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi 70
2. Adunarea numerelor întregi. Proprietăți 75
3. Scăderea numerelor întregi 79
4. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți 81
5. Împărțirea numerelor întregi 84
6. Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri 86
7. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor 89
8. Ecuații în mulțimea numerelor întregi 91
9. Inecuații în mulțimea numerelor întregi 96
10. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi 99

Exerciții recapitulative 103

Evaluare 104

UNITATEA 4
Mulțimea numerelor raționale

1. Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, opusul unui număr rațional. Modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale 106
2. Adunarea numerelor raționale. Proprietăți. Scăderea numerelor raționale 114
3. Înmulțirea numerelor raționale. Proprietăți 119
4. Împărțirea numerelor raționale 123
5. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri 125
6. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor 129
7. Ecuații de tipul $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ $(a \neq 0)$, $a \cdot x + b = c$, unde a, b și c sunt numere raționale 131
8. Probleme care se rezolvă folosind ecuațiile 134

Exerciții recapitulative 136

Evaluare 138

CUPRINS

UNITATEA 5
Noțiuni geometrice fundamentale

1. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri formate în jurul unui punct. Unghiuri complementare, unghiuri suplementare 140
2. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi 146
3. Drepte paralele. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice 152
4. Drepte perpendiculare în plan. Oblice. Distanța de la un punct la o dreaptă. Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment. Simetria față de o dreaptă 160
5. Cercul 169
   5.1. Cerc: definiție și construcție. Elemente în cerc. Unghi la centru. Măsuri 169
   5.2. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri 174

Exerciții recapitulative 177
Evaluare 178

UNITATEA 6
Triunghiul

1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare, perimetru. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi 180
2. Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului 185
3. Linii importante în triunghi 188
4. Congruența triunghiurilor oarecare 193
   4.1. Criterii de congruență a triunghiurilor 193
   4.2. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice 197
5. Metoda triunghiurilor congruente 200
6. Proprietăți ale triunghiului isoscel 204
7. Proprietăți ale triunghiului echilateral 209
8. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic 212

Exerciții recapitulative 217
Evaluare 218
Recapitulare finală 219
Indicații și răspunsuri 221
Anexă 224

Ce vei învăța anul acesta la matematică?

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$

1.2. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale

1.3. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate

1.4. Recunoașterea fracțiilor echivalente, a fracțiilor ireductibile și a formelor de scriere a unui număr rațional

1.5. Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date

1.6. Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9 în $\mathbb{N}$

2.2. Prelucrarea cantitativă a unor date utilizând rapoarte și proporții pentru organizarea de date

2.3. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor

2.4. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $a \cdot x + b = c$, unde a, b și c sunt numere raționale

2.5. Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte

2.6. Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a *c.m.m.d.c.* și a *c.m.m.m.c.*

3.2. Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale

3.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi

3.4. Utilizarea proprietăților operațiilor pentru compararea și efectuarea calculelor cu numere raționale

3.5. Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice

3.6. Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în $\mathbb{N}$

4.2. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

4.3. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi

4.4. Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme, folosind operații în mulțimea numerelor raționale

4.5. Exprimarea, prin reprezentări geometrice sau în limbaj specific matematic, a noțiunilor legate de dreaptă, unghi și cerc

4.6. Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în $\mathbb{N}$

5.2. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, proporțiilor și a colecțiilor de date

5.3. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi

5.4. Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale

5.5. Analizarea seturilor de date numerice sau a reprezentărilor geometrice în vederea optimizării calculelor cu lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri și de arce de cerc

5.6. Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în $\mathbb{N}$

6.2. Modelarea matematică a unei situații date în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

6.3. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului

6.4. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale

6.5. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe și a unor măsuri de unghiuri/arce de cerc

6.6. Transpunerea, în limbaj specific, a unei situații date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

GHID DE UTILIZARE A MANUALULUI DIGITAL

Manualul digital reproduce integral versiunea tipărită, oferind elevilor posibilitatea de a interacționa cu diverse elemente de conținut. Astfel, aceștia vor putea să vizioneze animații sau filme, să rezolve exerciții interactive și să navigheze prin manual.

Simboluri:

1. Elemente grafice (AMII-uri statice):
imagini, informații și activități suplimentare.

2. Elemente video (AMII-uri animate):
videoclipuri cu informații și activități suplimentare, curiozități.

3. Exerciții interactive (AMII-uri interactive):
exerciții de alegere multiplă, de tip adevărat sau fals, de asociere, de completare etc.

Cum se folosește manualul digital?

1. Meniul superior

Mărire/micșorare – se mărește sau se micșorează fereastra.

Căutare – pot fi efectuate căutări în manualul digital după cuvinte-cheie.

Cuprins – deschide cuprinsul manualului digital.

Înapoi la prima pagină – se revine la prima pagină a manualului digital.

Pagina anterioară – se accesează pagina anterioară paginii curente.

Pagina următoare – se accesează pagina următoare paginii curente.

Salt la ultima pagină – se accesează ultima pagină a manualului digital.

Adnotări – deschide o galerie de instrumente, cu funcții diferite, ce permit operații în timp real: sublinieri, adnotări, încercuiri, demarcări, mascări, evidențieri etc.

Tipărește pagini din manualul digital.

Indicații – se accesează ecranul cu indicații.

2. Ajutor în utilizarea exercițiilor interactive (AMII-urilor interactive):

Deschide exercițiul interactiv dând click pe . Pentru exercițiile de completare, utilizează mouse-ul pentru a poziționa cursorul pe spațiul în care dorești să completezi. Pentru exercițiile de alegere, urmărește cerința, apoi utilizează mouse-ul și apasă pe varianta de răspuns pe care o consideri corectă. Apasă butonul **Verifică** pentru a vedea dacă ai ales corect. Pentru toate tipurile de exerciții apare ✔ în cazul răspunsului corect și ✖ în cazul răspunsului greșit. Pentru a relua rezolvarea exercițiului, apasă butonul **Mai încearcă**.

3. Ajutor în utilizarea elementelor video (AMII-urilor animate):

Apasă butonul pentru a deschide videoclipul. Butonul **Play (Vizualizare)** este localizat pe bara de jos a ferestrei, alături de **Volum** și de opțiunea **Afișare completă** pe ecran. Pentru a opri temporar videoclipul, apasă butonul **Pauză**, de pe bara de jos a ferestrei. Pentru a închide videoclipul, apasă butonul din colțul din dreapta sus al ferestrei.

4. Ajutor în utilizarea elementelor grafice (AMII-urilor statice):

Apasă butonul . Imaginea se va deschide într-o fereastră nouă. Apasă butonul din colțul din dreapta sus, pentru a închide imaginea.

Recapitulare inițială

1. Ordonează crescător seturile de numere:

a) 11 011, 11 100, 11 010, 11 101, 10 111;
b) 3^8, 27^3, $(3^2)^3$, 81, 2022^0;
c) 1,5; 1,35; 1,52; 2; 1,495;
d) $\frac{7}{12}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$;
e) $\frac{12}{5}, \frac{13}{5}, \frac{11}{5}, \frac{9}{5}, \frac{14}{5}$;
f) 1,4; $\frac{5}{4}$; $1\frac{3}{4}$; 1,33; $\frac{33}{25}$.

Exemplu: e) $\frac{9}{5}, \frac{11}{5}, \frac{12}{5}, \frac{13}{5}, \frac{14}{5}$

2. Rotunjește numărul:

a) 124 053 la sute; b) 64 231 la zeci de mii; c) 123,825 la zecimi; d) 0,52572 la sutimi.

Indicație: Se scriu aproximările prin lipsă și prin adaos.

3. Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect.

a) Produsul numerelor 1,23 și 100 este egal cu:

A. 12,3; B. 0,0123; C. 123; D. 1230.

b) Rezultatul calculului $2^3 - 2^2$ este egal cu:

A. 2; B. 4; C. 0; D. 12.

c) Suma numerelor $\frac{1}{4}$ și $\frac{5}{6}$ este egală cu:

A. $\frac{6}{10}$; B. $\frac{6}{4}$; C. 1; D. $\frac{13}{12}$.

d) Fracția ordinară ireductibilă echivalentă cu $\frac{2+8}{4}$ este:

A. $\frac{5}{2}$; B. $\frac{4}{1}$; C. $\frac{3}{2}$; D. $\frac{1}{4}$.

Exemplu: a) C.

4. Calculează:

a) $12 + 2020 : 20 - 19 \cdot 3$;
b) $1 + 2 + 3 + ... + 50 - 275$;
c) $[5 + 5 \cdot (5^2 + 5^{75} : 5^{73})] : 51$;
d) $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) : \frac{9}{8}$;
e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} + \frac{5}{3} : \frac{10}{9} - \frac{3^2}{2^3}$;
f) $\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + ... + \frac{100}{100}$;
g) $1,4 \cdot 2,5 + 1,5^2 - 3,6 : 0,9$;
h) $3,4 + 3,(4) - 3,04 - 3,0(4)$.

Indicație: Se ține cont de ordinea efectuării operațiilor.

5. Determină ultima cifră a numărului natural m:

a) $m = 55^{99} + 99^{55}$; b) $m = 2^{10} + 3^{10} + 7^{10}$.

6. a) Determină cel mai mare număr natural care dă câtul 20 prin împărțire la 17.
b) Determină cel mai mic număr natural care, prin împărțire la 23, dă câtul 10.

