Ministerul Educației

Marius Perianu
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică

Matematică 5

Clasa a V-a

Acest manual școlar este realizat în conformitate cu *Programa școlară aprobată prin Ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017*.

Ministerul Educației

Marius Perianu
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică

Matematică

Clasa a V-a

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației prin ordinul de ministru nr. 4065/16.06.2022.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând din anul școlar 2022–2023.

Inspectoratul Școlar . . . .

Școala / Colegiul / Liceul . . . .

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: ***nou***, ***bun***, ***îngrijit***, ***neîngrijit***, ***deteriorat***.

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți științifici:
- conf. univ. dr. Eugen Păltănea, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea ***Transilvania*** din Brașov
- prof. gradul I Dorin Irinel Popa, Liceul cu Program Sportiv, Slatina

Redactor-șef: Roxana Jeler
Redactor: Mihaela Preda
Coperta: Anca Chiriță, Alexandru Daș
Tehnoredactor: Crenguța Rontea
Ilustrații: Alexandra Gabor

Activități digitale interactive și platformă e-learning: Learn Forward Ltd. Website: https://learnfwd.com
Înregistrare sunet și postprocesare: ML Sistem Consulting, Grupul Editorial Art – Alexa Vangu
Voci: Mircea Dragoman, Camelia Pintilie
Animații: Krogen Creative Studio, Alexandru Daș, S.C. Film Experience S.R.L.-D
Credite foto și video: Dreamstime

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
PERIANU, MARIUS
Matematică : clasa a V-a / Marius Perianu, Ștefan Smărăndoiu, Cătălin Stănică. - București : Art Klett, 2022
ISBN 978-606-076-249-2

I. Smărăndoiu, Ștefan
II. Stănică, Cătălin

51

Pentru comenzi vă puteți adresa Departamentului Difuzare
C.P. 12, O.P. 63, sector 1, București
Telefoane: 0744 634 719; 0751 281 774; 021 796 73 83; 021 796 73 80
Fax: 021 369 31 99

www.art-educational.ro

Cuvânt-înainte

Dragi copii,

Acest manual este primul pas pe care îl puteți face pentru a descoperi miracolul matematicii. Vom constata împreună că matematica este limba în care a fost scris Universul. Dacă în clasele primare am învățat *alfabetul matematicii*, clasa a V-a ne învață să construim *cuvinte*, *propoziții*, să dezvoltăm *idei*, să imaginăm lumi, astfel încât, în final, să scriem propria poveste matematică a universalității noastre.

Și, pentru că matematica este limbajul pe care îl poate înțelege oricare dintre noi, ca parte a Universului, am dorit să prezentăm acest manual folosind o exprimare prietenoasă, apropiată de cititor, apelând la simțul practic și la intuiție, ca forme de cunoaștere imediată a adevărului, concret sau abstract. Nu trebuie să fii matematician ca să simți numerele; ele sunt peste tot în jurul nostru și tot ce ne înconjoară e făcut din numere.

Introducerea conceptelor matematice se face plecând de la exemple din realitatea imediată, de la experiențele de zi cu zi. Matematica apare astfel ca o lume deschisă, vie, dinamică, în strânsă legătură cu toate domeniile de activitate, capabilă să formuleze, să descrie și să explice situații, probleme, fenomene sau procese.

Matematica nu constă doar în rezolvarea de probleme și găsirea răspunsurilor la întrebări; adevărata lecție a matematicii este arta de a pune corect o întrebare, indiferent dacă se referă la o problemă practică sau una pur științifică. Doar pentru că nu putem găsi o soluție la o problemă, nu înseamnă că nu există una; rămâne să descoperim calea corectă de abordare. Manualul oferă, la fiecare pas, momente de investigație, de reflecție, ocazii de a pune întrebări și de a corela răspunsurile posibile cu datele situațiilor analizate.

Matematica este ceea ce spiritul vieții scrie cu litere de mână în conștiința umană. Umanitatea are nevoie de matematică, pentru că tot ceea ce există în Univers nu este doar descris de matematică, ci este construit din matematică.

Autorii

Instrucțiuni de utilizare a manualului digital

Varianta digitală a manualului este similară cu cea tipărită, având în plus peste 115 AMII, activități multimedia interactive de învățare, care asigură un plus cognitiv.

Activitățile multimedia interactive de învățare sunt de trei feluri și sunt simbolizate pe parcursul manualului astfel:


AMII static, de ascultare activă și de observare dirijată a unei imagini semnificative


Activitate animată, filmuleț sau scurtă animație


Activitate interactivă, de tip exercițiu sau joc, în urma căreia elevul are feedback imediat

Alte butoane folosite în varianta digitală:

- CUPRINS
- ECRAN COMPLET
- Mod de afișare **2 pagini (tip carte)**
- Mod de afișare **pagină lată (pagină sub pagină)**
- Mod de afișare **digital *responsive***
- Mod de afișare **comutare automată**
- NOTIȚE
- AJUTOR
- Navigare către pagina precedentă
- Navigare către pagina următoare

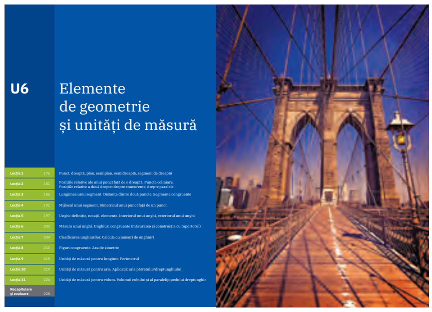
Ce propune acest manual

Manualul propune o viziune inspirată dintr-o pedagogie deschisă, conform căreia matematica este o lume vie, dinamică, în strânsă legătură cu toate domeniile de activitate, capabilă să formuleze, să descrie și să explice situații, probleme, fenomene sau procese.

În acest context, matematica nu constă doar în rezolvarea de probleme și găsirea răspunsurilor la întrebări; adevărata lecție a matematicii este arta de a pune corect o întrebare, indiferent dacă se referă la o problemă practică sau la una pur științifică.

Structura unei unități de învățare

Fiecare unitate de învățare cuprinde teme de predare-învățare și o fișă de recapitulare/evaluare.



Structura unei lecții de predare

Situație-problemă – problemă practică pe baza căreia se introduc noile concepte

De reținut – secvență în care sunt teoretizate conținuturile noi aflate în substratul situației-problemă propuse

Exemple – completarea informațiilor științifice

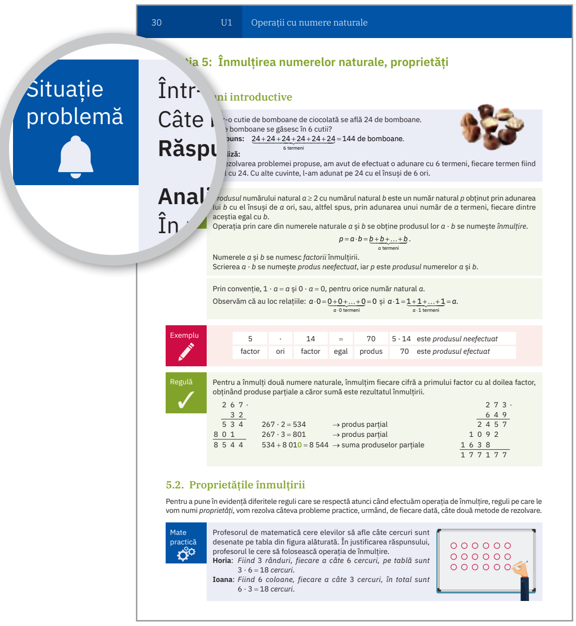
Mate practică – activități de învățare pentru formarea/dezvoltarea competențelor specifice și valorificarea experienței concrete a elevului în raport cu cotidianul

Probleme rezolvate: strategii și metode – reintegrarea conținuturilor noi, uneori rezolvate în mai multe moduri pentru a permite analogii și diferențieri

Probleme propuse – aplicații de natură teoretică sau practic-aplicativă

Gândire critică – încurajarea activităților de grup, a independenței în gândire și dezvoltarea încrederii în sine

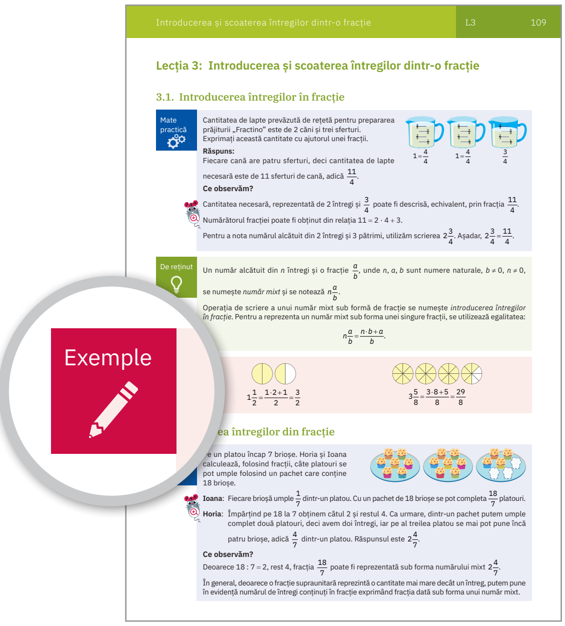
Autoevaluare – evaluarea de către elevii înșiși a cunoștințelor dobândite în cadrul lecției, cu ajutorul punctajelor și al soluțiilor

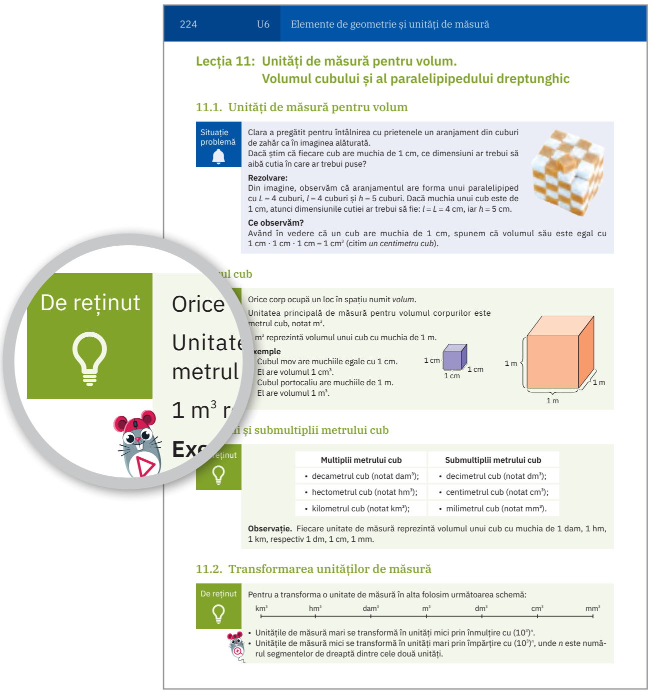


Cum este organizat manualul

Manualul este împărțit în șase unități de învățare care acoperă integral cele trei domenii de conținut prevăzute de programa școlară: *Operații cu numere naturale • Metode aritmetice de rezolvare a problemelor • Divizibilitatea numerelor naturale • Fracții ordinare • Fracții zecimale • Elemente de geometrie • Unități de măsură.*

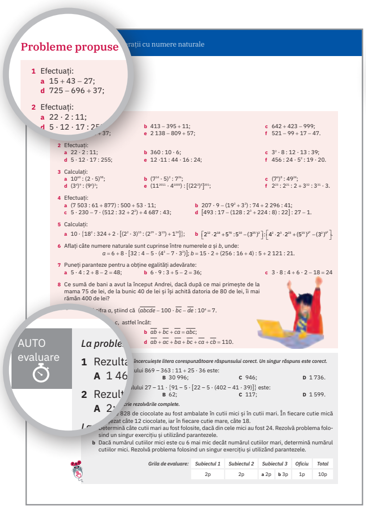
Fiecare unitate se deschide printr-o scurtă prezentare a structurii respectivei unități, care, prin crearea de așteptări, asigură conștientizarea relațiilor intradisciplinare.

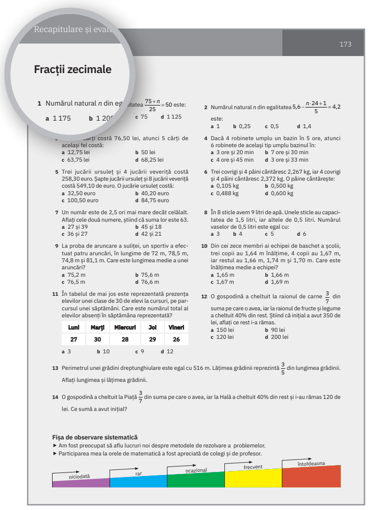




Componenta de evaluare

Pe parcursul unei unități de învățare sunt propuse instrumente complementare de evaluare (proiecte, portofolii, investigații, jocuri etc.), care au un grad ridicat de relevanță/aplicabilitate în viața de zi cu zi. Fiecare lecție se încheie cu autoevaluare, care conține un set de 3–4 itemi cu un grad ridicat de relevanță, ceea ce permite profesorilor să identifice rapid gradul de înțelegere de către elevi a conținuturilor predate în respectiva lecție.
La finalul fiecărei unități de învățare (după o succesiune mai consistentă de lecții) este propusă o fișă de evaluare, care se realizează prin forme și instrumente diversificate, axate pe formarea și dezvoltarea competențelor matematice.
Exercițiile și problemele propuse pot constitui și suport pentru lecțiile de recapitulare, acoperind întreaga gamă de tipologie a itemilor (obiectivi, semiobiectivi și subiectivi).





Competențe generale

1 Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2 Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3 Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4 Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5 Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6 Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

1.1 Identificarea numerelor naturale în contexte variate
1.2 Identificarea fracțiilor ordinare sau zecimale în contexte variate
1.3 Identificarea noțiunilor geometrice elementare și a unităților de măsură în diferite contexte
2.1 Efectuarea de calcule cu numere naturale, folosind operațiile aritmetice și proprietățile acestora
2.2 Efectuarea de calcule cu fracții folosind proprietăți ale operațiilor aritmetice.
2.3 Utilizarea instrumentelor geometrice pentru a măsura sau pentru a construi configurații geometrice
3.1 Utilizarea regulilor de calcul pentru efectuarea operațiilor cu numere naturale și pentru divizibilitate
3.2 Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale
3.3 Determinarea perimetrelor, a ariilor (pătrat, dreptunghi) și a volumelor (cub, paralelipiped dreptunghic) și exprimarea acestora în unități de măsură corespunzătoare
4.1 Exprimarea în limbaj matematic a unor proprietăți referitoare la comparări, aproximări, estimări și ale operațiilor cu numere naturale
4.2 Utilizarea limbajului specific fracțiilor/procentelor în situații date
4.3 Transpunerea în limbaj specific a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităților de măsură
5.1 Analizarea unor situații date în care intervin numere naturale, pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
5.2 Analizarea unor situații date în care intervin fracții pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
5.3 Interpretarea prin recunoașterea elementelor, a măsurilor lor și a relațiilor dintre ele, a unei configurații geometrice dintr-o problemă dată
6.1 Modelarea matematică, folosind numere naturale, a unei situații date, rezolvarea problemei obținute prin metode aritmetice și interpretarea rezultatului
6.2 Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situații date, în context intra- și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)
6.3 Analizarea unor probleme practice care includ elemente de geometrie studiate, cu referire la unități de măsură și la interpretarea rezultatelor

U1

Operații cu numere naturale

Lecția 1: Scrierea și citirea numerelor naturale

Mate practică

În vizită la Muzeul de Istorie, ghidul le prezintă elevilor mai multe manuscrise ce conțin scrieri vechi.