Indicație: deîmpărțit = împărțitor · cât + rest

7. Calculează media aritmetică a numerelor: a) 28 și 36; b) 225 și 475; c) 154, 24 și 17.

8. Scrie divizorii numărului: a) 36; b) 81; c) 144; d) 96.

9. Scrie câte trei multipli nenuli ai numărului: a) 24; b) 56; c) 18.

10. Scrie sub formă de fracție ordinară ireductibilă: a) $\frac{60}{54}$; b) $\frac{20\,202}{30\,303}$; c) 1,2(3); d) 0,(6); e) 1,25.

11. Demonstrează că numărul $m = \overline{ab} + \overline{ba} + 143$ este divizibil cu 11, oricare ar fi numărul natural de două cifre $\overline{ab}$.

12. Demonstrează că numărul $a = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3}$ este multiplu al numărului 15, pentru oricare număr natural n.

13. Diferența a două numere raționale pozitive este 3,2. Determină cele două numere, știind că unul dintre ele este de trei ori mai mare decât celălalt.

14. Pentru un pix și două caiete, Dan a plătit 11,1 lei. Determină prețul unui caiet, știind că acesta costă cu 1,8 lei mai mult decât două pixuri.

15. Pentru 8 caiete de același tip, Aura a plătit 24 de lei. Câți lei ar fi plătit dacă ar fi cumpărat numai 5 caiete?

16. Cinci robinete cu același debit umplu o piscină în 4 ore și 15 minute. În cât timp se va umple piscina dacă curg numai trei robinete?

17. Andrei a cumpărat 3 caiete și 2 pixuri pentru care a plătit 14,1 lei. Mara a plătit 19,4 lei pentru 4 caiete și 3 pixuri. Mircea cumpără 3 caiete și 5 pixuri. Ce rest primește Mircea de la o bancnotă de 200 de lei?

18. Într-un bloc sunt 40 de apartamente cu două și patru camere, în total fiind 100 de camere.

a) Verifică dacă numărul apartamentelor cu două camere poate fi egal cu numărul apartamentelor cu patru camere.

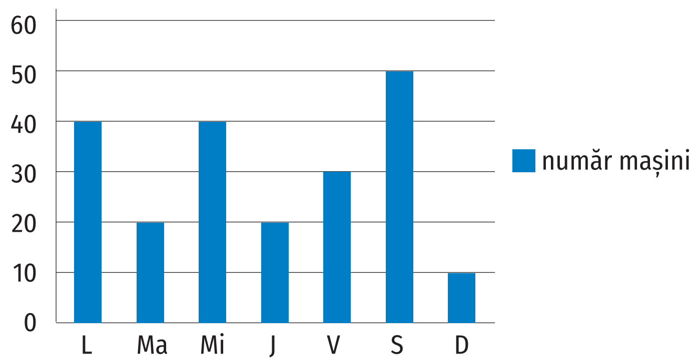
b) Determină numărul apartamentelor cu 2 camere.

19. Determină media aritmetică a numerelor a, b și 3, știind că media aritmetică a numerelor a și b este 1,5.

20. În graficul alăturat este reprezentat numărul autoturismelor care au intrat într-o parcare pe parcursul unei săptămâni.

a) Câte mașini au intrat în parcare în acea săptămână?

b) Calculează câte mașini au intrat în parcare, în medie, pe zi.



21. Calculează:

a) $102°46' + 10°52'$;

c) $26°24' \cdot 3$;

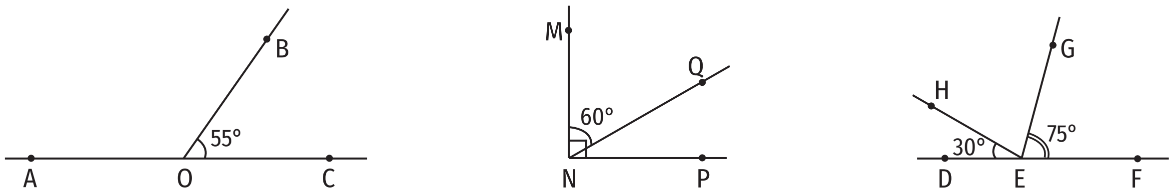
b) $150° - 123°25'$;

d) $127° : 4$.

22. În figura 1, punctul E este mijlocul segmentului AD, punctul C este simetricul punctului A față de punctul D, iar punctul B este simetricul punctului A față de punctul C. Determină lungimea segmentului BD, știind că ED = 1,5 cm.

Figura 1

23. Determină măsurile unghiurilor AOB, PNQ și HEG din figurile geometrice de mai jos, știind că punctele A, O, C și, respectiv, F, E, D sunt coliniare.



24. Un dreptunghi cu lungimea egală cu 22 cm și lățimea egală cu 18 cm are același perimetru cu un pătrat. Care dintre ele are aria mai mare?

25. Un tractor ară într-o zi 9 hectare. În câte zile vor ara 12 tractoare un teren în formă de dreptunghi cu lungimea de 4,8 km și lățimea de 360 dam?

26. Un robinet are debitul 2400 l pe oră. În câte ore poate umple o piscină în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 9 m, lățimea de 8 m și adâncimea de 2 m?

27. Câți litri de apă încap într-un acvariu în formă de cub cu lungimea muchiei egală cu 40 cm?

28. Pentru a vopsi un cub din lemn cu latura de 3 dm sunt necesare 720 g de vopsea. Ce cantitate de vopsea este necesară pentru a vopsi un cub (din același material) cu latura de 6 dm?

Unitatea 1

Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

1. Mulțimi: descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime

Grupul literelor din alfabetul limbii române cu ajutorul cărora se scriu semivocalele și vocalele

Descopăr

Colonie de pinguini

Buchet de lalele

Turmă de oi

Folosind imaginile de mai sus, răspunde la următoarele întrebări:

1. Litera „u" face parte din grupul literelor din alfabetul limbii române cu ajutorul cărora se scriu semivocalele și vocalele? De câte ori apare în acest grup? Există litere care nu fac parte din acest grup? Dă câteva exemple.

2. Cuvintele „turmă", „colonie", „buchet", „grup" implică existența unui anumit număr de obiecte distincte și bine determinate, din care sunt compuse. Dă exemple de alte cuvinte de același tip. Care este termenul care poate înlocui aceste cuvinte?

Învăț

Mulțimea este o colecție de obiecte (numite elementele mulțimii) de natură oarecare, bine determinate și distincte.

În general, mulțimile se notează cu majuscule din alfabetul latin (A, B, C, ...), dar se pot folosi și notații de tipul: A_1, A_2, D_8 etc.

Pentru a pune în evidență faptul că este vorba despre o mulțime, nu despre o simplă enumerare, vom scrie elementele acesteia între acolade. De exemplu, mulțimea numerelor naturale de o cifră poate fi scrisă {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

OBSERVAȚII

1. **Într-o mulțime, orice element apare o singură dată.**

   De exemplu, mulțimea literelor din alfabetul limbii române cu ajutorul cărora scriem cuvântul „bibliotecă" este {b, i, l, o, t, e, c, ă}. Deși litera „b" apare de două ori în scrierea cuvântului „bibliotecă", în mulțime este scrisă o singură dată.

2. **Într-o mulțime nu contează ordinea scrierii elementelor.**

   De exemplu, mulțimea {a, b, c} mai poate fi scrisă {a, c, b}, {b, a, c}, {b, c, a}, {c, a, b} sau {c, b, a}.

Există două **moduri de definire a unei mulțimi**:

- **Explicit (sintetic)**, numind individual elementele sale:
  - Mulțimea se scrie punând între acolade elementele sale.

    Exemplu: Mulțimea numerelor naturale impare de o cifră se poate scrie {1, 3, 5, 7, 9}.
  - Mulțimea poate fi ilustrată desenând o curbă închisă și scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare (**diagrama Venn-Euler** a mulțimii considerate).

    Exemplu: Mulțimea numerelor naturale impare de o cifră se poate reprezenta ca în figura 1.

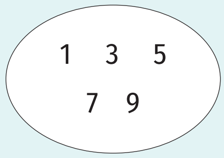


Figura 1

- **Implicit (analitic)**, specificând o proprietate pe care o au toate elementele sale și nu o au alte elemente care nu aparțin mulțimii.

  Exemplu: Mulțimea numerelor naturale impare de o cifră se poate scrie {x | x este număr natural impar de o cifră} (citim „mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este număr natural impar de o cifră”).

Mulțimea care nu are niciun element se numește mulțimea vidă și se notează cu ∅.

O mulțime ale cărei elemente sunt numere se numește mulțime numerică.

Exemplu: Mulțimea numerelor naturale impare de o cifră este o mulțime numerică.

Mulțimile care nu sunt numerice se numesc mulțimi nenumerice.

Exemplu: Mulțimea orașelor din țara noastră este o mulțime nenumerică.

Dacă A este o mulțime și x este un element al său, spunem că x aparține mulțimii A și notăm $x \in A$.

Dacă A este o mulțime și x nu este un element al său, spunem că x nu aparține mulțimii A și notăm $x \notin A$.

Exemple:

1. Dacă A este mulțimea numerelor prime, atunci $3 \in A$ și $4 \notin A$.
2. Dacă B = {a, b, c, d}, atunci $c \in A$ și $e \notin A$.
3. Dacă C = {n | n este număr natural mai mic decât 4}, atunci $0 \in A$ și $7 \notin A$.

Exercițiu rezolvat

Se consideră mulțimile A = {x | x este număr natural, $1 < x \leq 5$}, B = {x este număr natural, $18 \vdots x$} și C = {0, 1, 4, 9, 16, 25, ...}.

i) Scrie mulțimile A și B prin enumerarea elementelor.

ii) Scrie mulțimea C folosind o proprietate caracteristică a elementelor sale.

iii) Completează casetele cu unul dintre simbolurile ∈ sau ∉ pentru a obține propoziții matematice adevărate.

a) 2 □ A; b) 1 □ A; c) 36 □ B; d) 0 □ B; e) 100 □ C; f) 453 □ C.

Rezolvare:

i) Numerele naturale x care verifică inegalitatea $1 < x \leq 5$ sunt 2, 3, 4 și 5, deci A = {2, 3, 4, 5}.

Dacă $18 \vdots x$, atunci x poate fi 1, 2, 3, 6, 9 sau 18. Așadar, B = {1, 2, 3, 6, 9, 18}.

ii) C = {x | $x = k^2$, k este număr natural}

iii) a) $2 \in A$; b) $1 \notin A$; c) $36 \notin B$; d) $0 \notin B$; e) $100 \in C$; f) $453 \notin C$.

Aplic

1. Dă exemple de mulțimi ale căror elemente sunt obiecte:

a) din penarul tău; b) din camera ta; c) din sala de sport.

2. i) Scrie, prin enumerarea elementelor, mulțimea literelor din cuvântul:

a) matematică; b) tehnologie; c) cancelarie; d) geografie; e) mulțime.

ii) Compară, în fiecare caz, numărul elementelor mulțimii cu numărul literelor cuvântului.

Exemplu: i) a) {m, a, t, e, i, c, ă}; ii) Cuvântul „matematică" are 10 litere, iar mulțimea literelor cuvântului are 8 elemente și 8 < 10.

3. i) Scrie, prin enumerarea elementelor, mulțimea cifrelor numărului:

a) 1 201 120; b) 2 023; c) 77 777; d) 302 203 032; e) 9 182 736 450.

ii) Compară în fiecare caz numărul elementelor mulțimii cu numărul cifrelor numărului.

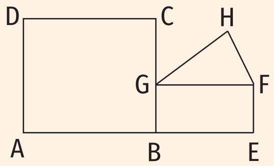


Figura 2

4. Fie M mulțimea literelor cu ajutorul cărora este notat dreptunghiul din figura 2, P mulțimea literelor cu ajutorul cărora este notat pătratul din figura 2 și T mulțimea literelor cu ajutorul cărora este notat triunghiul din figura 2. Scrie mulțimile M, P și T prin enumerarea elementelor. *Exemplu: M = {B, E, F, G}*

5. În figura 3 sunt reprezentate mulțimile A, B, C, D și E cu ajutorul diagramelor Venn-Euler. Scrie aceste mulțimi prin enumerarea elementelor.

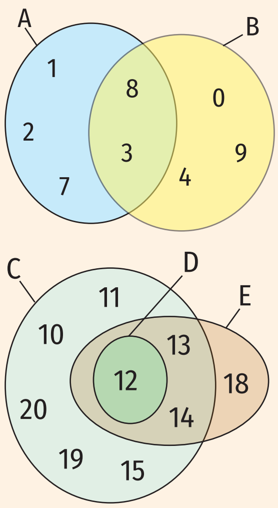


Figura 3

6. Realizează diagrama Venn-Euler pentru fiecare dintre mulțimile:

a) mulțimea numerelor naturale prime mai mici decât 20;

b) mulțimea numerelor naturale pare de o cifră;

c) mulțimea divizorilor numărului 12;

d) mulțimea formelor de relief din țara noastră.

7. Găsește greșeala și scrie corect mulțimile A = {5, 7, 9, 7}, B = {a, 5, 6, 3, a}, C = {7, 5, 7, 5, 7, 5}.

8. Completează spațiile libere cu unul dintre simbolurile $\in$ sau $\notin$ pentru a obține propoziții matematice adevărate.

Exemplu: a) $\in$

a) 8 ___ {2, 4, 6, 8};	e) 8 910 ___ {8, 9, 10};
b) p ___ {$a, ă, â, e, i, o, u$};	f) 0 ___ $\varnothing$;
c) 12 ___ {1, 2, 4, 6, 8};	g) 5 ___ {n | n e număr natural impar};
d) 9 ___ {8, 9, 10};	h) 0 ___ {x | x e pătratul unui număr natural}.

9. Se consideră mulțimea M = {x | x e număr natural par, $8 < x \leq 71$}. Precizează valoarea de adevăr a afirmațiilor:

Exemplu: a) F

a) $8 \in M$;	c) $8^2 + 1 \in M$;	e) $3^0 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \in M$;
b) $2^4 \in M$;	d) $20^0 \in M$;	f) $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \in M$.

10. Determină mulțimea A, știind că are 3 elemente, $0 \notin A$, $2 \in A$, $4 \in A$, $7 \notin A$, $10 \notin A$ și $6 \in A$.

11. Se consideră mulțimile: A = $\{x \mid x$ este număr prim de o cifră$\}$, B = $\{x \mid x$ este țară vecină cu România$\}$, C = $\{x \mid x$ este zi a săptămânii$\}$, D = $\{x \mid x$ este număr impar de o cifră, $x \mid 30\}$, E = $\{x \mid x$ este lună a anului care are 31 de zile$\}$, F = $\{n \mid n$ este număr natural impar, $3 < n < 9\}$. Scrie mulțimile A, B, C, D, E și F prin enumerarea elementelor.

12. În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile medii înregistrate timp de o săptămână la o stație meteorologică.

Ziua	luni	marți	miercuri	joi	vineri	sâmbătă	duminică
Temperatura (°C)	21	20	22	20	19	18	21

Fie T mulțimea temperaturilor medii înregistrate, M mulțimea zilelor în care temperatura medie a fost mai mare decât 20°C și P mulțimea zilelor în care temperatura medie a fost mai mică decât 20°C. Scrie mulțimile T, M și P prin enumerarea elementelor.

13. Reprezintă în trei moduri (prin enumerarea elementelor, scriind o proprietate comună a elementelor, folosind diagrama Venn-Euler):

a) mulțimea divizorilor numărului 32;

b) mulțimea numerelor naturale care împărțite la 5 dau câtul 3;

c) mulțimea numerelor naturale prime de o cifră;

d) mulțimea numerelor de o cifră care sunt pătratele unor numere naturale.

14. Stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $10 \in \{x \mid x = 5^n$, n este număr natural$\}$;

b) $8 \notin \{x \mid x = 2n$, n este număr natural prim$\}$;

c) $7 \in \{x \mid x = 2n + 1$, n este număr natural$\}$;

d) $50 \in \{x \mid x = n^2$, n este număr natural$\}$;

e) $17 \notin \{x \mid x = 5n + 2$, n este număr natural$\}$;

f) $0 \in \{x \mid x = 2n$, n este număr natural$\}$.

15. Scrie mulțimea A, folosind o proprietate caracteristică a elementelor sale:

a) A = {1, 3, 9, 27, 81};

b) A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19};

c) A = {0, 2, 4, 6, 8};

d) A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19};

e) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\right\}$.

16. Fie A mulțimea literelor cuvântului „bacalaureat” și B mulțimea silabelor cuvântului „bacalaureat”. Precizează valoarea de adevăr a afirmațiilor:

a) *bac* ∈ B;

b) *ba* ∈ B;

c) *u* ∈ A;

d) *a* ∈ A și *a* ∈ B;

e) *c* ∈ A și *ca* ∈ B;

f) *at* ∈ B;

g) *f* ∈ A.

17. Se consideră mulțimile:

$A = \left\{x \mid x \text{ e număr natural nenul, } \frac{6}{x} \text{ e număr natural}\right\}$,

$B = \{x \mid x = \overline{ab},\ \overline{ab} + \overline{ba} = 66\}$,

$C = \{x \mid x = \overline{abc},\ a, b, c \text{ sunt numere naturale, } a \cdot b \cdot c = 8\}$,

D = $\{x \mid x$ este divizor par al numărului 24$\}$,

E = $\{x \mid x$ e multiplu de două cifre al numărului 15$\}$.

Scrie mulțimile A, B, C, D și E prin enumerarea elementelor.

JOC:
ELIMINĂ INTRUSUL

Elementele fiecăreia dintre mulțimile de mai jos, cu excepția unuia dintre ele, au o proprietate caracteristică. Precizează care este această proprietate și elimină „intrusul”.

I.

oaia, vaca, câinele, lupul, pisica, capra, porcul

Paris, București, Viena, România, Budapesta, Berlin

pătrat, dreptunghi, romb, cub, paralelogram, triunghi

II.

a) {0, 2, 4, 5, 6, 8};

b) {0, 1, 4, 9, 12, 25, 49};

c) {3, 6, 9, 11, 12, 15};

d) {1, 2, 4, 6, 8, 16, 32}.

2. Relații între mulțimi

Descopăr

1. Se consideră mulțimile A = {*x* | *x* e număr natural nenul de o cifră} și B = {*y* | *y* = 2*x*, *x* e număr natural nenul, *x* ≤ 4}. Scrie mulțimile A și B prin enumerarea elementelor. Ce relație este între elementele mulțimii B și mulțimea A?

2. Se consideră mulțimile C = {*x* | *x* e cifră a numărului 112 102} și D = {*x* | *x* e cifră a numărului 2 012}.

a) Reprezintă mulțimile C și D cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

b) Scrie elementele care aparțin atât mulțimii C, cât și mulțimii D. Ce poți spune despre mulțimile C și D?