El le spune elevilor că semnele: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
se numesc cifre arabe,

iar semnele din manuscrisul alăturat: I II III IV V VI VII VIII IX
se numesc cifre romane.

Cifrele arabe provin din cultura indiană și au fost preluate de arabi. La început, arabii utilizau pentru cifrele de la 0 la 9 semnele: ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩,

iar matematicienii indieni utilizau semnele: ० १ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९.

În prezent, cel mai des se utilizează cifrele arabe.

De reținut

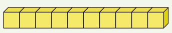
Numerele naturale au apărut din necesități practice de numărare și ordonare a unor lucruri, obiecte, ființe. Pentru scrierea unui număr natural, se folosesc unul sau mai multe dintre următoarele zece simboluri, numite *cifre arabe*:

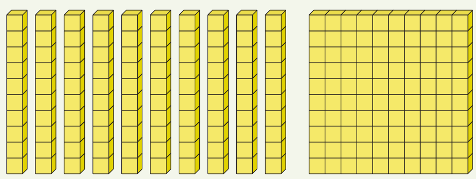
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Fiecare număr natural se scrie ca o succesiune de cifre, care se pot repeta, prima cifră a unui număr natural de cel puțin două cifre fiind diferită de 0. De asemenea, fiecare succesiune de cifre reprezintă un număr natural.

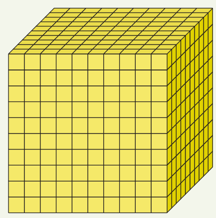
Acest mod de scriere a unui număr natural se numește *scriere în sistem zecimal* sau *scriere în baza zece*, **pentru că zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat mai mare**.

 ⟶ o unitate


10 unități ⟶ o zece



10 zeci formează o sută
o sută = 10 zeci = 100 de unități



⟶ o mie
= 10 sute
= 100 de zeci
= 1 000 de unități

În scrierea oricărui număr natural, poziția ocupată de fiecare cifră reprezintă un anumit ordin:
- ordinul 1 este ordinul unităților (prima cifră din dreapta);
- ordinul 2 este ordinul zecilor (a doua cifră din dreapta);
- ordinul 3 este ordinul sutelor (a treia cifră din dreapta);
- ordinul 4 este ordinul unităților de mii (a patra cifră din dreapta) etc.

Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților		
Ordinul sutelor de milioane	Ordinul zecilor de milioane	Ordinul unităților de milioane	Ordinul sutelor de mii	Ordinul zecilor de mii	Ordinul unităților de mii	Ordinul sutelor	Ordinul zecilor	Ordinul unităților
9	8	7	6	5	4	3	2	1

Pentru a citi un număr natural, grupăm cifrele câte trei de la dreapta spre stânga. Aceste grupe se numesc clase. Fiecare clasă se compune din trei ordine consecutive: unități, zeci și sute. Zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior.

În ordine, de la dreapta la stânga avem: clasa unităților, clasa miilor, clasa milioanelor, clasa miliardelor etc. Din acest motiv, scrierea numerelor în baza zece este o scriere *pozițională*, deoarece fiecare cifră are o anumită valoare după locul unde este scrisă.

Exemplu

În numărul 23 472 508 216, cifra 2 apare de trei ori, de la dreapta spre stânga, și are următoarele valori: sute, milioane, respectiv zeci de miliarde.

sute de miliarde	zeci de miliarde	unități de miliarde	sute de milioane	zeci de milioane	unități de milioane	sute de mii	zeci de mii	unități de mii	sute	zeci	unități
	2	3	4	7	2	5	0	8	2	1	6
clasa *miliardelor*			clasa *milioanelor*			clasa *miilor*			clasa *unităților*		

Numărul se citește de la stânga la dreapta, citind mai întâi cifrele fiecărei clase, apoi numele clasei, astfel: două zeci și trei de miliarde patru sute șapte zeci și două de milioane cinci sute opt mii două sute șaisprezece.

Observații

1 Descompunerea zecimală. Orice număr natural de două sau mai multe cifre se scrie în mod unic sub forma unei sume de produse între fiecare cifră din scrierea numărului și numărul ce indică ordinul cifrei respective (1, 10, 100, 1 000 etc.).

Exemple:

1 $37 = 3 \cdot 10 + 7$; $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$.

2 $275 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5$; $\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$.

3 $8\,086 = 8 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6$; $\overline{abcd} = 1\,000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$.

2 Numere pare, numere impare. Numerele naturale în scrierea cărora ultima cifră (cifra unităților) este 0, 2, 4, 6 sau 8 se numesc numere naturale pare, iar cele în scrierea cărora ultima cifră este 1, 3, 5, 7 sau 9 se numesc numere naturale impare.

Exemple:

1 Numerele 21, 35, 129 și 3 457 sunt impare, deoarece au ultima cifră 1, 5, 9, respectiv 7.

2 Numerele 54, 128, 3 526, 1 372 sunt pare, deoarece au ultima cifră 4, 8, 6, respectiv 2.

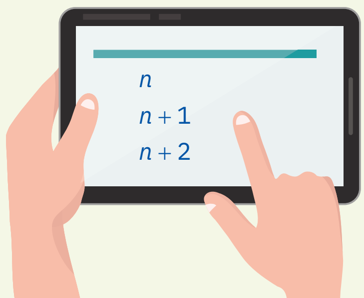
3 Șirul numerelor naturale. Scrierea 0, 1, 2, 3, ..., 23, 24, 25, ..., n, $n + 1$, $n + 2$, ... se numește *șirul numerelor naturale*. Orice două sau mai multe numere alăturate din șirul numerelor naturale se numesc numere naturale consecutive.

Exemple:

1 17 și 18 sunt două numere naturale consecutive.

2 45, 46, 47 sunt trei numere naturale consecutive.

3 Dacă n este un număr natural oarecare, atunci numerele n, $n + 1$ și $n + 2$ sunt numere naturale consecutive.



Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Determinați cifrele a, b și c, știind că $789 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.

Rezolvare:
$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = \overline{abc}$ și obținem $789 = \overline{abc}$.
În concluzie, $a = 7$, $b = 8$ și $c = 9$.

2 **a** Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărți cu 80 de pagini?
b Pentru numerotarea paginilor unui manual de matematică s-au folosit 468 de cifre.
Câte pagini are manualul?

Rezolvare:
a De la 1 la 9 s-au folosit 9 cifre.
De la 10 la 80 sunt $80 - 10 + 1 = 71$ de numere de două cifre, deci s-au folosit $71 \cdot 2 = 142$ de cifre.
Pentru numerotarea cărții s-au folosit $9 + 142 = 151$ de cifre.
b De la 1 la 9 s-au folosit 9 cifre. Au mai rămas $468 - 9 = 459$ de cifre utilizate.
De la 10 la 99 s-au utilizat 180 de cifre. Au mai rămas $459 - 180 = 279$ de cifre utilizate. Cele 279 de cifre provin de la numere de trei cifre, adică de la primele $279 : 3 = 93$ de numere de trei cifre.
Manualul are $100 + 93 - 1 = 192$ de pagini.

3 Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $a + 2b = 11$.

Rezolvare:
Vom studia cazuri după valorile lui b, deoarece observăm că pentru $b \geq 6$ avem $a + 2b > 11$.
Cazul I: Pentru $b = 5$, obținem $a = 1$.
Cazul II: Pentru $b = 4$, obținem $a = 3$.
Cazul III: Pentru $b = 3$, obținem $a = 5$.
Cazul IV: Pentru $b = 2$, obținem $a = 7$.
Cazul V: Pentru $b = 1$, obținem $a = 9$.
Cazul VI: Pentru $b = 0$, obținem $a = 11$ care nu este cifră.
Numerele cerute sunt 15, 34, 53, 72 și 91.

Probleme propuse

1 Scrieți cu litere numerele naturale:
a 843 027; **b** 500 002; **c** 5 017; **d** 11 111;
e 21 005; **f** 403 067; **g** 120 004; **h** 20 305 023.

2 Copiați tabelul de mai jos pe caiet și completați spațiile punctate:

Numărul natural	Cifra numărului natural	Ordinul cifrei	Clasa cifrei
1 234 567	3	zeci	mii
54 678	7	...	...
23 456 981	9	sute	...
1 234 567	2	...	...
23 456 981	4	...	mii
50 423 678	...	unități	milioane

3 Scrieți cu cifre, într-un tabel după modelul dat, numerele naturale de mai jos:
a douăzeci și șapte;
b trei sute cincizeci și opt de mii;
c cinci mii opt;
d nouă mii șapte sute cinci;
e două milioane opt sute treizeci și șapte de mii doi;
f șapte milioane trei mii șase sute cinci.

Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților		
S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U

4 Câte numere cuprinse între 30 și 60 conțin:
a cifra 4; **b** două cifre identice; **c** cifrele 1 sau 8?

5 **a** Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc} = 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 9$.
b Determinați cifrele a, b, c, știind că $324 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.
c Determinați cifrele a, b, c, d, știind că $\overline{a3c4} = 5 \cdot 1\,000 + b \cdot 100 + 7 \cdot 10 + d$.

6 **a** Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărți cu 320 de pagini?
b Pentru numerotarea paginilor unei cărți s-au folosit 612 cifre. Câte pagini are cartea?

7 Copiați tabelul următor pe caiet și completați spațiile punctate:

Numărul natural	Cifra unităților	Cifra zecilor	Cifra sutelor	Cifra unităților de mii	Cifra zecilor de mii	Cifra sutelor de mii	Cifra unităților de milioane
2 045 632	...	3	...	...	4	...	...
...	2	8	1	1	9	4	7
9 305 467	7	...	...	5	...	...	9
7 012 210	...	1	...	...	...	...	...
4 036 369	...	...	...	...	...	...	...

8 Pentru fiecare dintre șirurile de mai jos, observați regula de alcătuire și scrieți încă trei numere:
a 10, 16, 22, ...; **b** 10, 21, 32, ...; **c** 2, 6, 18, ...;
d 5, 11, 23, ...; **e** 4, 11, 32, ...; **f** 12, 23, 34, ...

9 **a** Scrieți trei numere impare cu produsul cifrelor 6.
b Scrieți patru numere pare cu suma cifrelor 10.

10 **a** Câte numere naturale de forma $\overline{aba}$ au produsul cifrelor egal cu 4?
b Câte numere naturale de forma $\overline{abcabc}$ au suma cifrelor egală cu 6?

11 **a** Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $a + b = 3$.
b Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că $a + 2b + c = 6$.
c Determinați numărul de forma $\overline{ab}$, știind că numerele naturale $\overline{ab3}$, $\overline{aba}$ și $\overline{a25}$ sunt consecutive.

12 Pe ecranul calculatorului sunt scrise toate numerele de la 700 la 1 084. Radu utilizează un program care șterge de pe ecran toate numerele impare. Câte numere rămân pe ecran?

13 Fiind dat un număr natural n, numărul scris cu cifrele lui n, în ordine inversă (citite de la dreapta la stânga) se numește *răsturnatul* numărului n. De exemplu, răsturnatul lui 12 este 21, iar răsturnatul lui 12 345 este 54 321.
a Determinați cifrele a și b, știind că răsturnatul numărului $\overline{73a}$ este $\overline{4b7}$.

b Determinați cifrele a, b, c știind că răsturnatul numărului $\overline{6a4c}$ este $\overline{347b}$.

c Determinați cifrele a, b, c și d știind că răsturnatul numărului $\overline{6b6d}$ este $\overline{daba}$, iar răsturnatul numărului $\overline{ab49}$ este predecesorul numărului $\overline{d44c}$.

Indicație. **a** Răsturnatul numărului $\overline{73a}$ este numărul $\overline{a37}$, deci $\overline{a37} = \overline{4b7}$. Fiind egale, aceste două numere au aceeași cifră a sutelor și aceeași cifră a zecilor. În consecință, $a = 4$ și $b = 3$.

Activitate pe grupe

Vizită la Muzeul de Istorie

Elevii, împărțiți în trei grupe, primesc următoarele sarcini de lucru:

Grupa 1. Elevii unei clase descoperă că autorizația de funcționare a muzeului a fost dată prin Decret Regal, emis de regele Carol I, la data de 23 august, anul $\overline{abba}$. Determinați anul în care a fost emisă autorizația de funcționare a muzeului, știind că suma cifrelor anului este 18.

Grupa 2. Maria a trimis un e-mail de mulțumire pe adresa muzeului și a primit ca răspuns o invitație la o expoziție de afișe hazlii. La expoziție vor fi prezente $\overline{ab}$ afișe realizate de elevi din clasele I – IV și $\overline{ba}$ afișe realizate de elevi din clasele V – VIII. Dacă numărul total al afișelor este de 33, iar elevii din clasele I – IV vor realiza mai multe afișe decât elevii din clasele V – VIII, atunci determinați câte afișe trebuie să realizeze fiecare echipă.

Grupa 3. Elevii participă la concursul *Obiectul meu preferat din muzeu*, urmând să realizeze și o prezentare a obiectului ales. Obiectul ales de Horia a fost o carte. El a precizat că pentru paginarea cărții s-au utilizat 1 086 de cifre. Determinați numărul paginilor cărții alese de Horia.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Scrierea cu cifre a numărului treizeci și opt de mii nouă este:

A 389; **B** 3 809; **C** 38 009; **D** 380 009.

2 Scrierea cu litere a numărului 1 078 este:

A o sută șaptezeci și opt; **B** o mie șaptezeci și opt;
C zece mii șaptezeci și opt; **D** un million șaptezeci și opt.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră numărul natural $A = \overline{a14b}$.

a Determină câte numere A sunt impare.

b Determină câte numere A verifică relația $a > b$.

Grila de evaluare:

Subiectul 1	Subiectul 2	Subiectul 3		Oficiu	Total
2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 2: Reprezentarea pe axa numerelor. Compararea și ordonarea numerelor naturale; aproximări, estimări

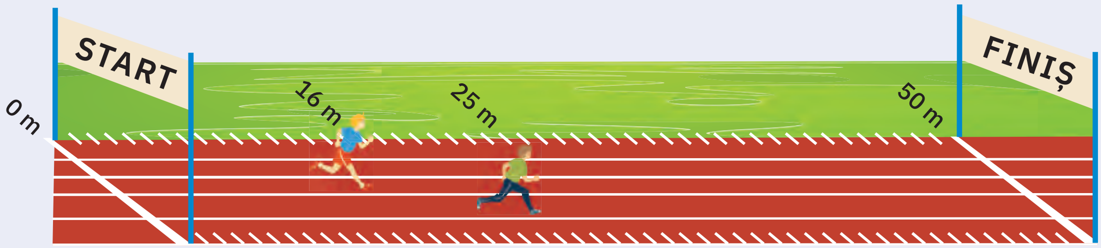
2.1. Reprezentarea pe axa numerelor

Situație problemă

1 Dimineața, Ioana observă că termometrul indică 22 de grade. La întoarcerea de la școală, la ora 14, termometrul indică 28 de grade. Este mai cald la ora 14 decât dimineața?

Răspuns: Este mai cald, deoarece pe scara termometrului 28 > 22.

2 Horia și Ioana se antrenează pe o pistă de 50 de metri. După plecarea din punctul *O*, marcat pe pistă cu 0 metri, la un moment dat, Horia se află în punctul *T* al pistei, la marcajul de 25 de metri, iar Ioana în punctul *Q* al pistei, la marcajul de 16 metri.
Cine este mai aproape de START și cine este mai aproape de FINIȘ?



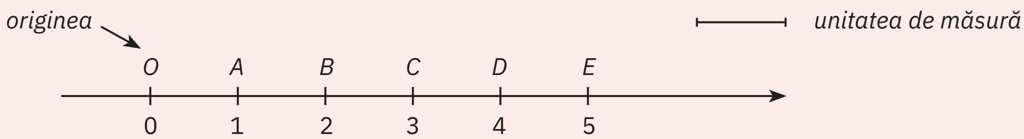
Răspuns: 16 < 25, deci Horia este mai aproape de FINIȘ.
25 > 16, deci Ioana este mai aproape de START.

De reținut

O dreaptă pe care se fixează un punct numit *origine*, un sens de parcurgere de la stânga la dreapta, indicat de o săgeată, numit *sens pozitiv*, și un segment numit *unitate de măsură* se numește *axa numerelor*.

Fiecărui număr natural îi corespunde, pe axa numerelor, un punct. Numărul respectiv se numește *coordonata punctului*. Originea are coordonata 0 (zero).

Exemplu



Pe axa numerelor de mai sus sunt reprezentate punctele *O*(0), *A*(1), *B*(2), *C*(3), *D*(4) și *E*(5).
Citim: „punctul *O* de coordonată 0”, „punctul *A* de coordonată 1”, „punctul *D* de coordonată 4” etc.

2.2. Compararea și ordonarea numerelor naturale

De reținut

Dintre două numere naturale care au un număr diferit de cifre, este mai mare numărul care are mai multe cifre.

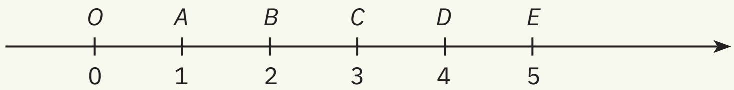
Dintre două numere naturale care au același număr de cifre, numărul mai mare este cel la care întâlnim prima cifră mai mare când comparăm cifrele de același ordin de la stânga la dreapta.
Semnele folosite în compararea numerelor sunt: =, <, >, ≤, ≥.

Exemple

1 546 < 1 234, deoarece 1 234 are 4 cifre, iar 546 are 3 cifre.
2 9 999 < 10 001, deoarece 10 001 are 5 cifre, iar 9 999 are 4 cifre.
3 123 < 193, deoarece numerele au același număr de cifre și 2 < 9.
4 540 > 440, deoarece numerele au același număr de cifre și 5 > 4.
5 1 234 < 1 237, deoarece au același număr de cifre și 4 < 7.

Observații

Dintre două numere naturale reprezentate pe axa numerelor, mai mare este cel aflat în dreapta celuilalt.

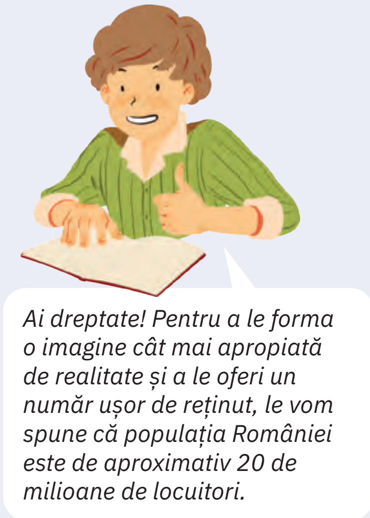


3 este mai mic decât 4, deoarece punctul $D(4)$ se află poziționat pe axa numerelor în dreapta punctului $C(3)$.

2.3. Aproximări, rotunjiri, estimări

Situație problemă

Aflați într-o tabără internațională, Eva și Horia trebuie să prezinte câteva date despre țara noastră. Ei știu că în 2011, la ultimul recensământ oficial, populația României era de 20 121 641 de locuitori.



De reținut

Atunci când, în locul unui număr natural dat, utilizăm un alt număr apropiat de el, se spune că am folosit o aproximare a numărului respectiv. Există trei tipuri de aproximări: prin lipsă, prin adaos și prin rotunjire.

Aproximarea prin lipsă a unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este cel mai mare număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.) mai mic sau egal cu numărul respectiv.

Aproximarea prin adaos a unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este cel mai mic număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.) strict mai mare decât numărul respectiv.

Rotunjirea unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este aproximarea, prin lipsă sau prin adaos, la ordinul considerat cel mai apropiat de numărul respectiv.

În cazul în care cele două aproximări sunt la fel de apropiate de număr, pentru rotunjire se ia în considerare aproximarea prin adaos.

Exemple

	Aproximarea la ordinul zecilor prin ...			Aproximarea la ordinul sutelor prin ...		
Numărul	**lipsă**	**adaos**	**rotunjire**	**lipsă**	**adaos**	**rotunjire**
2 537	2 530	2 540	2 540	2 500	2 600	2 500
782	780	790	780	700	800	800
263 005	263 000	263 010	263 010	263 000	263 100	263 000

Observații

1. Aproximarea prin lipsă a unui număr natural la ordinul zecilor se obține înlocuind ultima cifră a numărului (cifra unităților) cu zero, aproximarea prin lipsă la ordinul sutelor se face înlocuind ultimele două cifre ale numărului cu 0 (zero) etc.
2. Un număr natural este mai mare sau egal cu orice aproximare a sa prin lipsă (de orice ordin) și strict mai mic decât orice aproximare prin adaos.
3. Diferența dintre aproximarea prin adaos la ordinul zecilor (respectiv ordinul sutelor, miilor etc.) și aproximarea prin lipsă la același ordin este egală cu 10 (respectiv 100, 1 000 etc.).

Situație problemă

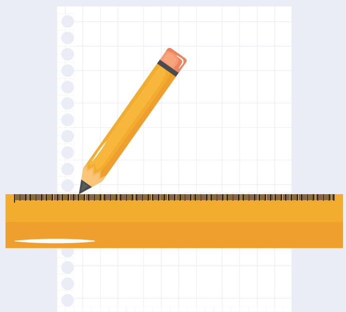
Prețul unui kilogram de mere în luna iulie este de 7 lei. Având în vedere că în toamnă intră pe piață noua recoltă, o firmă de băuturi răcoritoare estimează că în luna septembrie prețul unui kilogram de mere va fi mai mic cu 2 lei. În toamnă, prețul unui kilogram de mere a fost de 4 lei.
A fost utilă estimarea?

Răspuns: Estimarea a fost utilă, cu toate că aceasta nu a coincis întocmai realității. Din dorința de a avea un buget pentru achiziționarea unei cantități mari de mere, estimarea a ajutat, apropiindu-se de prețul corect.

De reținut

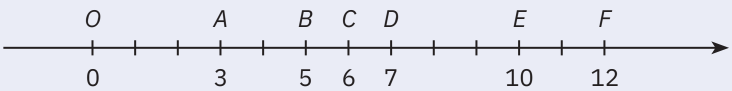
A estima înseamnă a evalua cu aproximație, a aprecia mărimea, valoarea, pe baza unor date incomplete. Estimarea are un rol informativ și este utilizată în planificarea diferitelor activități curente realizate de oameni, dar nu corespunde întotdeauna adevărului matematic. O estimare bună este cea care se apropie, în timp, de realitate.

Probleme rezolvate: strategii și metode



1 Reprezentați pe axa numerelor: 3, 5, 6, 7, 10, 12.

Rezolvare:
Se scrie $A(3)$, $B(5)$, $C(6)$, $D(7)$, $E(10)$, $F(12)$.



2 **a** Scrieți toate numerele naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu cifrele 6, 1 și 3, apoi ordonați-le crescător.
b Scrieți, în ordine descrescătoare, toate numerele de trei cifre distincte care se pot forma cu cifrele 0, 4 și 9.

Rezolvare:
a Numerele care se pot forma sunt următoarele: 613, 631, 136, 163, 316, 361.
Ordinea crescătoare a numerelor este: 136, 163, 316, 361, 613, 631.
b Prima cifră a unui număr natural de trei cifre nu poate fi egală cu zero, deci cu cifrele 0, 4 și 9 putem forma doar patru numere de trei cifre distincte și anume: 409, 490, 904 și 940.
Ordinea descrescătoare a numerelor este 940, 904, 490, 409.

3 Alegeți cifrele a și b astfel încât numărul $A = \overline{353a17}$ să fie mai mare decât numărul $B = \overline{3b4739}$.
Câte soluții are problema?

Rezolvare:
Dacă $b > 5$, atunci $A < B$, indiferent de alegerea lui a.
Dacă $b = 5$, atunci $B = 354\ 739$. Primele două cifre ale numerelor A și B sunt egale. A treia cifră a numărului B este 4, mai mare decât a treia cifră a lui A, care este 3. În acest caz, $A < B$.
Dacă $b \leq 4$, atunci $A > B$, indiferent de valorile pe care le ia cifra a. Cifra b poate lua 5 valori (0, 1, 2, 3 sau 4), iar cifra a poate lua 10 valori (0, 1, 2, ..., 9). Oricare dintre cele 5 valori ale lui b se poate asocia cu oricare dintre cele 10 valori ale lui a, deci sunt $5 \cdot 10 = 50$ de posibilități diferite de alegere a cifrelor a și b.

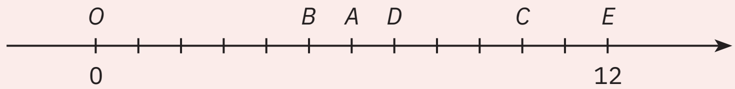
4 Fie numărul 269 317. Plasați cifra 5 între două cifre ale numărului pentru a obține cel mai mare și, respectiv, cel mai mic număr posibil.

Rezolvare:
Plasând cifra 5 între două cifre ale numărului 269 317, obținem numerele: 2 569 317, 2 659 317, 2 695 317, 2 693 517, 2 693 157.
Cel mai mare număr posibil este 2 695 317, iar cel mai mic număr posibil este 2 569 317.
Observăm că cel mai mare număr se obține atunci când plasăm cifra 5 înaintea primei cifre mai mici decât 5 din scrierea numărului 269 317, adică înaintea cifrei 3.
La fel, cel mai mic număr se obține când plasăm cifra 5 înaintea primei cifre mai mari decât 5 a numărului 269 317, adică înaintea cifrei 6.

Probleme propuse

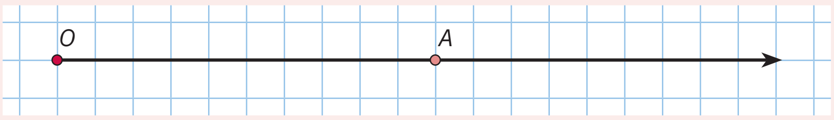
1 Reprezentați pe axa numerelor punctele corespunzătoare numerelor: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12.

2 Determinați coordonatele punctelor *A*, *B*, *C* și *D* din reprezentarea de mai jos.

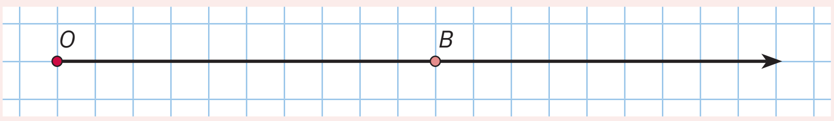


3 Scrieți în ordine descrescătoare numerele: 1 234, 1 342, 2 314, 2 143, 4 321.

4 Ioana a avut de reprezentat *A*(10) și a realizat acest desen:



Eva a avut de reprezentat *B*(5) și a realizat acest desen:



Sunt corecte cele două reprezentări? Justificați răspunsul.

5 Scrieți în ordine crescătoare numerele naturale:
a mai mici decât 12; **b** cuprinse între 17 și 25; **c** impare, cuprinse între 14 și 38.

6 Comparați numerele:
a 23 456 și 23 546; **b** 236 780 și 236 800; **c** 123 456 și 23 456.

7 **a** Aproximați numărul 124 367, prin lipsă, la zeci, sute, mii și, respectiv, sute de mii.
b Aproximați numărul 892 524, prin adaos, la zeci, sute, mii și, respectiv, sute de mii.
c Aproximați numărul 587 321 la ordinul zecilor, sutelor, miilor și, respectiv, al sutelor de mii, prin lipsă și prin adaos.
d Rotunjiți numărul 89 276 la ordinul zecilor, sutelor, miilor și, respectiv, al sutelor de mii.

8 Rotunjiți, prin aproximare la ordinul sutelor, următoarele numere: 2 367, 3 129, 1 087, 98 109, 63 987, 13 817, 56 257, 56 275, 80 978, 80 789.

9 Determinați următoarele numere naturale:
a cel mai mic număr natural de trei cifre nenule distincte;
b cel mai mare număr natural format cu patru cifre distincte;
c cel mai mare număr care se scrie cu trei cifre pare și două impare, toate distincte;
d cel mai mic număr de forma $\overline{a2b3c4}$, cu toate cifrele distincte.

10 **a** Reprezentați pe axa numerelor punctele corespunzătoare numerelor pare cuprinse între 7 și 19. Câte puncte ați obținut?
b Reprezentați pe axa numerelor punctele corespunzătoare numerelor impare cuprinse între 0 și 14. Câte puncte ați obținut?

11 Scrieți câte patru numere naturale cuprinse între 13 025 și 13 983, care, rotunjite la ordinul sutelor, ar fi egale cu:
a 13 000; **b** 13 500; **c** 14 000.

12 **a** Fie numărul 658 234. Plasați cifra 7 între cifrele sale, astfel încât numărul obținut să fie cel mai mic posibil.
b Fie numărul 852 374. Ștergeți o cifră a acestui număr, astfel încât numărul rămas să fie cel mai mare posibil.

13 Scrieți 6 numere naturale cuprinse între 23 427 și 23 482, care se pot rotunji la:
a 23 500; **b** 23 400; **c** 23 480.

14 Câte numere naturale de trei cifre se pot rotunji la ordinul sutelor, astfel încât să se obțină numărul 400?

15 Determinați perechile (b, d) care lipsesc din spațiile punctate din tabelul dat, pentru care $a < b \leq c \leq d < e$:

a	b	c	d	e
12	...	19	...	22

16 Determinați cel mai mic număr natural de cinci cifre diferite care este mai mare decât 30 000 și are suma cifrelor sale mai mare decât 21.

17 Asociați fiecare cifră din coloana **A** cu o literă din coloana **B**, pentru a obține predecesorul sau succesorul numărului din coloana **A**.