Învăț

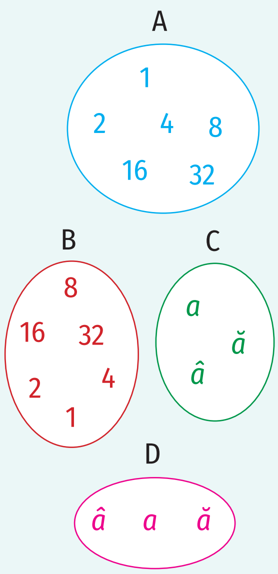


Figura 1

Două mulțimi A și B sunt egale dacă au aceleași elemente. Se notează A = B.

Dacă două mulțimi A și B nu au aceleași elemente, atunci mulțimile nu sunt egale. Se notează A ≠ B.

EXEMPLE:

1. Mulțimile A și B, respectiv C și D din figura 1 sunt egale. Scriem A = B și C = D.
2. Mulțimile A = {2, 4, 6, 8} și B = {*m* | *m* e număr natural par nenul de o cifră} sunt egale. Într-adevăr, reprezentând mulțimea B prin enumerarea elementelor sale, obținem B = {2, 4, 6, 8}, deci cele două mulțimi au aceleași elemente. Scriem A = B.
3. Mulțimile M = {*x* | *x* e număr natural, *x* < 4} și P = {1, 2, 3} nu sunt egale. Reprezentând mulțimea M prin enumerarea elementelor sale obținem M = {0, 1, 2, 3}. Cum 0 ∈ M și 0 ∉ P, mulțimile M și P nu sunt egale. Scriem M ≠ P.

OBSERVAȚII

1. A = A pentru orice mulțime A.
2. Dacă A = B, atunci B = A.
3. Dacă A = B și B = C, atunci A = C.

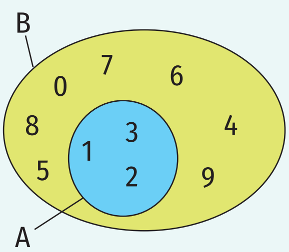


Figura 2
(A ⊂ B, B ⊃ A)

Mulțimea A este inclusă în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B. Se notează A ⊂ B și se citește: „mulțimea A este inclusă în mulțimea B”. În acest caz, putem spune că **mulțimea B include mulțimea A** (se notează B ⊃ A și se citește „mulțimea B include mulțimea A”) și **mulțimea A este o submulțime a mulțimii B** (figura 2).

OBSERVAȚII

1. **Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi (∅ ⊂ A, pentru oricare mulțime A).**
2. **Orice mulțime este inclusă în ea însăși (A ⊂ A, pentru oricare mulțime A).**

EXEMPLU:

Submulțimile mulțimii A = {1, 2, 3} sunt: ∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}.

Mulțimea tuturor submulțimilor unei mulțimi X formează mulțimea părților mulțimii X și se notează $\mathscr{P}$(X).

EXEMPLU:

Dacă A = {1, 2, 3}, atunci $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

OBSERVAȚII

1. Dacă $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci A = B.

2. Dacă $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$.

Mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B (sau mulțimea A nu este o submulțime a mulțimii B) dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B. Se notează $A \not\subset B$ (se citește „mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B") sau $B \not\supset A$ (se citește „mulțimea B nu include mulțimea A") (figura 3).

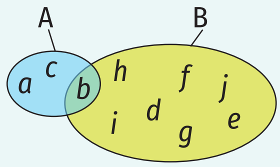


Figura 3
($A \not\subset B$, $B \not\supset A$)

Mulțimea A din figura 3 nu este o submulțime a mulțimii B (mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B/mulțimea B nu include mulțimea A) deoarece $a \in A$, $c \in A$, dar $a \notin B$, $c \notin B$.

Exerciții rezolvate

1. Fie C mulțimea numerelor naturale de o cifră și D = {n | n e număr natural, $n \leq 10$}. Demonstrează că $C \subset D$.

Rezolvare:

Scriind elementele celor două mulțimi, obținem C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} și D = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, deci $C \subset D$.

2. Fie mulțimile A = {1, 3, 5, 7} și B = {1, 5, x, $2x + 1$}, unde x este număr natural. Determină valorile lui x pentru care A = B.

Rezolvare:

Observăm că 1 și 5 aparțin atât mulțimii A, cât și mulțimii B. Cum A = B, $3 \in A$ și $7 \in A$ rezultă că $3 \in B$ și $7 \in B$, deci $x = 3$ sau $x = 7$.

Pentru $x = 3$ obținem B = {1, 3, 5, 7}, ceea ce implică A = B.

Pentru $x = 7$ obținem B = {1, 5, 7, 15}, ceea ce implică $A \neq B$.

Deci $x = 3$ este singura soluție.

3. Fie A = {n | n e număr natural, $n < 11$}. Scrie o submulțime a mulțimii A formată din:

a) numere prime;
b) numere impare;
c) puteri ale lui 2;
d) multipli ai lui 3;
e) divizori ai lui 12.

Rezolvare:

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

a) {2, 3, 5, 7} sau orice submulțime nevidă a acesteia.

b) {1, 3, 5, 7, 9} sau orice submulțime nevidă a acesteia.

c) {1, 2, 4, 8} sau orice submulțime nevidă a acesteia.

d) {0, 3, 6, 9} sau orice submulțime nevidă a acesteia.

e) {1, 2, 3, 4, 6} sau orice submulțime nevidă a acesteia.

Aplic

OBSERVAȚIE

Pentru unele casete există două sau trei variante de completare.

1. Completează casetele cu unul dintre simbolurile $\in$, $\notin$, $\subset$, $\supset$, $=$, $\neq$, pentru a obține propoziții adevărate:

a) $\{1, 2\} \square \{0, 1, 2, 3\}$;
b) $2 \square \{0, 1, 2, 3\}$;
c) $\{1, 2, 4\} \square \{1, 2, 3\}$;
d) $\{0, 1, 2\} \square \{1, 2\}$;
e) $\{1, 2\} \square \{1\}$;
f) $\{0\} \square \varnothing$;
g) $\{x, y, z, t\} \square \{t, x, y, z\}$;
h) $\{1, 2\} \square \{n \mid n$ e număr natural prim$\}$;
i) $\{2, 3\} \square \{n \mid n$ e număr natural prim$\}$;
j) $8 \square \{n \mid n$ e o putere a lui 2$\}$;
k) $\varnothing \square \{1\}$;
l) $\{1\} \square \{0, 1, 2, 3\}$.

2. Se consideră diagramele Venn-Euler din figura 4.

i) Scrie mulțimile A, B, C, D, E, F, G și H prin enumerarea elementelor acestora.

ii) Scrie relațiile de incluziune existente între mulțimile A, B, C, D, E, F, G, H.

iii) Precizează valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $4 \in A$;
b) $\{3, 4\} \subset B$;
c) $13 \in H$;
d) $\{10, 13, 16\} \supset F$;
e) $\{2, 3, 6\} \subset A$;
f) $\{16\} \subset E$;
g) $\{10, 13, 15, 16, 18\} = H$;
h) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \supset A$;
i) $G \supset \{13, 14, 17, 19\}$;
j) $\{0\} \subset D$;
k) $D \subset \{0, 3, 7, 8\}$;
l) $\varnothing \subset G$.

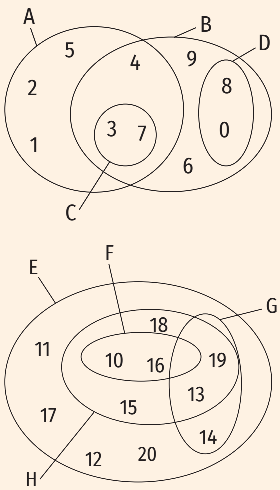


Figura 4

3. Stabilește dacă mulțimile A și B sunt egale.

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2^2, 2^0 + 2^1, 4^0, 2^1\}$;

b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x$ e număr natural, $x \leq 3\}$;

c) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \mid x$ e număr natural, x e multiplu al lui 2$\}$;

d) A este mulțimea literelor cuvântului „maro”, B e mulțimea literelor cuvântului „aroma”.

4. Scrie mulțimea divizorilor, mulțimea divizorilor proprii și mulțimea multiplilor de două cifre ai numărului 18.

5. Determină mulțimea A cu proprietățile $\{2, 3\} \subset A$ și $A \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Analizează toate cazurile posibile.

6. Determină toate mulțimile X care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $\{2, 3, 5\} \subset X$;
ii) $X \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

7. Fie M mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul „lalea”. Scrie submulțimile mulțimii M.

8. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

a) Scrie toate submulțimile mulțimii A care au suma elementelor egală cu 9.

b) Scrie două submulțimi ale mulțimii A, X și Y, astfel încât $X \subset Y$.

9. Scrie elementele mulțimii A, știind că $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

10. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x$ este măsura unui unghi ascuțit$\}$, $O = \{x \mid x$ este măsura unui unghi obtuz$\}$, $B = \{30°, 10°, 89°, 72°\}$, $C = \{120°, 150°, 92°, 105°\}$, $D = \{20°, 90°, 80°, 45°\}$, $E = \{170°, 121°, 99°, 90°\}$, $F = \{1°, 2°, 3°, 4°, 5°\}$, $G = \{120°, 150°, 135°\}$ și $H = \{91°, 92°, 93°, 94°\}$.

a) Precizează care dintre mulțimile B, C, D, E, F, G, H sunt submulțimi ale mulțimii A.

b) Precizează care dintre mulțimile B, C, D, E, F, G, H sunt submulțimi ale mulțimii O.

11. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Scrie o mulțime B astfel încât:

a) $B \supset A$; b) $A \subset B$; c) $B \not\subset A$; d) $A \supset B$; e) $A \neq B$; f) $A = B$.

12. Se consideră mulțimile $A = \{x, y, z, t\}$, $B = \{x, y, 5\}$, $C = \{z, 5, 2\}$, $D = \{x, y, 3\}$ și $E = \{8, y\}$. Determină numerele naturale x, y, z și t, știind că mulțimile B, C, D și E sunt submulțimi ale mulțimii A.

13. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Scrie submulțimile mulțimii A:

a) care au un număr prim de elemente;

b) ale căror elemente sunt numere prime;

c) care nu conțin numerele 1 și 5;

d) care au 4 elemente;

e) ale căror elemente sunt numere compuse;

f) ale căror elemente sunt numere pare;

g) ale căror elemente sunt pătratele unor numere naturale.

14. Fie mulțimea $A = \{0, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 14\}$.

Scrie o submulțime a mulțimii A formată din:

a) multipli ai lui 3;

b) divizori ai lui 12;

c) pătrate ale unor numere naturale;

d) multipli ai lui 6;

e) multipli ai lui 2;

f) numere impare;

g) numere compuse.

15. Se consideră mulțimea $A = \{x \mid x = \overline{ab}$ și $\overline{1ab} + \overline{b1a} + \overline{ab1} = 888\}$.

a) Scrie elementele mulțimii A.

b) Scrie submulțimile mulțimii A ale căror elemente sunt numere impare.

16. Folosind toate elementele mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 10\}$, scrie două submulțimi ale acesteia care îndeplinesc simultan condițiile:

a) nu au elemente comune;

b) suma elementelor acestora este aceeași.

17. Se consideră mulțimea $A = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \text{ sunt numere naturale nenule și } \frac{a}{b} \text{ e fracție subunitară}\right\}$.

a) Scrie trei elemente ale mulțimii A care au numitorul egal cu 5.

b) Scrie o submulțime a mulțimii A formată din 5 elemente.

c) Se dau mulțimile $B = \left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$, $C = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}\right\}$, $D = \left\{\frac{1}{9}, \frac{2}{7}, \frac{7}{8}, \frac{6}{7}\right\}$, $E = \left\{\frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$. Care dintre acestea e submulțime a mulțimii A?

18. Fie $A = \{x \mid x$ e număr natural, restul împărțirii lui x la 5 este $3\}$.

a) Arată că $38 \in A$ și $17 \notin A$.

b) Determină cel mai mic număr de două cifre care este element al mulțimii A.

c) Determină cel mai mare număr de două cifre care este element al mulțimii A.

d) Scrie o submulțime a mulțimii A formată din trei numere prime.

e) Scrie o submulțime a mulțimii A formată din patru numere pare.

f) Demonstrează că niciun element al mulțimii A nu este pătratul unui număr natural.

LUCRAȚI ÎN PERECHI

Știți din clasa a V-a că dreptele, semidreptele și segmentele sunt mulțimi de puncte.

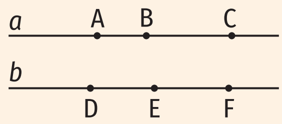


Figura 5

Folosind figura 5, precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții (în acest exercițiu, prin scrierea de forma AB am notat dreapta AB).

a) $\{B, D\} \subset b$;

b) $\{A, B, C\} \subset a$;

c) $\{D, E, C\} \subset b$;

d) $A \in a$;

e) $D \notin b$;

f) $\{D, A, B, C\} \subset a$;

g) $\{A, D, E, F\} \supset a$;

h) $\{A, B, C\} = a$;

i) $\{D, E, F\} \neq b$;

j) $AB = a$;

k) $b \supset DF$;

l) $b \subset a$;

m) $\{A, C\} \subset a$;

n) $B \in AC$;

o) $D \notin EF$;

p) $F \in ED$;

q) $A \in BC$;

r) $C \notin BA$;

s) $B \notin EF$.

3. Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale

Descopăr

Fie D_{12} mulțimea divizorilor naturali ai numărului 12 și M_{12} mulțimea multiplilor naturali ai numărului 12.

a) Reprezintă mulțimile D_{12} și M_{12} prin enumerarea elementelor.

b) Câte elemente are mulțimea D_{12}?

c) Ce poți spune despre mulțimea M_{12}?

Învăț

ȘTIAȚI CĂ...?

- Notația $\mathbb{N}$ pentru mulțimea numerelor naturale provine din limba franceză, de la cuvântul *naturel = natural*.
- Noțiunea de cardinal al unei mulțimi a fost introdusă în 1879 de matematicianul Georg Cantor.
- Cardinalul unei mulțimi se mai numește și puterea acelei mulțimi.

Dacă totalul elementelor unei mulțimi se poate exprima printr-un număr natural, spunem că mulțimea este finită. Dacă o mulțime nu este finită, spunem că este infinită.

EXEMPLE:

1. Mulțimea cifrelor din sistemul zecimal este o mulțime finită pentru că are **10** elemente.
2. Mulțimea numerelor naturale este infinită.

Mulțimea numerelor naturale se notează cu $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

Mulțimea numerelor naturale nenule se notează cu $\mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

Cardinalul unei mulțimi finite reprezintă numărul de elemente ale acelei mulțimi.

Cardinalul unei mulțimi finite A se notează card A sau |A|.

EXEMPLU:

Mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$ are patru elemente. Scriem card $A = 4$ (sau $|A| = 4$).

OBSERVAȚII

1. De regulă, mulțimea divizorilor numărului natural nenul *p* se notează cu D_p, iar mulțimea multiplilor numărului natural nenul *p* se notează cu M_p.
   De exemplu, $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,
   $M_{18} = \{0, 1 \cdot 18, 2 \cdot 18, 3 \cdot 18, 4 \cdot 18, 5 \cdot 18, ...\} = \{0, 18, 36, 54, 72, 90, ...\}$.
2. Mulțimea divizorilor unui număr natural nenul este finită, iar mulțimea multiplilor unui număr natural nenul este infinită.

Exerciții rezolvate

1. Determină cardinalul mulțimii A.

a) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*, n < 17\}$; c) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*, n \in M_3, n < 22\}$;

b) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \mid 32\}$; d) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 10 < n < 40 \text{ și } n \vdots 7\}$.

Rezolvare:

a) $A = \{1, 2, 3, ..., 16\}$, deci card $A = 16$;

b) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, deci card $A = 6$;

c) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$, deci card $A = 7$;

d) $A = \{14, 21, 28, 35\}$, deci card $A = 4$.

2. Precizează care dintre mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = \overline{ab}, a \neq b\}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x$ e număr natural impar, $x \in M_6\}$, $D = \{x \mid x \in M_3, x \leq 100\}$, $E = \{x \mid x \in M_3, x > 100\}$ sunt finite și determină cardinalul acestora.

Rezolvare:

Cum mulțimea A este formată din numerele naturale de două cifre, care au cifrele diferite, $A = \{10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, ..., 98\}$. Dintre numerele naturale de două cifre, mulțimii A nu îi aparțin numerele naturale de două cifre care au cifrele egale (adică 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99). Așadar, mulțimea A este finită și card $A = 90 - 9 = 81$.

$B = \{2 \cdot 0,\ 2 \cdot 1,\ 2 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 4,\ 2 \cdot 5, ...\} \Rightarrow B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

Mulțimea B nu este finită.

$C = \varnothing$, deoarece mulțimea M_6 este formată numai din numere pare. Deci card $C = 0$.

$D = \{\underbrace{0}_{3 \cdot 0}, \underbrace{3}_{3 \cdot 1}, \underbrace{6}_{3 \cdot 2}, \underbrace{9}_{3 \cdot 3}, ..., \underbrace{99}_{3 \cdot 33}\}$. Așadar, mulțimea D este finită și card $D = 34$.

$E = \{\underbrace{102}_{3 \cdot 34}, \underbrace{105}_{3 \cdot 35}, \underbrace{108}_{3 \cdot 36}, \underbrace{111}_{3 \cdot 37}, ...\} \Rightarrow$ Mulțimea E nu este finită.

Aplic

1. Scrie o mulțime care să aibă cardinalul egal cu:

a) 0; b) 1; c) 4; d) 10; e) 90; f) 100; g) 900; h) 1 000.

2. a) Precizează care dintre mulțimile $D_6, M_5, M_{25}, D_{36}, M_{10}, D_{49}, D_{50}, D_{111}$ sunt finite.

b) Determină cardinalul mulțimilor finite identificate la punctul a).

3. Determină cardinalul mulțimii X.

a) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n < 50\}$;

b) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*, n < 50\}$;

c) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N},\ 23 < n \leq 50\}$;

d) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 \leq 50\}$;

e) $X = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^{2023}\}$;

f) $X = \{1, 5, 9, 13, 17, ..., 101\}$;

g) $X = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, ..., \frac{1}{99}\right\}$;

h) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N},\ 3 \leq n < 23, n \vdots 3\}$;

i) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 4 \leq n < 35, 5 \mid n\}$;

j) $X = \{n \mid n \in \mathbb{N},\ 2^{10} < n \leq 2^{11}\}$.

4. Scrie două mulțimi A și B astfel încât card $A = 3$, card $B = 5$ și $A \subset B$.

LUCRAȚI ÎN PERECHI

A. Estimați cardinalul următoarelor mulțimi:

a) mulțimea elevilor din școala voastră;

b) mulțimea elevilor din clasa a VI-a din școala voastră;

c) mulțimea notelor pe care le veți obține în acest an școlar;

d) mulțimea locuitorilor din comuna/orașul vostru;

e) mulțimea orașelor din România;

f) mulțimea comunelor din România.