A	**B**
1 327	**a** 327
2 329	**b** 328
3 330	**c** 329
4 332	**d** 330
	e 331

18 Ordonați descrescător numerele naturale a, b, c, d, e, știind că: $c > e$, $c < a$, $d > a$ și $b > d$.

19 **a** Scrieți numerele pare cuprinse între $\overline{ab2}$ și $\overline{ab8}$.
b Scrieți numerele impare cuprinse între $\overline{a13}$ și $\overline{a28}$.

20 **a** De câte ori se folosește cifra 3 în scrierea numerelor naturale de la 1 la 100?
b De câte ori se folosește cifra 1 în scrierea numerelor naturale de la 1 la 1 000?

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Dintre numerele 2 021, 2 102, 2 012, 12 200, mai mic este numărul:
A 2 021; **B** 2 102; **C** 2 012; **D** 12 220.

2 Aproximarea, prin adaos, a numărului 182 323 la sute de mii este:
A 182 300; **B** 182 400; **C** 200 000; **D** 202 323.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră numerele de forma $\overline{abc}$, astfel încât $200 < \overline{abc} < 400$.
a Câte numere de forma $\overline{abc}$ verifică datele problemei?
b Scrie toate numerele care verifică și condiția $c = a + b + 5$.

Grila de evaluare:

Subiectul 1	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: **30 de minute**

Lecția 3: Adunarea numerelor naturale, proprietăți

3.1. Noțiuni introductive

Situație problemă

În colecția sa, Horia are 5 cărți poștale cu obiective turistice din România. Ioana, colega lui, îi face cadou încă 3.
Câte cărți poștale are acum Horia?

Răspuns: $5 + 3 = 8$ cărți poștale

De reținut

Prin adunarea numerelor naturale *a* și *b* se obține un număr natural *s*, numit *suma* numerelor *a* și *b*.

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{s}$$

Numerele *a* și *b* se numesc *termenii* adunării, iar rezultatul adunării poartă numele de *sumă*.
Scrierea $a + b$ se numește *suma neefectuată*, iar *s* este *suma efectuată*.

Exemplu

27	+	**31**	=	**58**	**27 + 31**	este *suma neefectuată*
termen	plus	termen	egal	sumă	58	este *suma efectuată*

De reținut

Din clasele anterioare știm că, pentru a aduna două numere naturale, se adună unitățile de același ordin și se ține cont că zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

$$\begin{array}{rrr} +1 & +1 & \\ 2 & 6 & 7\,+ \\ 5 & 8 & 5 \\ \hline 8 & 5 & 2 \end{array}$$

unități: $7 + 5 = 12 = 10 + 2$
zeci: $6 + 8 + 1 = 15 = 10 + 5$
sute: $2 + 5 + 1 = 8$

$$\begin{array}{rrrr} +1 & +1 & +1 & \\ & 9 & 7 & 3\,+ \\ 3 & 6 & 4 & 9 \\ \hline 4 & 6 & 2 & 2 \end{array}$$

unități: $3 + 9 = 12 = 10 + 2$
zeci: $7 + 4 + 1 = 12 = 10 + 2$
sute: $9 + 6 + 1 = 16 = 10 + 6$
mii: $3 + 1 = 4$

3.2. Proprietățile adunării numerelor naturale

Pentru a pune în evidență unele reguli care se respectă atunci când efectuăm operația de adunare (reguli pe care le vom numi proprietăți), vom analiza câteva situații practice.

Mate practică

În drumul spre școală, Horia trece în fiecare zi să o ia și pe colega lui de bancă, Ioana. La terminarea cursurilor, Horia se întoarce pe același drum, lăsând-o pe Ioana acasă la ea. De la casa lui Horia până la casa Ioanei sunt 250 m, iar de la casa Ioanei până la școală sunt 450 m.

a Ce distanță parcurge Horia când merge de acasă până la școală?
Răspuns: $250\text{ m} + 450\text{ m} = 700\text{ m}$

b Ce distanță parcurge Horia când se întoarce de la școală acasă?
Răspuns: $450\text{ m} + 250\text{ m} = 700\text{ m}$

Ce observăm?
Suma a două numere naturale este aceeași, indiferent de ordinea în care apar cei doi termeni.
Această proprietate a adunării se numește *comutativitate*.

$\underbrace{250 + 450}_{700} = \underbrace{450 + 250}_{700}$ sau, în general, $a + b = b + a$
pentru orice numere naturale *a* și *b*.

Mate practică

Horia a citit, de vineri până duminică, cartea sa preferată.
Vineri a citit 24 de pagini, sâmbătă 67, iar duminică 48.

a Câte pagini a citit Horia vineri și sâmbătă?
Răspuns: $24 + 67 = 91$ de pagini

b Câte pagini a citit Horia sâmbătă și duminică?
Răspuns: $67 + 48 = 115$ pagini

c Câte pagini a citit Horia în weekend?
Răspuns 1: $91 + 48 = 139$ de pagini (am adunat cât a citit în primele două zile cu cât a citit duminică)
Răspuns 2: $24 + 115 = 139$ de pagini (am adunat cât a citit vineri cu cât a citit în ultimele două zile)

Ce observăm?
Când adunăm trei numere naturale, se obține același rezultat fie că adunăm mai întâi primele două numere și apoi adunăm suma obținută cu al treilea număr, fie că adunăm primul număr la suma ultimelor două. Această proprietate a adunării se numește *asociativitate*.

$\underbrace{(\underbrace{24+67}_{91})+48}_{139}=\underbrace{24+(\underbrace{67+48}_{115})}_{139}$ sau, în general, $(a + b) + c = a + (b + c)$
pentru orice numere naturale a, b și c.

De reținut

Proprietățile adunării numerelor naturale

1 Adunarea numerelor naturale este comutativă:
$a + b = b + a$, pentru orice numere naturale a și b.

2 Adunarea numerelor naturale este asociativă:
$(a + b) + c = a + (b + c)$, pentru orice numere naturale a, b și c.

3 Numărul natural 0 este element neutru la adunarea numerelor naturale:
$a + 0 = 0 + a = a$, pentru orice număr natural a.

Știați că...

Adunarea reprezintă, de fapt, o numărare succesivă. De exemplu, pentru a-l aduna pe 5 cu 3 vom număra, în șirul numerelor naturale, încă 3 numere pornind de la 5:

0 1 2 3 4 5 → 6 → 7 → 8 9 10 ...

La fel, a aduna pe 3 cu 5 înseamnă a număra, în șirul numerelor naturale, 5 numere pornind de la 3:

0 1 2 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 9 10 ...

Din acest exemplu deducem că $5 + 3 = 8$ și $3 + 5 = 8$, deci $5 + 3 = 3 + 5$.
Această interpretare a adunării, ca numărare succesivă, oferă încă o justificare a faptului că suma a două numere naturale este aceeași, indiferent de ordinea termenilor (altfel spus, a proprietății de comutativitate a adunării numerelor naturale).

3.3. Legătura dintre operația de adunare și relațiile de egalitate/inegalitate

De reținut

1 Adunând un număr natural în ambii membri ai unei egalități, egalitatea se păstrează:
- dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$, pentru orice număr natural c.

2 Adunând un număr natural în ambii membri ai unei inegalități, inegalitatea se păstrează:
- dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$, pentru orice număr natural c.

3 Adunând termen cu termen două egalități, egalitatea se păstrează:
- dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a + c = b + d$.

4 Adunând termen cu termen două inegalități de același sens, inegalitatea se păstrează:
- dacă $a < b$ și $c < d$, atunci $a + c < b + d$;
- dacă $a > b$ și $c > d$, atunci $a + c > b + d$;
- dacă $a \leq b$ și $c \leq d$, atunci $a + c \leq b + d$;
- dacă $a \geq b$ și $c \geq d$, atunci $a + c \geq b + d$.

Exemplu

Numerele naturale a și b verifică relațiile $a + b = 11$ și $b + 2a = 15$.
Determinați numerele $x = (a + 2) + (b + 3)$ și $y = 3a + 2b$.

Rezolvare:

a Deoarece $x = a + b + 5$, vom aduna 5 în ambii membri ai egalității $a + b = 11$. Obținem: $a + b + 5 = 16$, adică $x = 16$.

b Adunând membru cu membru egalitățile $a + b = 11$ și $b + 2a = 15$, obținem:
$(a + b) + (b + 2a) = 11 + 15$, de unde rezultă $3a + 2b = 26$, adică $y = 26$.

Gândire critică. Suma primelor *n* numere naturale nenule

De reținut

Pentru orice număr natural $n \geq 1$ are loc egalitatea:

$$1 + 2 + ... + n = n \cdot (n + 1) : 2.$$

Demonstrație: Notând cu S suma primelor n numere naturale nenule, avem:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n$$
$$S = n + (n - 1) + (n - 2) + ... + 2 + 1$$

Adunând membru cu membru cele două relații, obținem:

$$2 \cdot S = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + ... + (n - 1 + 2) + (n + 1),$$

adică $2 \cdot S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ paranteze}} = n \cdot (n+1)$, de unde rezultă: $S = n \cdot (n + 1) : 2$.

Exemple

1 Suma primelor zece numere naturale nenule este:
$1 + 2 + ... + 10 = 10 \cdot 11 : 2 = 110 : 2 = 55$.

2 Suma numerelor naturale de la 1 la 100 este:
$1 + 2 + ... + 100 = 100 \cdot 101 : 2 = 10\,100 : 2 = 5\,050$.

Observație

Sumele de tipul celei din exemplul anterior se numesc sume Gauss, după numele marelui matematician german Karl Friedrich Gauss, despre care se spune că, în clasele primare, a primit ca pedeapsă de la profesorul său J.G. Büttner să calculeze suma numerelor de la 1 la 100. Procedând ca în demonstrația de mai sus, el a reușit să determine rezultatul în câteva secunde, spre uimirea profesorului și a asistentului acestuia.

Studiu individual

Karl Friedrich Gauss (1777–1855) a fost un matematician, fizician și astronom german, considerat unul dintre cei mai mari oameni de știință germani. Folosind ca sursă un dicționar de personalități științifice ori site-uri de internet recomandate de profesorul vostru, documentați-vă despre contribuția lui Gauss la dezvoltarea științei.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Folosind asociativitatea și comutativitatea adunării, calculați mai rapid sumele:

a $S = 22 + 23 + 24 + 100 + 76 + 77 + 78$; **b** $S = (24 + 36) + 73 + 22 + 87 + (88 + 44) + 66$.

Rezolvare:

a $S = 22 + 23 + 24 + 100 + 76 + 77 + 78 = (22 + 78) + (23 + 77) + (24 + 76) + 100 =$
$= 100 + 100 + 100 + 100 = 400$;

b $S = (24 + 36) + 73 + 22 + 87 + (88 + 44) + 66 = (24 + 36) + (73 + 87) + (22 + 88) + (44 + 66) =$
$= 60 + 160 + 110 + 110 = 220 + 220 = 440$.

2 Calculați rapid, înlocuind unul dintre termenii adunării cu o sumă neefectuată, după modelul:

$$529 + 780 = 509 + 20 + 780 = 509 + (20 + 780) = 509 + 800 = 1\,309$$

a $675 + 388$;
b $937 + 677$.

Rezolvare:
a $675 + 388 = 675 + (25 + 363) = (675 + 25) + 363 = 700 + 363 = 1\,063$;
b $937 + 677 = (900 + 37) + (600 + 77) = (900 + 600) + (37 + 77) = 1\,500 + 114 = 1\,614$.

3 Știind că $x + 2y + 13 = 24$, determinați numerele $a = 18 + 2y + x$ și $b = 2x + 77 + 4y$.

Rezolvare:
$a = 18 + 2y + x = (x + 2y + 13) + 5 = 24 + 5 = 29$
$b = 2x + 77 + 4y = x + x + 2y + 2y + 77 = (x + 2y + 13) + (x + 2y + 13) + 51 = 99$.

4 Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care are loc egalitatea $\overline{17ab} + \overline{ab57} = 5\,191$.

Rezolvare:
Metoda 1. Scriem termenii din sumă unul sub altul:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 7 & a & b\ + \\ a & b & 5 & 7 \\ \hline 5 & 1 & 9 & 1 \end{array}$$

Suma dintre b și 7 are ultima cifră 1, deci $b = 4$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 7 & a & 4\ + \\ a & 4 & 5 & 7 \\ \hline 5 & 1 & 9 & 1 \end{array}$$

Ultima cifră a sumei dintre a, 5 și 1 este 9, deci $a = 3$. Deci $\overline{ab} = 34$, iar egalitatea este $1\,734 + 3\,457 = 5\,191$, adevărată.

Metoda 2. Folosind scrierea zecimală, avem:
$\overline{17ab} + \overline{ab57} = 1\,700 + \overline{ab} + \overline{ab00} + 57 = 1\,757 + \overline{abab}$, deci $1\,757 + \overline{abab} = 5\,191$.
Rezultă că $\overline{abab} = 5\,191 - 1\,757 = 3\,434$, de unde $\overline{ab} = 34$.

5 Fie $n \geq 3$ un număr natural. Ordonați crescător numerele $2n + 8$, $4n + 3$, $n + 10$.

Rezolvare:
Adunând numărul natural $n + 7$ la fiecare dintre membrii inegalității $n \geq 3$, obținem $2n + 7 \geq n + 10$, deci $n + 10 \leq 2n + 7 < 2n + 8$. Apoi, adunând membru cu membru inegalitățile $n \geq 3$ și $n \geq 3$, obținem $2n \geq 6$. Adunând acum $2n + 3$ în ambii membri, obținem $4n + 3 \geq 2n + 9 > 2n + 8$.
Așadar, $n + 10 < 2n + 8 < 4n + 3$.

Probleme propuse

1 Calculați:
a $241 + 347$; **b** $127 + 234$; **c** $6\,453 + 1\,200$;
d $678 + 5\,438$; **e** $4\,539 + 496$; **f** $134 + 739$;
g $1\,020 + 3\,057 + 59$; **h** $219\,908 + 1\,005 + 12$; **i** $42\,008 + 21\,007 + 674$;
j $378 + 324 + 5\,002$; **k** $92\,367 + 195 + 6\,792$; **l** $210 + 2\,011 + 20\,012$.

2 Folosind asociativitatea și comutativitatea adunării, calculați sumele:
a $S = 3 + 12 + 45 + 97 + 17 + 83 + 55 + 88 + 100$;
b $S = 200 + 175 + 113 + 37 + 25 + 87 + 163$;
c $S = 19 + 32 + 58 + 91 + 42 + 81 + 55 + 9 + 100$.

3 Calculați:
a $24 + 68 + 76 + 32$; **b** $224 + 29 + 32 + 76 + 71 + 24$; **c** $90 + 900 + 100 + 10$;
d $450 + 327 + 550 + 673$; **e** $444 + 999 + 556 + 1$; **f** $25 + 58 + 175 + 142$.

4 Calculați următoarele sume:
a $1 + 2 + 3 + ... + 30$; **b** $2 + 3 + 4 + ... + 30$; **c** $9 + 10 + 11 + ... + 30$.

5 **a** Suma a două numere naturale consecutive este 43. Determinați numerele.
b Suma a trei numere naturale consecutive este 48. Determinați numerele.
c Suma a două numere naturale pare consecutive este 26. Determinați numerele.
d Suma a trei numere impare consecutive este 57. Determinați numerele.