B. Ce puteți spune despre cardinalele mulțimilor A și B? Răspundeți la întrebare asociind „unu la unu” elementele celor două mulțimi.

a) A este mulțimea cărților din biblioteca unei școli, iar B este mulțimea codurilor de înregistrare ale acestora.

b) A este mulțimea elevilor din clasa voastră, iar B este mulțimea codurilor numerice personale ale acestora.

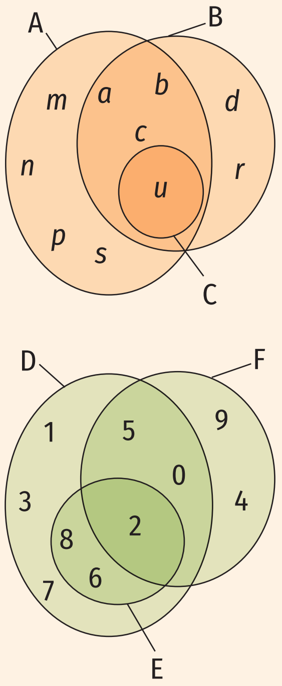


Figura 1

5. Determină cardinalul fiecăreia dintre mulțimile A, B, C, D, E și F, reprezentate cu ajutorul diagramelor din figura 1.

6. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \mid x\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 24\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 9\}$ și $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 11 \leq x\}$.

a) Precizează care dintre mulțimile A, B, C, D sunt finite. Calculează cardinalul fiecăreia dintre mulțimile finite identificate.

b) Scrie câte două exemple de submulțimi finite ale mulțimilor infinite de mai sus.

c) Adaugă o condiție suplimentară astfel încât mulțimea A să devină finită.

7. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2p - 1, p \in \mathbb{N}^*\}$.

a) Scrie câte patru elemente din fiecare mulțime.

b) Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect:

A. Mulțimile A și B sunt finite.

B. Mulțimea A e finită și mulțimea B e infinită.

C. Mulțimea A e infinită și mulțimea B e finită.

D. Mulțimile A și B sunt infinite.

c) Adaugă o condiție suplimentară astfel încât:

i) mulțimea A să fie finită și card A = 10.

ii) mulțimea B să fie finită și card B = 25.

Portofoliu

Fie J mulțimea județelor din România, O mulțimea orașelor din România, C mulțimea comunelor din România, M mulțimea municipiilor din România, R mulțimea orașelor cu peste 300 000 de locuitori din România, V mulțimea țărilor cu care se învecinează România.

a) Scrie submulțimea mulțimii J formată din județele din Moldova.

b) Scrie submulțimea mulțimii O formată din orașele din județul Tulcea.

c) Scrie submulțimea mulțimii O formată din orașele din județul în care locuiești sau dintr-un județ vecin.

d) Scrie submulțimea mulțimii O formată din orașe cu peste 200 000 locuitori.

e) Scrie relația dintre mulțimile M și O folosind simbolurile matematice.

f) Scrie elementele mulțimilor R și V.

g) Determină cardinalul fiecăreia dintre mulțimile J, C, O, M, R, V.

Documentează-te pe https://ue.mae.ro/romania/137 și din alte surse pentru a rezolva sarcinile de lucru.

Urmărește etapele realizării unui portofoliu așa cum apar în anexa de la pagina 224.

4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență

Descopăr

În figura 1 sunt reprezentate mulțimile A = {1, 2, 3, 6} și B = {1, 2, 4, 8, 9} cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

a) Determină elementele care aparțin fie mulțimii A, fie mulțimii B. Hașurează suprafața ce conține aceste elemente.

b) Determină elementele comune mulțimilor A și B. Colorează cu roșu suprafața ce conține aceste elemente.

c) Determină elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B. Colorează cu albastru suprafața ce conține aceste elemente.

d) Determină elementele care aparțin mulțimii B și nu aparțin mulțimii A. Colorează cu galben suprafața ce conține aceste elemente.

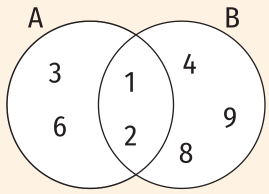


Figura 1

Învăț

Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B. Se notează A ∪ B (figura 2).

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

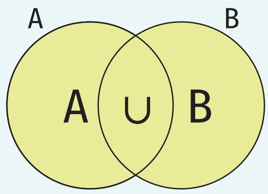


Figura 2

EXEMPLU:

Reuniunea mulțimilor A = {1, 2, 3, 6} și B = {1, 2, 4, 8, 9} este mulțimea A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9} (figura 3).

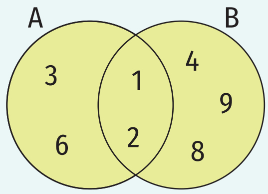


Figura 3

Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele comune mulțimilor A și B. Se notează A ∩ B (figura 4).

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

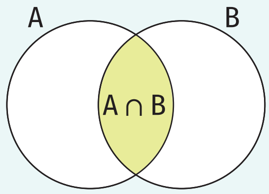


Figura 4

EXEMPLU:

Intersecția mulțimilor A = {1, 2, 3, 6} și B = {1, 2, 4, 8, 9} este mulțimea A ∩ B = {1, 2} (figura 5).

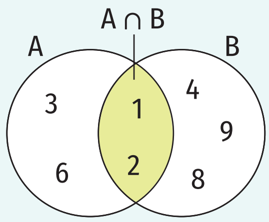


Figura 5

Două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă se numesc mulțimi disjuncte.

EXEMPLU:

Mulțimile A = {1, 3, 5, 7} și B = {2, 4, 8} sunt disjuncte (A ∩ B = ∅).

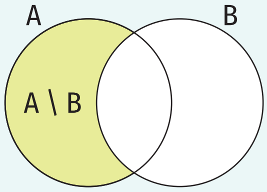


Figura 6

Diferența dintre mulțimea A și mulțimea B este mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B. Se notează A \ B (figura 6).

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

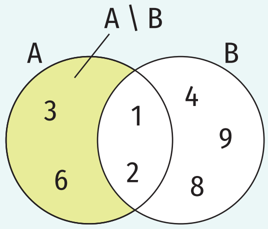


Figura 7

EXEMPLE:

1. Diferența dintre mulțimea A = {1, 2, 3, 6} și mulțimea B = {1, 2, 4, 8, 9} este mulțimea A \ B = {3, 6} (figura 7).
2. Diferența dintre mulțimea B = {1, 2, 4, 8, 9} și mulțimea A = {1, 2, 3, 6} este mulțimea B \ A = {4, 8, 9} (figura 8).

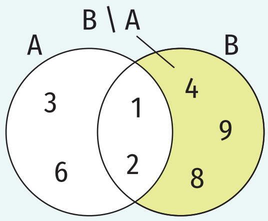


Figura 8

OBSERVAȚII

1. În general, A \ B ≠ B \ A.

2. Dacă A și B sunt mulțimi finite, atunci:
card (A ∪ B) = card A + card B − card (A ∩ B) (principiul includerii și al excluderii).

Exerciții rezolvate

1. Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
i) A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}; ii) A ∩ B = {2, 3}; iii) A \ B = {1, 5}.

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = \{2, 3\} \Rightarrow 2 \in A, 3 \in A, 2 \in B, 3 \in B \text{ (figura 9)} \\ A \setminus B = \{1, 5\} \Rightarrow 1 \in A, 5 \in A, 1 \notin B, 5 \notin B \text{ (figura 10)} \\ A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \notin A, 4 \notin A, 0 \in B, 4 \in B \text{ (figura 11)}$$

În concluzie, A = {1, 2, 3, 5} și B = {0, 2, 3, 4}.

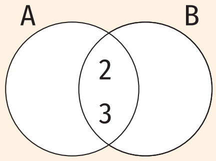


Figura 9

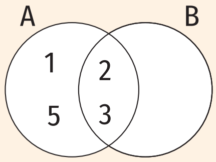


Figura 10

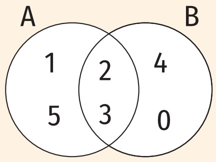


Figura 11

2. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x < 6\}$, $B = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbb{N}, x \le 4\}$ și $C = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{N}, k \le 4\}$. Determină A ∪ B, B ∩ C, A ∪ C, A ∪ (B ∩ C), A \ C.

Rezolvare:

Determinăm elementele mulțimilor A, B și C:

$x \in \mathbb{N}^*, x < 6 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Deci A = {1, 2, 3, 4, 5}.

$x \le 4, x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow x^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$. Deci B = {0, 1, 4, 9, 16}.

$k \in \mathbb{N},\ k \le 4 \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$k = 0 \Rightarrow 3k + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 1$ $\qquad k = 3 \Rightarrow 3k + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$

$k = 1 \Rightarrow 3k + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ $\qquad k = 4 \Rightarrow 3k + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$

$k = 2 \Rightarrow 3k + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

Așadar, C = {1, 4, 7, 10, 13}.

A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 16}; B ∩ C = {1, 4}; A ∪ C = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 13};
A ∪ (B ∩ C) = A ∪ {1, 4} = {1, 2, 3, 4, 5}; A \ C = {2, 3, 5}.

3. Arată că mulțimile A = {x | $x \in \mathbb{N}$, $x = 5n + 3$, $n \in \mathbb{N}$} și B = {x | $x \in \mathbb{N}$, x e pătratul unui număr natural} sunt disjuncte.

Rezolvare:

Dacă $x \in$ A, atunci ultima cifră a lui x este 3 sau 8, deci x nu poate fi pătratul unui număr natural și, prin urmare, $x \notin$ B (ultima cifră a pătratului unui număr natural poate fi 0, 1, 4, 5, 6 sau 9).

Așadar, A $\cap$ B = $\varnothing$.