6 **a** Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{7ab} + \overline{ab2} = 977$.
b Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{4ab} + \overline{ba9} = 852$.

7 Efectuați:
a $\overline{a105} + \overline{3b3}$; **b** $\overline{a00d} + \overline{b00} + 60$; **c** $\overline{ab0000} + \overline{cd00} + \overline{ef}$.

8 Dacă a este un număr par și b este un număr impar, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:
a $a + b + 11$ este un număr par; **b** $a + b + 12$ este un număr par;
c $a + 4 + b + 9$ este un număr impar; **d** $50 + a + b + 36$ este un număr impar.

9 **a** Dacă n este cea mai mare cifră pară, atunci determinați numerele pare cuprinse între $n + 11$ și $n + 24$.
b Dacă n este cea mai mare cifră impară, atunci determinați numerele impare cuprinse între $n + 17$ și $n + 39$.

10 Ioana și Horia folosesc computerul pentru a crea un program care să citească datele de intrare și să producă datele de ieșire cerute. Identificați rezultatele greșite și indicați răspunsurile corecte, după model:

	Date de intrare	Valoare	Date de ieșire	Valoare	Verificare rezultate
a	$5 + 3a + 2b$	22	$2b + 3a + 45$	62	*corect*
b	$2a + 4b + 19$	51	$60 + 4b + 15 + 2a$	701	*incorect*/rezultatul *corect* este 107
c	$5a + 3b + 99$	158	$34 + 10a + 78 + 6b$	230	...
d	$3a + 5b$	26	$7a + 8b$	35	...
	$4a + 3b$	20			
e	$a + 2b$	25	$5a + 9b + 7$	122	...
	$2a + 3b$	40			

11 Reconstituiți adunările, scriind toate variantele posibile.

a
$$\begin{array}{r} 1*6+ \\ 2* \\ \hline *13 \end{array}$$

b
$$\begin{array}{r} **3*+ \\ 794* \\ \hline 13783 \end{array}$$

c
$$\begin{array}{r} 4*+ \\ 5*2 \\ \hline *29 \end{array}$$

12 Prețul unui caiet este 3 lei, 4 lei sau 6 lei, în funcție de numărul de pagini. Sergiu trebuie să cumpere cel puțin câte un caiet de fiecare tip.
a Care este suma minimă de care are nevoie Sergiu pentru a cumpăra 7 caiete? Dar cea maximă?
b Care este numărul maxim de caiete pe care îl poate cumpăra cu 35 de lei astfel încât să cheltuie toți banii? Indicați câte caiete de fiecare tip va cumpăra Sergiu în acest caz.

13 Suma a două numere naturale m și n este 183, iar suma răsturnatelor lor este 705.
a Este posibil ca m și n să aibă același număr de cifre? Argumentați răspunsul!
b Determinați numerele m și n.

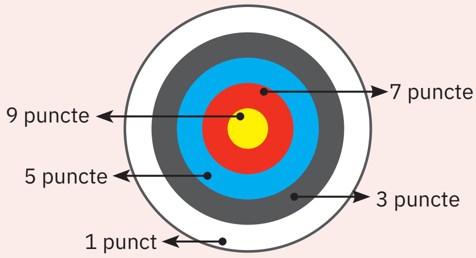
14 Pe tablă sunt scrise numerele de la 1 la 25. Radu alege la întâmplare fie două, fie trei numere de pe tablă, le șterge și scrie în loc suma numerelor șterse. Repetând procedeul de câteva ori, pe tablă rămâne un singur număr. Care este acesta?

15 Suma a 40 de numere naturale este egală cu 779. Arătați că cel puțin două dintre aceste numere sunt egale.

Indicație. Calculați suma celor mai mici 40 de numere naturale distincte.

16 În tabăra medievală, Radu și Ioana trag la țintă cu arcul. Desemnați câștigătorul concursului, știind că punctajul final al fiecărui concurent se calculează însumând punctele de pe fiecare zonă.

Nr. săgeți / Concurent	Galben	Roșu	Albastru	Negru	Alb
Ioana	2	3	4	5	1
Radu	3	1	5	4	2



Portofoliu

Rezolvă problemele din cadrul rubricilor Portofoliu *întâlnite pe parcursul fiecărei unități de învățare și adaugă-le la portofoliul (dosarul) personal.*
Evaluarea, efectuată la final de unitate sau la final de semestru, va urmări cele două funcții ale portofoliului: ca suport al învățării, respectiv ca instrument pentru validarea achizițiilor.

1 Horia scrie pe tablă numărul 19 și îi propune Ioanei să taie cu creta numărul 19 și să scrie în locul lui două numere naturale nenule a căror sumă să fie 19. Apoi, Horia scrie fiecare număr ales de Ioana ca o sumă de două numere naturale nenule. Când jocul se oprește, ce numere sunt pe tablă?

2 Mă gândesc la un număr de două cifre. Adun la numărul meu cifra unităților, apoi cifra zecilor. Obțin numărul 79. Care este numărul la care m-am gândit?

3 Determinați numărul natural *n*, știind că poate fi scris doar în 7 moduri ca sumă de două numere naturale nenule, *a* și *b*, astfel încât *a* este mai mic decât *b*.

4 Identificați regula și determinați numărul care lipsește.

715	919	...	1 327

5 Horia spune un număr de două cifre. Dacă este mai mic decât 50, Ioana adună 3. Dacă este mai mare decât 50, Ioana adună 4. Apoi Horia face același lucru. Câștigă cel care obține primul un număr de 3 cifre. Dacă Horia începe jocul cu numărul 39, atunci cine câștigă jocul? Imaginează-ți și tu un astfel de joc între tine și colegul de bancă și descrie pașii dacă începi tu cu numărul 47. Cine câștigă?

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Dacă $\overline{ab} + \overline{a3} = 85$, atunci $\overline{ab} + \overline{ba}$ este egal cu:
A 45; **B** 66; **C** 84; **D** 130.

2 Dacă $A = 1 + 2 + 3 + ... + 11$ și $B = 12 + 13 + 14 + ... + 20$, atunci $A + B$ este:
A 210; **B** 276; **C** 400; **D** 420.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Pe o tablă sunt scrise numerele 7, 4 și 11. Orice elev poate scrie pe tablă suma a două numere aflate pe tablă.
a Este posibil ca pe tablă să apară scris numărul 14?
b Prezintă o modalitate de calcul pentru ca pe tablă să fie scris numărul 63.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 4: Scăderea numerelor naturale

4.1. Noțiuni introductive

Situație problemă

În colecția sa, Horia are 27 de bancnote din diferite țări de pe glob. El dorește să completeze un clasor întreg, prevăzut cu 40 de spații pentru bancnote. Câte bancnote îi mai sunt necesare?

Analiză:
Pentru a rezolva problema, ar trebui să aflăm un număr care adunat cu 27 dă 40. Un astfel de număr există, deoarece 40 se află după 27 în șirul numerelor naturale sau, altfel spus, deoarece 40 este mai mare decât 27. Vom numi acest număr diferența numerelor 40 și 27.
Răspuns: $40 - 27 = 13$ bancnote îi sunt necesare lui Horia

De reținut

Fie a și b două numere naturale, cu $a \geq b$. Numărul natural d cu proprietatea că $a = b + d$ se numește *diferența* numerelor a și b.
Operația prin care din numerele naturale a și b se obține diferența lor, $a - b$, se numește *scădere*.

Se notează: $d = a - b$.
Numerele a și b se numesc *termenii* scăderii; a se numește *descăzut*, iar b se numește *scăzător*.
Scrierea $a - b$ se numește *diferența neefectuată*, iar d este *diferența efectuată*.

Exemplu

534	–	319	=	215	534 – 319	este *diferența neefectuată*
descăzut	minus	scăzător	egal	diferență	215	este *diferența efectuată*

Regulă

Pentru a scădea două numere naturale, se scad unitățile de același ordin și, dacă nu sunt suficiente unități la descăzut, se ia o unitate de ordin imediat superior și se transformă în zece unități de ordin imediat inferior.

Exemple

Exemplul 1:

$$\begin{array}{ccc} -1 & & \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ \hline 3 & 8 & 1 \end{array} \; -$$

unități: $4 - 3 = 1$
zeci: $5 + 10 - 7 = 8$
sute: $6 - 1 - 2 = 3$

Exemplul 2:

$$\begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & \\ 5 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ \hline 1 & 6 & 9 & 2 \end{array} \; -$$

unități: $1 + 10 - 9 = 2$
zeci: $6 - 1 + 10 - 6 = 9$
sute: $4 - 1 + 10 - 7 = 6$
mii: $5 - 1 - 3 = 1$

Știați că...

Scăderea, fiind operația inversă adunării, reprezintă o numărare succesivă, în sens descrescător. De exemplu, pentru a scădea din 9 pe 6, vom număra, în sens descrescător, 6 numere pornind de la 9:

... 10 9 → 8 → 7 → 6 → 5 → 4 → 3 2 1 0

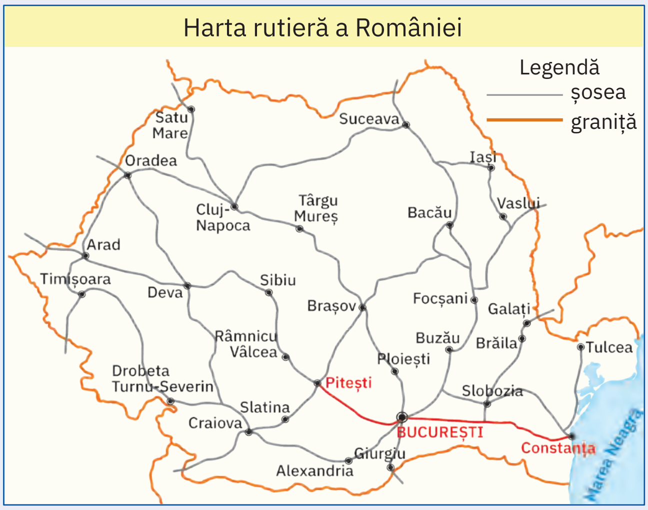
Privind scăderea astfel, constatăm de ce este necesar ca scăzătorul să fie cel mult egal cu descăzutul[1].

[1] În clasa a VI-a vom învăța cum putem scădea dintr-un număr natural a un număr natural $b > a$. Evident, rezultatul unei astfel de scăderi nu este număr natural. Pentru a putea efectua scăderea, este nevoie să *inventăm* noi numere, numite *numere întregi negative*, aflate pe axa numerelor la stânga lui 0, pe care să le putem număra descrescător.

Mate practică

1 Autostrada A1 București – Pitești are lungimea de 112 km, iar autostrada A2 București – Constanța are lungimea de 202 km. Ce distanță trebuie să parcurgă un automobilist care dorește să meargă de la Pitești la Constanța, pe autostrăzile A1 și A2?

Rezolvare: 112 km + 202 km = 314 km



2 Mergând pe autostrăzile A1 București – Pitești și A2 București – Constanța, de la Constanța la Pitești sunt 314 km. Știind că lungimea autostrăzii A2 București – Constanța este de 202 km, determinați ce lungime are autostrada A1.

Răspuns: 314 km – 202 km = 112 km

Scăderea este operația inversă adunării. În general, dacă $a + b = s$, atunci $\begin{cases} a = s - b \\ b = s - a \end{cases}$.

De reținut

Proba adunării se efectuează prin scădere, astfel:

- suma – un termen = celălalt termen.

Proba scăderii se efectuează fie printr-o altă scădere, fie printr-o adunare, astfel:

- descăzutul – diferența = scăzătorul (proba scăderii prin altă scădere);
- descăzutul = scăzătorul + diferența (proba scăderii prin adunare).

4.2. Legătura dintre operația de scădere și relațiile de egalitate/inegalitate

De reținut

1 Scăzând un număr natural din ambii membri ai unei egalități, egalitatea se păstrează:

- dacă $a = b$, atunci $a - c = b - c$, pentru orice număr natural $c \leq a$.

2 Scăzând un număr natural din ambii membri ai unei inegalități, inegalitatea se păstrează:

- dacă $a \leq b$, atunci $a - c \leq b - c$, pentru orice număr natural $c \leq a$.

3 Egalitatea se păstrează când se scad două egalități termen cu termen:

- dacă $a = b$, $c = d$ și $a \geq c$, atunci $a - c = b - d$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 La nașterea lui Radu, tatăl său avea 28 de ani. Determinați:

a Ce vârstă va avea Radu când tatăl său va avea 40 de ani?

b Câți ani va avea tatăl său atunci când Radu va împlini 18 ani?

Rezolvare: **a** 40 – 28 = 12, deci Radu va avea 12 de ani

b 18 + 28 = 46, deci tatăl său va avea 46 de ani

2 Determinați numărul cu 176 mai mic decât suma numerelor 98 și 99.

Rezolvare: Suma este 98 + 99 = 197, iar numărul căutat este 197 – 176 = 21.

3 Determinați diferența dintre cel mai mare și cel mai mic dintre numerele naturale care se scriu folosind câte patru cifre diferite.

Rezolvare: Cel mai mare număr care se scrie folosind patru cifre diferite este 9 876, iar cel mai mic este 1 023. Diferența lor este 9 876 – 1 023 = 8 853.

4 Horia și Radu au împreună 794 de lei. Radu și Clara au împreună 676 de lei. Cei trei au împreună 1 250 de lei. Determinați ce sumă are fiecare.

Rezolvare:
1 250 lei – 794 lei = 456 de lei are Clara (din suma tuturor am scăzut cât au Horia și Radu)
1 250 lei – 676 lei = 574 de lei are Horia (din suma tuturor am scăzut cât au Radu și Clara)
794 lei – 574 lei = 220 de lei are Radu (din suma lui Horia și Radu am scăzut cât are Horia)

Probleme propuse

1 Calculați:
a 2 537 – 1 322; **b** 6 795 – 3 063; **c** 3 172 – 2 183; **d** 2 105 – 1 537;
e 25 002 – 7 279; **f** 40 010 – 17 073; **g** 23 002 – 8 792; **h** 20 030 – 15 086.

2 Calculați diferența dintre:
a cel mai mare și cel mai mic număr de patru cifre identice;
b cel mai mare și cel mai mic număr de trei cifre diferite;
c cel mai mare număr de patru cifre diferite și cel mai mic număr de trei cifre identice;
d cel mai mic număr par de patru cifre identice și cel mai mare număr impar de trei cifre identice.

3 Determinați, în fiecare caz, termenul necunoscut, știind că:
a dacă îl adunăm pe x cu 577, obținem 867;
b adunând pe 529 cu un număr natural x, obținem 630;
c dacă îl adunăm pe x cu 1 286, se obține 5 875;
d suma dintre x și 44 561 este 894 552.

4 Determinați termenul necunoscut:
a $247 + x = 783$; **b** $x + 318 = 2\,467$; **c** $735 - x = 517$; **d** $x - 482 = 267$;
e $23\,536 - x = 10\,039$; **f** $873 - x = 243$; **g** $x - 215 = 772$; **h** $7\,815 - x + 737 = 3\,511$.