4. Fiecare dintre cei 24 de elevi ai clasei a VI-a A vorbește fluent cel puțin una dintre limbile engleză și franceză. 18 elevi vorbesc fluent limba engleză și 12 elevi vorbesc fluent limba franceză.

a) Câți elevi vorbesc fluent ambele limbi?

b) Câți elevi vorbesc fluent numai limba franceză?

Rezolvare:

a) Fie A mulțimea elevilor clasei a VI-a A care vorbesc fluent limba engleză și B mulțimea elevilor clasei a VI-a A care vorbesc fluent limba franceză. Astfel, A $\cup$ B e mulțimea elevilor clasei a VI-a A și A $\cap$ B e mulțimea elevilor clasei a VI-a A care vorbesc fluent ambele limbi.

În acest caz, card A = 18, card B = 12, card (A $\cup$ B) = 24.

card (A $\cup$ B) = card A + card B − card (A $\cap$ B) $\Rightarrow$ 24 = 18 + 12 − card (A $\cap$ B) $\Rightarrow$ card (A $\cap$ B) = 6.

Numărul elevilor clasei a VI-a A care vorbesc fluent ambele limbi este 6.

b) Numărul elevilor care vorbesc fluent numai limba franceză este 12 – 6 = 6.

Aplic

1. Se consideră mulțimile A = {0, 2, 4, 6, 8}, B = {1, 3, 5, 7, 9} și C = {2, 3, 5, 7}. Determină elementele mulțimilor: A $\cup$ B, A $\cap$ B, (A $\cup$ B) $\cap$ C, C \ B, (A \ C) $\cup$ (B \ C), (A $\cap$ C) $\cup$ (C $\cap$ B).

INDICAȚIE: Pentru a determina elementele mulțimii (A $\cup$ B) $\cap$ C, determinăm întâi elementele mulțimii A $\cup$ B.

2. În figura 12 sunt reprezentate mulțimile A, B, C și D cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

a) Scrie mulțimile A, B, C, D prin enumerarea elementelor.

b) Determină card A, card B, card C și card D.

c) Determină mulțimile: A $\cup$ B, C $\cup$ D, (A $\cup$ B) $\cap$ (C $\cup$ D), (B \ C) $\cup$ (C \ B), (A $\cap$ B) $\cap$ (C $\cap$ D).

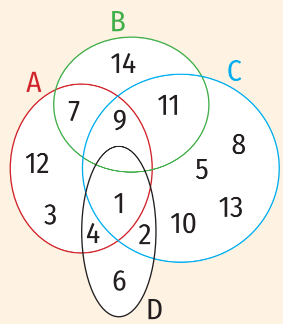


Figura 12

3. În figura 13 sunt reprezentate mulțimile A, B, C și D cu ajutorul diagramelor Venn-Euler.

a) Scrie mulțimile A, B, C, D prin enumerarea elementelor.

b) Scrie mulțimile F, G, H, I, M, P, S și T prin enumerarea elementelor.

F = {x | $x \in$ A sau $x \in$ B};

G = {x | $x \in$ A și $x \in$ D};

H = {x | $x \in$ A, $x \in$ B, $x \in$ C și $x \in$ D};

I = {x | $x \in$ C și $x \notin$ D};

M = {x | $x \in$ A sau $x \in$ B sau $x \in$ C};

P = {x | $x \in$ D și $x \notin$ C};

S = {x | $x \in$ A și $x \notin$ D};

T = {x | $x \in$ C și $x \notin$ B}.

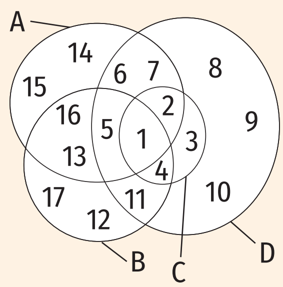


Figura 13

4. Fie A mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul „geografie”, B mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul „geometrie”, C mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul „istorie” și D mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul „biologie”. Determină mulțimile: $C \cup D$, $A \cup D$, $(A \cup C) \cap (B \cup D)$, $(D \setminus C) \cup (C \setminus D)$, $(A \cap B) \cap (C \cap D)$.

5. Se consideră mulțimea $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) Scrie două mulțimi disjuncte nevide, A și B, astfel încât $A \cup B = X$.

b) Scrie două mulțimi nevide, C și D, astfel încât $C \setminus D = X$.

c) Scrie două mulțimi, E și F, $E \neq F$, astfel încât $E \cap F = X$.

6. Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; c) $A \cap B = \{4, 6\}$;

b) $A \cap \{8, 10, 12\} = \varnothing$; d) $\{0, 2\} \cap B = \varnothing$.

7. Determină mulțimile *A* și *B*, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$; b) $b \in A$; c) $A \cap B = \{a, c\}$.

8. Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $A \cap B \supset \{3, 5, 7\}$; c) $B \setminus A = \{6, 8, 9\}$.

9. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = k(k + 1), k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \mid x = 2p + 1, p \in \mathbb{N}\}$. Calculează card $(A \cap B)$.

10. Fie L_x mulțimea literelor cu ajutorul cărora se scrie cuvântul x. Determină cardinalul următoarelor mulțimi: $L_{scund} \cap L_{înalt}$; $L_{prieten} \setminus L_{amic}$; $L_{morcov} \cap L_{leuștean}$; $L_{plin} \cup L_{gol}$; $L_{ilicit} \cap L_{legal}$; $L_{lumină} \setminus L_{întuneric}$; $L_{erou} \cap L_{laș}$; $L_{premiant} \cup L_{câștigător}$.

11. Fie A și B două mulțimi cu card A = 4 și card B = 8.

a) Determină card $(A \cup B)$, dacă card $(A \cap B) = 2$.

b) Determină card $(A \cap B)$, dacă card $(A \cup B) = 10$.

c) Determină card $(A \cup B)$, știind că $A \cap B = \varnothing$.

d) Determină card $(A \cap B)$, știind că $A \subset B$.

12. Într-o clasă sunt 24 de elevi. Dintre aceștia, 12 merg la cercul de matematică, 16 merg la cercul de lectură, iar 2 elevi nu merg la niciun cerc. Câți elevi din clasă merg numai la cercul de lectură?

13. Se consideră mulțimea $X = \{0, 1, 2, 3, ..., 51\}$.

a) Calculează suma elementelor mulțimii X.

b) Dă exemple de două submulțimi disjuncte ale mulțimii X, A și B, astfel încât suma elementelor mulțimii A să fie egală cu suma elementelor mulțimii B.

c) Dă exemple de două submulțimi disjuncte ale mulțimii X, C și D, care îndeplinesc simultan condițiile:

i) suma elementelor mulțimii C este egală cu suma elementelor mulțimii D;

ii) $C \cup D = X$.

14. Se consideră mulțimile $X = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 100, x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$ și $Y = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y \leq 100$, restul împărțirii lui y la 6 este $1\}$.

a) Determină: card X, card Y, card $(X \cap Y)$, card $(X \cup Y)$, card $(X \setminus Y)$.

b) Calculează suma elementelor mulțimii X.

c) Calculează suma elementelor mulțimii Y.

ȘTIAȚI CĂ...?

Folosirea figurilor pentru reprezentarea mulțimilor își are originea în vechime. Printre matematicienii care s-au preocupat de studierea mulțimilor și reprezentarea acestora cu ajutorul diagramelor, se află:

- Leonard Euler (matematician german, 1707-1783) a folosit figuri rotunde pentru a explica anumite reguli ale logicii;
- John Venn (matematician englez, 1834-1923) a adus îmbunătățiri diagramelor lui Euler. De aceea, diagramele reprezentând mulțimi sunt numite *diagrame Venn-Euler;*
- Georg Cantor (matematician german, 1845-1918) a creat *teoria mulțimilor*, care a devenit o teorie fundamentală a matematicii.

LUCRAȚI ÎN PERECHI

Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) $a \parallel b \Rightarrow a \cap b = ...$

b) Dreptele *a* și *b* sunt concurente în punctul A. $\Rightarrow a \cap b = ...$

c) Dreptele *a* și *b* sunt confundate $\Rightarrow a \cap b = ...$

d) $a \cap b = \varnothing \Rightarrow a ... b$

5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

Îmi amintesc

1. Se consideră mulțimile X = {x | $x \in \mathbb{N}$, $x \leq 20$}, P = {p | $p \in$ X, p e număr prim}, C = {c | $c \in$ X, c e număr compus} și A = {a | $a \in$ X, a nu este număr prim și a nu este număr compus}. Scrie mulțimile X, P, C și A prin enumerarea elementelor.
2. Scrie ca produs de numere prime următoarele numere compuse: 24, 30 și 32.

Învăț

Orice număr natural compus se poate scrie ca un produs de puteri de numere prime. Această scriere este unică, exceptând ordinea factorilor.

Pentru a scrie un număr natural ca produs de puteri de numere prime procedăm astfel: desenăm o linie verticală, în stânga acesteia scriem numărul pe care trebuie să-l descompunem și câturile obținute la împărțirile cu numerele prime, iar în dreapta liniei scriem numerele prime folosite.

EXEMPLE:

1.

168	2	Identificăm cel mai mic divizor prim al numărului 168. Acesta este 2. Efectuăm împărțirea 168 : 2 = 84.
84	2	Identificăm cel mai mic divizor prim al numărului 84. Acesta este 2. Efectuăm împărțirea 84 : 2 = 42.
42	2	Identificăm cel mai mic divizor prim al numărului 42. Acesta este 2. Efectuăm împărțirea 42 : 2 = 21.
21	3	Identificăm cel mai mic divizor prim al numărului 21. Acesta este 3. Efectuăm împărțirea 31 : 3 = 7.
7	7	7 este număr prim, deci singurul divizor prim al său este 7. Efectuăm împărțirea 7 : 7 = 1.
1		

Am obținut $168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$, deci scrierea numărului 168 ca produs de puteri de numere prime este $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

2.