5 Calculați, ținând cont de folosirea parantezelor.
a (789 – 542) – 15;
b 1 299 – (234 – 199);
c 16 801 – [5 622 – (1 240 – 559)];
d 78 952 – (568 – 422) – (4 587 – 2 559).

6. Suma a două numere este 98, iar diferența lor este 82. Determinați cele două numere.

7 Un autocar parcurge 349 de kilometri în prima zi, cu 52 de kilometri mai puțin în a doua zi, iar în cea de-a treia zi, parcurge cu 276 de kilometri mai puțin decât în primele două zile la un loc. Ce lungime are traseul parcurs de autocar în cele trei zile la un loc?

8 Suma a trei numere naturale este 2 002. Dacă din fiecare se scade același număr, atunci se obțin numerele: 175, 318, 723. Care sunt numerele inițiale?

9 Se consideră numerele naturale x, y, z.
a Știind că $x + 2y = 24$ și $x + y = 19$, determinați y.
b Știind că $3x + 2y = 18$ și $2x + 2y = 14$, determinați x.
c Știind că $x + 2y + z = 17$ și $x + y = 10$, determinați $y + z$.

10 Se consideră numerele naturale a, b, c.
a Dacă $a - b = 215$ și $b - c = 132$, determinați $a - c$.
b Dacă $a - c = 138$ și $b - c = 129$, calculați $a - b$.
c Dacă $a - b = 72$ și $(a - c) - (b + c) = 18$, determinați numărul c.

11 Efectuați:
a 10 + 15 + 20 + ... + 2 010 – 9 – 13 – 17 – ... – 1 609;
b 10 + 20 + 30 + ... + 2 020 – 9 – 18 – 27 – ... – 1 818;
c 400 000 + 40 000 + 4 000 + 400 + 40 + 4 – 3 – 30 – 300 – 3 000 – 30 000 – 300 000.

12 Determinați câte numere de forma $\overline{abcd}$ verifică egalitatea următoare: $\overline{abcd} - \overline{b53} - 7\,000 = 2\,000$.

Investigație

Având în portofel suma de 250 de lei, Horia cumpără mai întâi o carte de 45 de lei, apoi un joc video de 125 de lei. Determinați suma de bani care i-a rămas lui Horia.

Rezolvare 1: 250 lei – 45 lei = 205 lei (mai avea după ce a cumpărat cartea)
205 lei – 125 lei = 80 lei (i-au rămas lui Horia)

Rezolvare 2: 45 lei + 125 lei = 170 lei (a cheltuit Horia pe cele două produse)
250 lei – 170 lei = 80 lei (i-au rămas lui Horia)

Ce observăm?

Cele două rezolvări de mai sus arată că are loc egalitatea: $250 - 45 - 125 = 250 - (45 + 125)$.

1 Analizând cele două moduri de rezolvare ale problemei, comentați și argumentați afirmația: *Dacă dintr-un număr natural* a *se scad succesiv mai multe numere naturale* b, c, d *etc., se obține același rezultat ca atunci când din* a *se scade suma numerelor respective.*
Lucrând pe echipe, compuneți o problemă asemănătoare și prezentați colegilor rezolvarea acesteia.

2 Analizați următoarele modalități de a efectua scăderea atunci când scăzătorul este o sumă sau o diferență de numere scrisă într-o paranteză. Arătați că egalitățile scrise în stânga sunt adevărate și verificați, prin exemple proprii, valabilitatea afirmațiilor scrise în dreapta.

a $97 - (31 + 25) = 97 - 31 - 25$ → dacă $a \geq b + c$, atunci $a - (b + c) = a - b - c$;
b $20 - (15 - 5) = 20 - 15 + 5$ → dacă $a \geq b \geq c$, atunci $a - (b - c) = a - b + c$.

Pentru evaluarea investigației, se va ține cont de:
1 originalitatea în compunerea problemei;
2 modul de aplicare a cunoștințelor;
3 modul de prezentare și argumentare;
4 calitatea prelucrării datelor obținute;
5 atitudinea colegilor pe parcursul prezentării.

Calcul mental

1 Mărind descăzutul și scăzătorul cu același număr natural, diferența se păstrează:
$a - b = (a + c) - (b + c)$, pentru orice numere naturale a, b, c, cu $a \geq b$.
Exemple: $67 - 39 = (67 + 1) - (39 + 1) = 68 - 40 = 28$
$854 - 256 = (854 + 4) - (256 + 4) = 858 - 260 = 598$

2 Micșorând descăzutul și scăzătorul cu același număr natural, diferența se păstrează:
$a - b = (a - c) - (b - c)$, pentru orice numere naturale a, b, c, cu $a \geq b \geq c$.
Exemple: $131 - 83 = (131 - 3) - (83 - 3) = 128 - 80 = 48$
$572 - 106 = (572 - 6) - (106 - 6) = 566 - 100 = 466$

Joc

Înlocuiți steluțele cu cifrele de la 0 la 9, folosind fiecare cifră o singură dată, astfel încât scăderea să fie corectă.

```
 * * * * –
   * * *
 -------
   * * *
```

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Dacă $A - B = C$, atunci:
A $A = B - C$; **B** $B + C = A$; **C** $C = B - A$; **D** $B = A + C$.

2 Dacă $A = 56 - (27 - 18)$ și $B = (56 - 27) - 18$, atunci:
A $A = B$; **B** $A < B$; **C** $A - B = 36$; **D** $A = 9$.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Un tată a avut 29 de ani la nașterea fiului său.
a Câți ani va avea fiul când tatăl său va avea 52 de ani?
b Calculează diferența dintre vârsta tatălui și vârsta fiului, după 7 ani de la nașterea fiului.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
Timp de lucru: **30 de minute**	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Lecția 5: Înmulțirea numerelor naturale, proprietăți

5.1. Noțiuni introductive

Situație problemă

Într-o cutie de bomboane de ciocolată se află 24 de bomboane.
Câte bomboane se găsesc în 6 cutii?
Răspuns: $\underbrace{24+24+24+24+24+24}_{6 \text{ termeni}}=144$ de bomboane.

Analiză:
În rezolvarea problemei propuse, am avut de efectuat o adunare cu 6 termeni, fiecare termen fiind egal cu 24. Cu alte cuvinte, l-am adunat pe 24 cu el însuși de 6 ori.

De reținut

Produsul numărului natural $a \geq 2$ cu numărul natural b este un număr natural p obținut prin adunarea lui b cu el însuși de a ori, sau, altfel spus, prin adunarea unui număr de a termeni, fiecare dintre aceștia egal cu b.
Operația prin care din numerele naturale a și b se obține produsul lor $a \cdot b$ se numește *înmulțire*.

$$p=a \cdot b=\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a \text{ termeni}}.$$

Numerele a și b se numesc *factorii* înmulțirii.
Scrierea $a \cdot b$ se numește *produs neefectuat*, iar p este *produsul efectuat* numerelor a și b.

Prin convenție, $1 \cdot a=a$ și $0 \cdot a=0$, pentru orice număr natural a.

Observăm că au loc relațiile: $a \cdot 0=\underbrace{0+0+\ldots+0}_{a \cdot 0 \text{ termeni}}=0$ și $a \cdot 1=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{a \cdot 1 \text{ termeni}}=a$.

Exemplu

5	·	14	=	70	5 · 14 este *produsul neefectuat*
factor	ori	factor	egal	produs	70 este *produsul efectuat*

Regulă

Pentru a înmulți două numere naturale, înmulțim fiecare cifră a primului factor cu al doilea factor, obținând produse parțiale a căror sumă este rezultatul înmulțirii.

$$\begin{array}{r} 267\,\cdot \\ 32 \\ \hline 534 \\ 801 \\ \hline 8544 \end{array}$$

$267 \cdot 2=534$ → produs parțial
$267 \cdot 3=801$ → produs parțial
$534+8\,010=8\,544$ → suma produselor parțiale

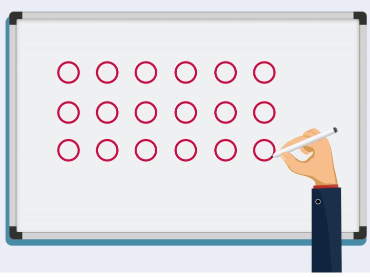
$$\begin{array}{r} 273\,\cdot \\ 649 \\ \hline 2457 \\ 1092 \\ 1638 \\ \hline 177177 \end{array}$$

5.2. Proprietățile înmulțirii

Pentru a pune în evidență diferitele reguli care se respectă atunci când efectuăm operația de înmulțire, reguli pe care le vom numi *proprietăți*, vom rezolva câteva probleme practice, urmând, de fiecare dată, câte două metode de rezolvare.

Mate practică

Profesorul de matematică cere elevilor să afle câte cercuri sunt desenate pe tabla din figura alăturată. În justificarea răspunsului, profesorul le cere să folosească operația de înmulțire.



Horia: *Fiind 3 rânduri, fiecare a câte 6 cercuri, pe tablă sunt* $3 \cdot 6=18$ *cercuri.*
Ioana: *Fiind 6 coloane, fiecare a câte 3 cercuri, în total sunt* $6 \cdot 3=18$ *cercuri.*

Ce observăm?
Am obținut același rezultat în două moduri: $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$.
Produsul a două numere naturale este același, indiferent de ordinea în care apar cei doi termeni.
Această proprietate a înmulțirii se numește *comutativitate*.
În general, $a \cdot b = b \cdot a$, pentru orice numere naturale a și b.

Mate practică

O miniatură a unei mașini de curse costă 10 lei. Un set cuprinde 4 mașinuțe. Ce sumă trebuie să cheltuim pentru a cumpăra 5 seturi?

Horia: *Mai întâi, aflăm câte mașinuțe sunt în 5 seturi:* $5 \cdot 4 = 20$ de mașinuțe.
Pentru a cumpăra 5 seturi, vom cheltui: $20 \cdot 10 = 200$ lei.

Ioana: *Mai întâi, aflăm cât costă un set:* $4 \cdot 10 = 40$ lei.
Pentru a cumpăra 5 seturi, vom cheltui: $5 \cdot 40 = 200$ lei.

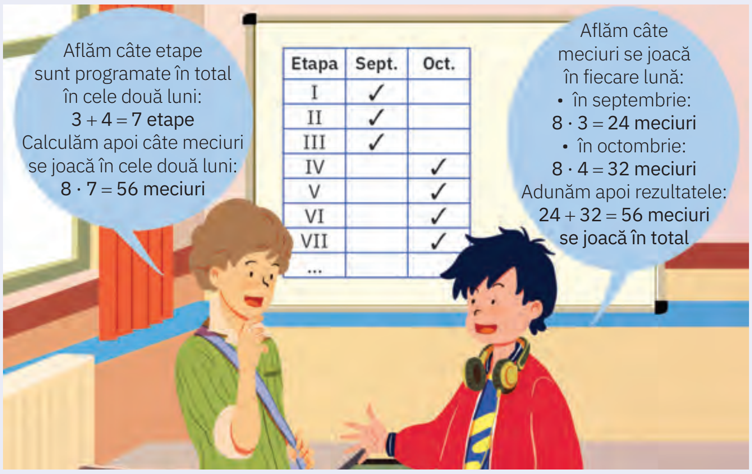
Ce observăm?
Am obținut același rezultat în două moduri:

$$(5 \cdot 4) \cdot 10 = 5 \cdot (4 \cdot 10).$$

Când înmulțim trei numere naturale, se obține același rezultat fie că produsul primelor două numere se înmulțește cu al treilea, fie că primul număr se înmulțește cu produsul ultimelor două. Această proprietate a înmulțirii se numește *asociativitate*.
În general, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pentru orice numere naturale a, b și c.

Mate practică

În fiecare etapă a campionatului național de handbal se joacă 8 meciuri.
În septembrie sunt programate 3 etape, iar în octombrie sunt programate 4 etape. Câte meciuri se joacă în campionat în septembrie și octombrie?



Ce observăm?
Horia și Radu au obținut același rezultat în două moduri:
$8 \cdot (3 + 4) = 8 \cdot 3 + 8 \cdot 4$.
Când înmulțim o sumă cu un număr, se obține același rezultat ca atunci când adunăm produsele dintre fiecare termen al sumei cu acel număr. Această proprietate se numește *distributivitatea înmulțirii față de adunare*.
În general, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, pentru orice numere naturale a, b și c.

De reținut

Proprietățile înmulțirii numerelor naturale

1 Înmulțirea numerelor naturale este comutativă:
$a \cdot b = b \cdot a$, pentru orice numere naturale a și b.

2 Înmulțirea numerelor naturale este asociativă:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pentru orice numere naturale a, b și c.

3 Numărul natural 1 este element neutru la înmulțirea numerelor naturale:
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, pentru orice număr natural a.

4 Înmulțirea numerelor naturale este distributivă față de adunare și față de scădere:
Pentru orice numere naturale a, b, c, avem:

a $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$;

b $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$, dacă $b \geq c$.

5 Dacă unul dintre factorii unui produs este 0, atunci produsul este 0:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \text{ pentru orice număr natural } a.$$

Observație:
Dacă un produs de două numere naturale este egal cu 0, atunci cel puțin unul dintre factori este egal cu 0:

$$\text{dacă } a \cdot b = 0, \text{ atunci } a = 0 \text{ sau } b = 0.$$

5.3. Legătura dintre operația de înmulțire și relațiile de egalitate/inegalitate

De reținut

1 Înmulțind ambii membri ai unei egalități cu un număr natural, egalitatea se păstrează:
- dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$, pentru orice număr natural c.

2 Înmulțind ambii membri ai unei inegalități cu un număr natural nenul, inegalitatea se păstrează:
- dacă $a < b$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$, pentru orice număr natural nenul c.

3 Înmulțind termen cu termen două egalități, egalitatea se păstrează:
- dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a \cdot c = b \cdot d$.

4 Înmulțind termen cu termen două inegalități de același sens, inegalitatea se păstrează:
- dacă $a < b$ și $c < d$, atunci $a \cdot c < b \cdot d$;
- dacă $a > b$ și $c > d$, atunci $a \cdot c > b \cdot d$;
- dacă $a \leq b$ și $c \leq d$, atunci $a \cdot c \leq b \cdot d$;
- dacă $a \geq b$ și $c \geq d$, atunci $a \cdot c \geq b \cdot d$.

Exemplu

Matei are 9 cartonașe galbene, pe care sunt scrise numerele de la 11 la 19 și 8 cartonașe roșii, pe care sunt scrise numerele de la 23 la 30 (pe fiecare cartonaș este scris un singur număr). Ioana amestecă toate cartonașele, apoi le așază pe bancă, cu numerele în jos, și trage un cartonaș galben și un cartonaș roșu. Care este cea mai mică valoare posibilă a produsului numerelor de pe cele două cartonașe? Dar cea mai mare valoare a dublului produsului acelorași numere?

Rezolvare:
Notând cu a numărul aflat pe cartonașul galben și cu b numărul scris pe cartonașul roșu extras, rezultă că $11 \leq a \leq 19$ și $23 \leq b \leq 30$.

Înmulțind membru cu membru inegalitățile $a \geq 11$ și $b \geq 23$ obținem $a \cdot b \geq 11 \cdot 23$, adică $a \cdot b \geq 253$. Așadar, cea mai mică valoare a produsului numerelor de pe cele două cartonașe este 253 și se obține când se extrage cartonașul galben pe care este scris numărul 11, respectiv cartonașul roșu pe care se află numărul 23.

În mod asemănător, înmulțind membru cu membru inegalitățile $a \leq 19$ și $b \leq 30$, obținem $a \cdot b \leq 19 \cdot 30$, iar de aici, înmulțind ambii membri cu 2, obținem $2 \cdot a \cdot b \leq 2 \cdot 19 \cdot 30$, adică $2 \cdot a \cdot b \leq 1\,140$. Cea mai mare valoare a dublului produsului numerelor de pe cele două cartonașe este 1 140 și se obține când se extrage cartonașul galben pe care este scris numărul 19, respectiv cartonașul roșu pe care se află numărul 30.

Investigație

Paritatea produsului. Ultima cifră a unui produs de numere

1 Dacă cel puțin un factor al unei înmulțiri este număr par, atunci și produsul este număr par.
Exemplu: Produsul $3 \cdot 4 \cdot 5$ este par, deoarece factorul 4 este par.
Produsul a două sau mai multe numere naturale impare este un număr impar.
Exemplu: Produsul $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 123$ este impar, deoarece toți factorii sunt impari.
Produsul a două numere naturale consecutive este un număr par.

2 Ultima cifră a unui produs este ultima cifră a produsului obținut prin înmulțirea ultimelor cifre ale fiecărui factor.
Exemplu: Ultima cifră a produsului $1\,234 \cdot 567$ este ultima cifră a produsului $4 \cdot 7$, adică 8.

Portofoliu

Produsul primelor n numere naturale nenule se notează $n!$ și se citește „n factorial”.
Prin convenție, $0! = 1$.

Exemple: $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 120$, $7! = 5\,040$
$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

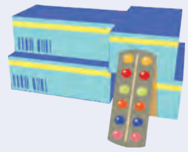
1 Fie n un număr natural nenul. Determinați ultima cifră a numărului $n!$ Discuție după valorile lui n.

2 Determinați ultima cifră a numărului $2\,022!$.

3 Determinați ultimele cinci cifre ale numărului $24! + 62\,378$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Într-un flacon de medicamente sunt 7 folii cu comprimate. Fiecare folie conține 12 comprimate. Flacoanele sunt ambalate câte 10 într-o cutie. Determinați numărul de comprimate existente în 15 cutii.



Rezolvare: Un flacon conține $7 \cdot 12 = 84$ de comprimate.
O cutie conține $84 \cdot 10 = 840$ de comprimate.
15 cutii conțin $840 \cdot 15 = 12\,600$ de comprimate.

2 Determinați numerele naturale x și y, știind că $(x + 2) \cdot (y + 1) = 15$.

Rezolvare:
Perechile de numere naturale cu produsul 15 sunt (1,15), (3,5), (5,3) și (15,1).
Deoarece $x + 2 > 1$, sunt posibile trei cazuri:
- dacă $x + 2 = 3$ și $y + 1 = 5$, atunci $x = 1$, $y = 4$;
- dacă $x + 2 = 5$ și $y + 1 = 3$, atunci $x = 3$, $y = 2$;
- dacă $x + 2 = 15$ și $y + 1 = 1$, atunci $x = 13$, $y = 0$.

3 Produsul a două numere naturale este 405. Mărind unul dintre termeni cu 5, produsul numerelor devine 450. Determinați cele două numere naturale.

Rezolvare:
Notând cele două numere cu a și b, condițiile din enunț se scriu $a \cdot b = 405$ și $(a + 5) \cdot b = 450$.
Întrucât $(a + 5) \cdot b = a \cdot b + 5 \cdot b = 405 + 5 \cdot b$, obținem $405 + 5 \cdot b = 450$, adică $b = 9$, de unde $a = 45$.

4 Într-un produs de două numere naturale, un factor este cuprins între 8 și 15, iar celălalt între 16 și 23. Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare posibilă a acestui produs.

Rezolvare:
Notăm cu a și b cei doi factori. Dacă numărul natural a este cuprins între 8 și 15, atunci $9 \le a \le 14$; la fel, dacă b este cuprins între 16 și 23, atunci $17 \le b \le 22$. Înmulțind termen cu termen cele două inegalități, obținem $9 \cdot 17 \le a \cdot b \le 14 \cdot 22$, adică $153 \le a \cdot b \le 308$.
Așadar, cea mai mică valoare posibilă a produsului este 153, iar cea mai mare valoare este 308.

Observație. Înmulțind termen cu termen inegalitățile $8 < a < 15$ și $16 < b < 23$, se obține relația $128 < a \cdot b < 345$. Am putea fi tentați să credem că cea mai mică valoare a produsului este 129, ceea ce nu este adevărat, întrucât, deși inegalitatea $128 < a \cdot b < 345$ este adevărată, produsul $a \cdot b$ nu poate fi egal cu 129 pentru nicio valoare a numerelor a și b care să respecte enunțul.

Probleme propuse

1 Calculați:
a $12 \cdot 35$; **b** $35 \cdot 25$; **c** $128 \cdot 45$; **d** $324 \cdot 15$; **e** $128 \cdot 204$; **f** $305 \cdot 207$.

2 Calculați:
a $11 \cdot 17 \cdot 19$; **b** $13 \cdot 25 \cdot 8$; **c** $40 \cdot 28 \cdot 17$; **d** $13 \cdot 14 \cdot 15$; **e** $37 \cdot 35 \cdot 12$; **f** $16 \cdot 26 \cdot 14$.

3 Folosind asociativitatea și comutativitatea înmulțirii, efectuați:
a $2 \cdot 37 \cdot 5$; **b** $2 \cdot 25 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 4$; **c** $250 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 579 \cdot 5$.

4 Efectuați:
a $104 \cdot 52 - 179$; **b** $49 \cdot 28 - 31 \cdot 14$; **c** $567 \cdot 3 + 45 \cdot 11$;
d $2\,107 - 11 \cdot 12 + 91 \cdot 13$; **e** $3\,021 - 113 \cdot 19 + 74 \cdot 86$; **f** $67 \cdot 34 - 24 \cdot 25 + 22 \cdot 11$.

5 Calculați, după modelul prezentat:

$$\mathbf{12 \cdot 99 = 12 \cdot (100 - 1) = 12 \cdot 100 - 12 \cdot 1 = 1\,200 - 12 = 1\,188}$$

a $35 \cdot 99$; **b** $27 \cdot 101$; **c** $15 \cdot 102$;
d $31 \cdot 98$; **e** $4 \cdot 999$; **f** $5 \cdot 1\,004$

6 **a** Știind că $x = 4$, determinați produsul $p = (x + 1) \cdot (2x + 11) \cdot (3x - 7)$.
b Știind că $y = 9$, determinați produsul $p = (y + 5) \cdot (2y - 4) \cdot (3y + 3)$.

7 Un biciclist parcurge un traseu în 4 zile astfel: în prima zi 19 kilometri, în a doua zi de 4 ori mai mulți kilometri decât în prima zi, în a treia zi se întoarce 11 kilometri, iar în ultima zi parcurge de 5 ori mai mulți kilometri decât a parcurs în a treia zi. Determinați lungimea traseului.

8 Într-un penar sunt 9 pixuri, 5 creioane, două radiere și o ascuțitoare. Penarul gol a costat 12 lei, un pix a costat 5 lei, un creion 3 lei, o radieră 2 lei și ascuțitoarea 7 lei. Determinați prețul penarului cu rechizitele achiziționate.

9 Unul dintre factorii unei înmulțiri de doi factori este cuprins între 9 și 17, iar celălalt factor între 11 și 22. Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare posibilă a acestui produs.

10 Determinați cea mai mare valoare posibilă a produsului a două numere naturale cu suma 9.

11 Determinați numerele naturale x și y, știind că $(x - 1) \cdot (y + 4) = 20$.

12 Produsul a două numere naturale este 414. Mărind unul dintre factori cu 10, produsul numerelor devine 644. Determinați cele două numere naturale.

13 Identificați o regulă de formare a următoarelor secvențe de numere şi completați secvențele cu câte trei termeni:
a 5; 15; 25; ...; ...; ... **b** 7; 14; 21; ...; ...; ... **c** 15; 30; 90; ...; ...; ...
d 122; 3 124; 5 306; ...; ...; ... **e** 122; 3 412; 4 520; ...; ...; ... **f** 3; 4; 12; 48; ...; ....; ...

14 Determinați în câte zerouri se termină produsul primelor 57 de numere naturale nenule.

15 Dacă produsul a două numere naturale a și b este 72, atunci care dintre următoarele afirmații este cu siguranță falsă:
a a și b pot fi numere naturale pare; **b** a și b sunt numere naturale impare;
c a și b pot avea parități diferite; **d** a și b pot fi numere naturale formate din două cifre.

16 Dacă a este un număr par și b este un număr impar, stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:
a $a \cdot b \cdot 23$ este un număr impar; **b** $a \cdot b \cdot 24$ este un număr par;
c $a \cdot b + 4b$ este un număr impar; **d** $a \cdot b \cdot 5$ are ultima cifră 5.

17 Folosiți paranteze pentru a obține enunțuri corecte:
a $13 + 2 \cdot 5 = 25 \cdot 3$; **b** $19 - 5 \cdot 3 - 2 = 6$; **c** $19 - 5 \cdot 3 - 2 = 14$.

18 Înlocuiți casetele cu unul dintre semnele +, – sau · pentru a obține enunțuri corecte:

a 15 ☐ 7 ☐ 2 = 1; **b** 128 ☐ 22 ☐ 4 ☐ 38 = 2; **c** 24 ☐ 5 ☐ 3 ☐ 2 = 7.

19 Determinați cifrele lipsă din următoarele înmulțiri:

a
$$\begin{array}{r} 472\,\cdot \\ **\\ \hline 1416 \\ 944 \\ \hline ***** \end{array}$$

b
$$\begin{array}{r} 362\,\cdot \\ **\\ \hline *** \\ 3**8 \\ \hline **3*4 \end{array}$$

c
$$\begin{array}{r} 45*6\,\cdot \\ *2*\\ \hline **144 \\ 9*7* \\ 13*08 \\ \hline 1*69*6* \end{array}$$

20 Determinați numerele naturale a și b, știind că suma lor este 431 și $2 \cdot a + 5 \cdot b = 1\,696$.

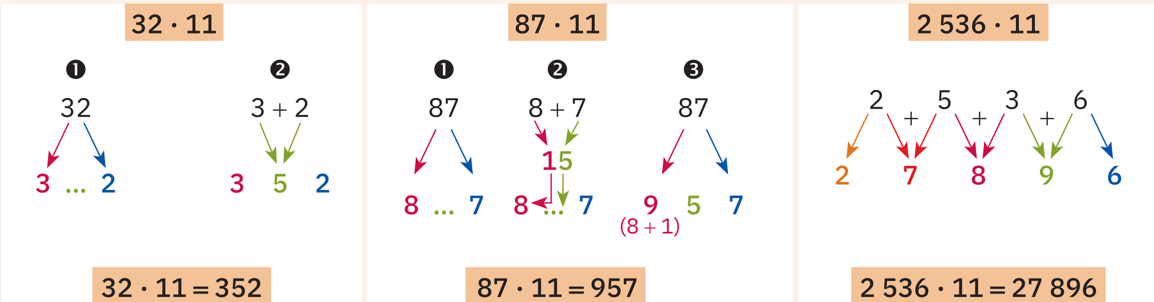
21 **a** Determinați numerele naturale de forma $\overline{2x34}$, știind că produsul cifrelor sale este 24.

b Determinați numerele naturale de forma $\overline{2xy4}$, știind că produsul cifrelor sale este 48.

22 **a** Arătați că ultima cifră a produsului a două numere naturale consecutive poate fi 0, 2 sau 6.

b Există numere naturale n astfel încât $n \cdot (n + 1) = 2\,017$? Justificați răspunsul.

Calcul mental



Calculați:

a 45 · 11; **b** 123 · 11; **c** 708 · 11; **d** 1 958 · 11; **e** 2 174 · 11.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Ultima cifră a produsului 32 · 34 · 37 este:

A 2; **B** 4; **C** 7; **D** 6.

2 Produsul a două numere naturale este 36. Mărind unul dintre termeni cu 5, produsul numerelor devine 81. Suma celor două numere este:

A 5; **B** 13; **C** 45; **D** 2 916.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Dina are 7 cutii. În fiecare dintre cele șapte cutii sunt 12 borcane, iar în fiecare borcan sunt 9 bile.

a Câte borcane sunt în 5 cutii?

b Determină numărul bilelor din cele 7 cutii.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 6: Factor comun

Situație problemă

Lotul de volei al școlii, format din 12 jucători, are nevoie de echipamente noi, compuse din șort și tricou. Un tricou costă 80 de lei, iar un șort 50 de lei. Câți bani sunt necesari pentru a cumpăra noile echipamente?

Horia: *Ideea mea este să calculăm cât costă tricourile, apoi cât costă șorturile, după care să adunăm rezultatele:*
$12 \cdot 80$ *lei* $= 960$ *de lei costă tricourile*
$12 \cdot 50$ *lei* $= 600$ *de lei costă șorturile*
960 *lei* $+ 600$ *lei* $= 1\,560$ *de lei costă noile echipamente*

Ioana: *Ar fi mai bine să aflăm mai întâi cât costă echipamentul pentru un jucător, după care să calculăm costul pentru toată echipa:*
80 *lei* $+ 50$ *lei* $= 130$ *de lei costă un set compus dintr-un șort și un tricou*
$12 \cdot 130$ *lei* $= 1\,560$ *de lei costă tot echipamentul*
Are loc egalitatea $12 \cdot 80 \text{ lei} + 12 \cdot 50 \text{ lei} = 12 \cdot (80 \text{ lei} + 50 \text{ lei})$.

Observații

Deși am obținut același rezultat, metoda Ioanei este mai rapidă și mai ușoară, deoarece necesită doar două operații, în timp ce Horia are nevoie de trei operații.
În lecția anterioară am învățat următoarele proprietăți:
- distributivitatea înmulțirii față de adunare: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
- distributivitatea înmulțirii față de scădere: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

De reținut

În suma de doi termeni $a \cdot b + a \cdot c$ numărul a este factor la fiecare produs, de aceea îl vom numi *factor comun*. Același lucru se observă și în cazul diferenței. Prin urmare, scriind egalitățile de mai sus sub forma: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ sau $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$, spunem că am scos pe a factor comun. Avantajul scoaterii factorului comun este că, în loc să efectuăm trei operații în membrul stâng (două înmulțiri și o adunare sau o scădere), efectuăm numai două operații în membrul drept (o adunare/scădere și o înmulțire).