360	$2 \cdot 5$	$360 \vdots 10$. Cum $10 = 2 \cdot 5$ putem scrie în dreapta liniei verticale $2 \cdot 5$. Calculăm 360 : 10 = 36.
36	2	$36 \vdots 2$. Efectuăm împărțirea 36 : 2 = 18.
18	2	$18 \vdots 2$. Efectuăm împărțirea 18 : 2 = 9.
9	3	$9 \vdots 3$. Efectuăm împărțirea 9 : 3 = 3.
3	3	3 e număr prim. Efectuăm împărțirea 3 : 3 = 1.
1		

Am obținut $360 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, deci scrierea numărului 360 ca produs de puteri de numere prime este $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

ȘTIAȚI CĂ...?

Putem afla numărul de divizori ai unui număr natural fără a scrie mulțimea divizorilor acestuia.

Dacă $n \in \mathbb{N}$ se scrie ca produs de puteri de numere prime $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot ...p_l^{k_l}$, unde $p_1, p_2, p_3, ..., p_l$ sunt numere prime, iar $k_1, k_2, k_3, ..., k_l \in \mathbb{N}^*$, atunci numărul de divizori ai numărului n este: $(k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot ... \cdot(k_l+1)$.

Aplic

1. Completează spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dintre numerele 13, 34, 1, 202, 101, 0, 690, 2 043, 149, 11 001, 233, 344, 433, numere prime sunt: ...

b) Dintre numerele 103, 74, 11, 221, 211, 0, 960, 2 403, 903, 11 601, 233, 544, 107, numere compuse sunt: ...

2. Se consideră mulțimile X = {222, 35, 81, 360, 125, 900, 7 000, 1 024, 324, 55, 1 000, 72 000, 666, 1 230, 405, 504, 2 700, 402, 255, 210}, $X_2 = \{x \mid x \in X, x \vdots 2\}$, $X_3 = \{x \mid x \in X, x \vdots 3\}$, $X_5 = \{x \mid x \in X, x \vdots 5\}$, $X_9 = \{x \mid x \in X, x \vdots 9\}$, $X_{10} = \{x \mid x \in X, x \vdots 10\}$, $X_{100} = \{x \mid x \in X, x \vdots 10^2\}$ și $X_{1000} = \{x \mid x \in X, x \vdots 10^3\}$.

a) Scrie mulțimile $X_2, X_3, X_5, X_9, X_{10}, X_{100}, X_{1000}$ prin enumerarea elementelor.

b) Determină mulțimile: $X_5 \cap X_3$; $X_2 \cap X_5$; $X_5 \setminus X_{10}$; $X_3 \setminus X_9$; $X_5 \cup X_3$; $X_3 \cup X_9$; $(X_5 \setminus X_{10}) \cup (X_2 \setminus X_{10})$.

3. a) Scrie numerele 15, 18, 25, 38, 56, 81, 125, 49, 111, 63, 96 ca produs de puteri de numere prime.

b) Scrie mulțimile $D_{15}, D_{18}, D_{25}, D_{38}, D_{56}, D_{81}, D_{125}, D_{49}, D_{111}, D_{63}, D_{96}$ prin enumerarea elementelor.

c) Determină cardinalul fiecăreia dintre mulțimile: $D_{15}, D_{18}, D_{25}, D_{38}, D_{81}, D_{125}, D_{49}, D_{111}, D_{63}, D_{96}$.

4. Scrie ca produs de puteri de numere prime următoarele numere naturale: 780, 140, 88, 128, 1 024, 729, 20 400, 50 000, 6 300, 2 310, 540, 1 210, 2 890, 3 430, 375.

5. Scrie numerele naturale x și y ca produse de puteri de numere prime și identifică divizorii comuni:

a) $x = 42$ și $y = 76$; b) $x = 132$ și $y = 330$; c) $x = 52$ și $y = 78$.

6. Completează spațiile libere cu numere naturale pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă $144 = 2^m \cdot 3^n$, atunci m = ... și n = ...

b) Dacă $2\,700 = 2^m \cdot 3^n \cdot 5^p$, atunci m = ..., n = ... și p = ...

c) Dacă $7\,007 = 7^m \cdot 11^n \cdot 13^p$, atunci m = ..., n = ... și p = ...

d) Dacă $1\,575 = 3^m \cdot 5^n \cdot 7^p$, atunci m = ..., n = ... și p = ...

7. Descompune în produs de puteri de numere prime numerele x, y și z și scrie produsul $x \cdot y \cdot z$ sub formă de produs de puteri de numere prime.

a) $x = 72$, $y = 150$ și $z = 385$;
b) $x = 126$, $y = 280$ și $z = 112$;
c) $x = 315$, $y = 875$ și $z = 735$;
d) $x = 1\,024$, $y = 729$ și $z = 1\,250$.

6. Determinarea celui mai mare divizor comun şi a celui mai mic multiplu comun. Numere prime între ele

Descopăr

1. a) Scrie mulțimile D_{36} și D_{42} prin enumerarea elementelor și apoi determină cel mai mare divizor comun al numerelor 36 și 42.

b) Scrie ca produs de puteri de numere prime numerele 36, 42 și cel mai mare divizor comun al acestora. Ce observi?

2. a) Scrie cei mai mici patru multipli nenuli ai fiecăruia dintre numerele 45 și 30 și apoi determină cel mai mic multiplu comun al numerelor 45 și 30.

b) Scrie ca produs de puteri de numere prime numerele 45, 30 și cel mai mic multiplu comun al acestora. Ce observi?

D_n reprezintă mulțimea divizorilor numărului natural nenul *n*.

Învăț

Determinarea celui mai mare divizor comun

Cel mai mare divizor comun a două sau al mai multor numere naturale, nu toate nule, este cel mai mare număr natural care divide numerele date.

OBSERVAȚIE

Cel mai mare divizor comun a două sau al mai multor numere naturale este divizibil cu orice divizor comun al acestora.

Fie *a* și *b* două numere naturale nenule. Dacă $d = (a, b)$, atunci $D_a \cap D_b = D_d$.

Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale *a* și *b* se prescurtează „c.m.m.d.c." și se notează (a, b).

Pentru a afla cel mai mare divizor comun a două sau al mai multor numere naturale procedăm astfel:

- **scriem numerele naturale ca produse de puteri de numere prime;**
- **luăm, o singură dată, factorii primi comuni, cu exponenții cei mai mici cu care apar în descompuneri și îi înmulțim.**

EXEMPLU:

Pentru a determina cel mai mare divizor comun al numerelor 264 și 252 procedăm astfel:

Scriem numerele naturale ca produse de puteri de numere prime.

$$\begin{array}{r|l} 264 & 2 \\ 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$ $\qquad$ $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

Luăm, o singură dată, factorii primi comuni, cu exponenții cei mai mici cu care apar în descompuneri și îi înmulțim.

$264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

$(264, 252) = 2^2 \cdot 3 = 12$

Două numere naturale se numesc prime între ele dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

Dacă numerele *a* și *b* sunt prime între ele, notăm *(a, b)* = 1.

EXEMPLE:

1. (5, 7) = 1; **2.** (2, 15) = 1; **3.** (10, 9) = 1.

Determinarea celui mai mic multiplu comun

Cel mai mic multiplu comun a două sau al mai multor numere naturale nenule este cel mai mic număr natural nenul care se divide cu numerele date.

OBSERVAȚIE

Cel mai mic multiplu comun a două sau al mai multor numere naturale divide orice multiplu comun al acestora.

Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale *a* și *b* se prescurtează „c.m.m.m.c" și se notează cu $[a, b]$.

Pentru a afla cel mai mic multiplu comun a două sau al mai multor numere naturale procedăm astfel:

- **scriem numerele naturale ca produse de puteri de numere prime;**
- **luăm, o singură dată, factorii primi comuni și necomuni cu exponenții cei mai mari cu care apar în descompuneri și îi înmulțim.**

EXEMPLU:

Pentru a determina cel mai mic multiplu comun al numerelor 360, 420 și 660 procedăm astfel:

Scriem numerele naturale ca produse de puteri de numere prime.

360	$2 \cdot 5$	420	$2 \cdot 5$	630	$2 \cdot 5$
36	2	42	2	63	3
18	2	21	3	21	3
9	3	7	7	7	7
3	3	1		1	
1					
$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$		$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$		$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	

Luăm, o singură dată, factorii primi comuni și necomuni cu exponenții cei mai mari cu care apar în descompuneri și îi înmulțim.

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

$[360, 420, 630] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\,520$

OBSERVAȚIE

$\boldsymbol{a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]}$, pentru oricare numere naturale nenule *a* și *b*.

Exerciții rezolvate

1. Determină numerele naturale *a* și *b*, cu $a < b$, pentru fiecare dintre situațiile:

a) $(a, b) = 15$ și $a + b = 135$; b) $[a, b] = 90$ și $a \cdot b = 270$.

Rezolvare:

a) Dacă $(a, b) = 15$ și $a < b$, atunci $a = 15 \cdot k$ și $b = 15 \cdot t$, unde $(k, t) = 1$ și $k < t$.

$a + b = 135 \Rightarrow 15 \cdot k + 15 \cdot t = 135 \Rightarrow 15 \cdot (k + t) = 135 \Rightarrow k + t = 9$