Observații

1 Se poate scoate factor comun și în cazul unei sume/diferențe de mai multe produse:

$$m \cdot a + m \cdot b + m \cdot c - m \cdot d = m \cdot (a + b + c - d).$$

2 Pentru a scoate factor comun, putem înlocui numărul m cu produsul neefectuat $m \cdot 1$:
Exemple: $m \cdot a + m = m \cdot a + m \cdot 1 = m \cdot (a + 1)$;
$m \cdot a - m \cdot b - m = m \cdot a - m \cdot b - m \cdot 1 = m \cdot (a - b - 1)$.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Scrieți fiecare dintre următoarele numere ca produs de două numere naturale, apoi calculați:
a $A = 125 \cdot 14 + 125 \cdot 19 - 125 \cdot 25$;
b $B = 2\,017 \cdot 188 - 2\,017 \cdot 89 + 2\,017$;
c $C = 63 \cdot 78 - 63 \cdot 33 + 45 \cdot 39 - 45 \cdot 15$.

Rezolvare: **a** $A = 125 \cdot 14 + 125 \cdot 19 - 125 \cdot 25 = 125 \cdot (14 + 19 - 25) = 125 \cdot 8 = 1\,000$;
b $B = 2\,017 \cdot 188 - 2\,017 \cdot 89 + 2\,017 = 2\,017 \cdot (188 - 89 + 1) = 2\,017 \cdot 100 = 201\,700$;
c $C = 63 \cdot 78 - 63 \cdot 33 + 45 \cdot 39 - 45 \cdot 15 = 63 \cdot (78 - 33) + 45 \cdot (39 - 15) =$
$= 63 \cdot 45 + 45 \cdot 24 = 45 \cdot 63 + 45 \cdot 24 = 45 \cdot (63 + 24) = 45 \cdot 87 = 3\,915$.

2 Știind că $a = 7$, $b + c = 18$ și $c - d = 11$, calculați:
a $ab + 2ac - ad$; **b** $a + 2ab + 5ac - 3ad$.

Rezolvare: **a** $ab + 2ac - ad = a(b + 2c - d) = a(b + c + c - d) = 7 \cdot (18 + 11) = 7 \cdot 29 = 203$;
b $a + 2ab + 5ac - 3ad = a + 2ab + 2ac + 3ac - 3ad = a + 2a(b + c) + 3a(c - d) =$
$= 7 + 7 \cdot 2 \cdot 18 + 7 \cdot 3 \cdot 11 = 7 \cdot (1 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 11) = 7 \cdot 70 = 490$.

Probleme propuse

1 Efectuați, utilizând factorul comun:
a $3 \cdot 45 + 3 \cdot 15$; **b** $20 \cdot 48 + 20 \cdot 2$; **c** $28 \cdot 521 - 28 \cdot 21$;
d $23 \cdot 718 - 162 \cdot 23$; **e** $15 \cdot 38 + 15 \cdot 162$; **f** $702 \cdot 65 + 35 \cdot 702$;
g $2\,413 \cdot 1\,001 - 2\,413$; **h** $2\,029 \cdot 599 + 2\,029$; **i** $1\,289 \cdot 337 + 1\,289 \cdot 663$.

2 Efectuați, utilizând factorul comun:
a $12 \cdot 13 + 12 \cdot 15 + 12 \cdot 72$; **b** $125 \cdot 234 - 125 \cdot 28 + 125 \cdot 194$;
c $702 \cdot 256 - 702 \cdot 55 + 702 \cdot 799$; **d** $1\,000 \cdot 372 + 259 \cdot 1\,000 - 153 \cdot 1\,000$.

3 Dacă $x = 5$ și $a + b = 13$, calculați:
a $3 \cdot x + 7 \cdot a + 7 \cdot b$; **b** $x \cdot a + x \cdot b - 50$;
c $10 \cdot x + (4 \cdot a + 4 \cdot b)$; **d** $(4 \cdot a + 4 \cdot b - 2 \cdot x) \cdot (2 \cdot a + 2 \cdot b + x)$.

4 Calculați:
a $ab + ac$, știind că $b + c = 50$ și $a = 2$; **b** $xy + xz + 15$, știind că $x = 9$ și $y + z = 11$;
c $ab - ac$, știind că $a = 7$ și $b - c = 100$; **d** $5xy + 5xz + 21$, știind că $x = 4$ și $y + z = 100$.

5 Determinați numărul x, știind că $a - b = 6$ și:
a $x + 3 \cdot a - 3 \cdot b = 20$; **b** $x \cdot a - x \cdot b + 9a - 9b = 654$;
c $7 \cdot a - 7 \cdot b + x = 55$; **d** $13 + x - (5 \cdot a - 5 \cdot b) = 2\,011$.

6 Dați factor comun, apoi calculați:
a $10 + 20 + 30 + \ldots + 800$; **b** $13 + 26 + 39 + \ldots + 715$;
c $21 + 42 + 63 + \ldots + 1\,890$; **d** $101 + 202 + 303 + \ldots + 909 + 1\,010 + \ldots + 9\,898 + 9\,999$.

Indicație: **a** $10 + 20 + \ldots + 800 = 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + \ldots + 10 \cdot 80 = 10 \cdot (1 + 2 + \ldots + 80) = 10 \cdot 80 \cdot 81 : 2 = 32\,400$.

7 Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ab21} + \overline{7ab} - \overline{3ab5} = 3\,904$.

Joc

Elevii unei clase joacă *Identifică greșeala*. Fiecare elev primește un cartonaș pe care sunt scrise relațiile de mai jos:
1. $43 \cdot 5 + 43 \cdot 4 + 43 = 43 \cdot (5 + 4) = 43 \cdot 9 = 387$
2. $28 \cdot 7 + 28 \cdot 12 - 19 \cdot 18 = 28 \cdot (7 + 12 - 19) = 0$
3. $121 \cdot 9 - 121 + 121 \cdot 2 = 121 \cdot (9 + 2) = 121 \cdot 11 = 1\,331$

Câștigă concursul elevul care identifică primul greșelile din fiecare relație și efectuează corect cele trei calcule.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Dacă $a + b = 20$ și $b + c = 30$, atunci $3a + 7b + 4c$ este:
A 50; **B** 90; **C** 110; **D** 180.

2 La care dintre următoarele calcule nu este utilizat corect factorul comun?
A $8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 - 8 = 4 \cdot (10 + 12 - 2)$; **B** $8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 - 8 = 8 \cdot (5 + 6 - 1)$;
C $8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 - 8 = 8 \cdot (5 + 6)$; **D** $8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 - 8 = 2 \cdot (20 + 24 - 4)$.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Se consideră numerele naturale a, b, c, astfel încât $9a + 9b + 9c = 72$.
a Determină suma numerelor a, b, c.
b Dacă $4a + 4b = 12$ și $5a + 5c = 35$, atunci determină numerele naturale a, b, c.

Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Scrierea și citirea numerelor naturale • Compararea și ordonarea numerelor naturale • Adunarea și scăderea numerelor naturale • Înmulțirea numerelor naturale • Factor comun

1 Scrierea în baza 10 a numărului două sute patru mii cinci sute opt este:
a 240 508 **b** 204 580
c 200 458 **d** 204 508

2 Aproximarea numărului 4 567, prin adaos, la sute este:
a 4 600 **b** 4 000
c 4 500 **d** 5 000

3 Rezultatul calculului 47 596 + 219 847 este egal cu:
a 256 333 **b** 267 443
c 695 807 **d** 684 707

4 Rezultatul calculului 7 456 – 567 este egal cu:
a 8 023 **b** 1 786
c 6 889 **d** 7 913

5 Suma numerelor de forma $\overline{a4b}$ cu produsul cifrelor 24 este egală cu:
a 787 **b** 1 372
c 585 **d** 1 030

6 Știind că $a \cdot b + a \cdot c = 100$ și $b + c = 20$, atunci a este egal cu:
a 4 **b** 200
c 5 **d** 80

7 Care dintre următoarele două numere au suma egală cu 72?
a 20 și 52 **b** 34 și 43
c 7 și 2 **d** 45 și 29

8 Care dintre următoarele două numere au produsul cu ultima cifră 4:
a 32 și 16 **b** 44 și 54
c 86 și 94 **d** 47 și 48

9 Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (**A**) și care este fals (**F**):

$1\ 234 < 1\ 229$
Ultima cifră a produsului $69 \cdot 58$ este 2
Dacă $\overline{abc} = 3 \cdot 100 + 9$, atunci $a + b + c = 12$

10 Asociați fiecărei expresii din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**.

A	B
$5 \cdot 23 - 5 \cdot 3$	**a** 2 700
$27 + 27 \cdot 99$	**b** 400
$35 \cdot 12 - 35 \cdot 2$	**c** 100
	d 350

11 Tabelul alăturat prezintă oferta unei librării pentru câteva produse.

Calculați cât costă un set de rechizite format din: 4 radiere, 7 pixuri și 3 capsatoare.

Produs	**Preț**
Radieră	2 lei
Pix	15 lei
Agendă	18 lei
Capsator	44 lei

12 Determinați numerele A, B, C și D din tabelul de mai jos.

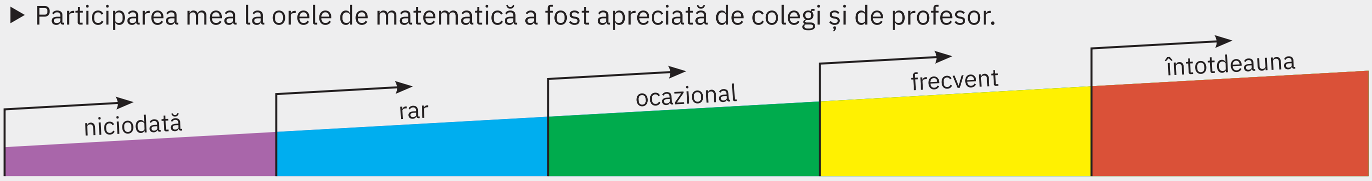
$5x + 3y = 27$	$A = 100 + 10x + 6y$
$4 + 2x + 7y = 15$	$B = 20 + 10x + 35y$
$x + 5y = 23$	$C = 3x + 15y - 42$
$3x - 2y - 4 = 18$	$D = 12x - 8y$

13 Determinați numărul natural de forma $\overline{ab}$, știind că $\overline{1a5b} + \overline{a3b7} = 3\ 590$.

14 Se consideră numărul $A = 1234567 \ldots 9899100$. Determinați numărul cifrelor numărului A.

Fișa de observare sistematică

▶ Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
▶ Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



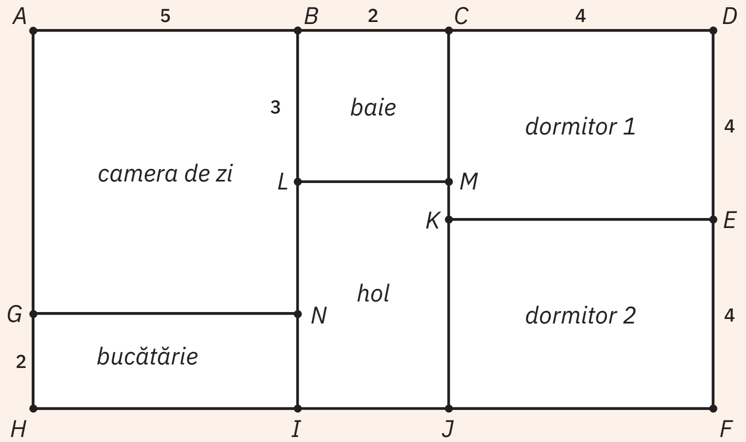
Răspundeți la cerințele de mai jos, știind că toată grădina de flori are forma unui dreptunghi cu lungimea de 70 m și lățimea de 25 m.

a Determinați aria și perimetrul grădinii.

b Știind că aria fiecărui rond este cuprinsă între 314 m^2 și 315 m^2, calculați între ce limite este cuprinsă aria suprafeței gazonului.

Activitate pe grupe

În figura de mai jos, Horia a realizat schematic planul casei sale. Utilizând dimensiunile din schemă, exprimate în metri, calculați:



a Aria suprafeței celor două dormitoare.

b Aria suprafeței holului.

c Comparați aria suprafeței celor două dormitoare cu aria suprafeței camerei de zi.

d Realizați schematic planul casei, apoi răspundeți la cerințele **a**, **b** și **c** ținând cont de noile dimensiuni.

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Un dreptunghi are lungimea de 4,3 dm și lățimea de 3,4 dm. Aria acestuia este egală cu:

A 1,462 dm^2; **B** 14,62 dm^2; **C** 146,2 dm^2; **D** 1 462 dm^2.

2 Numărul plăcilor de gresie, având formă de pătrat cu latura de 20 cm, necesare pentru a placa podeaua unei băi în formă de pătrat cu latura de 3 m, este egal cu:

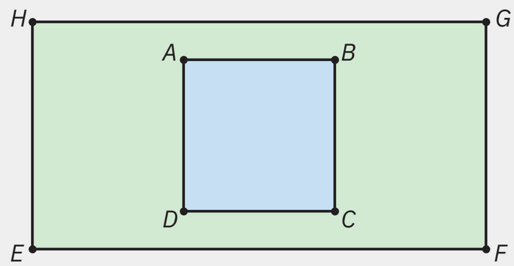
A 15; **B** 25; **C** 125; **D** 225.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 În figura alăturată este reprezentat schematic un parc *EFGH* în formă de dreptunghi, care are în centru un lac în formă de pătrat *ABCD*. De jur împrejurul lacului, parcul este acoperit cu gazon. Dacă $AB = 10$ m, $EF = 50$ m și $FG = 30$ m, atunci calculează:

a perimetrul parcului;

b aria suprafeței acoperite cu gazon.



Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Timp de lucru: 30 de minute

Lecția 11: Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic

11.1. Unități de măsură pentru volum

Situație problemă

Clara a pregătit pentru întâlnirea cu prietenele un aranjament din cuburi de zahăr ca în imaginea alăturată.
Dacă știm că fiecare cub are muchia de 1 cm, ce dimensiuni ar trebui să aibă cutia în care ar trebui puse?

Rezolvare:
Din imagine, observăm că aranjamentul are forma unui paralelipiped cu $L = 4$ cuburi, $l = 4$ cuburi și $h = 5$ cuburi. Dacă muchia unui cub este de 1 cm, atunci dimensiunile cutiei ar trebui să fie: $l = L = 4$ cm, iar $h = 5$ cm.

Ce observăm?
Având în vedere că un cub are muchia de 1 cm, spunem că volumul său este egal cu $1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3$ (citim *un centimetru cub*).

Metrul cub

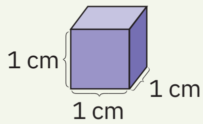
De reținut

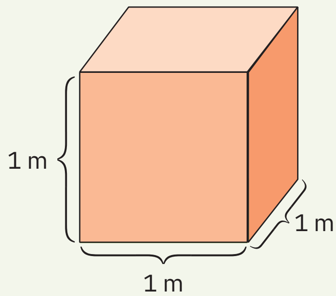
Orice corp ocupă un loc în spațiu numit *volum*.

Unitatea principală de măsură pentru volumul corpurilor este metrul cub, notat m^3.

1 m^3 reprezintă volumul unui cub cu muchia de 1 m.

Exemple
1 Cubul mov are muchiile egale cu 1 cm.
El are volumul 1 cm^3.
2 Cubul portocaliu are muchiile de 1 m.
El are volumul 1 m^3.





Multiplii și submultiplii metrului cub

De reținut

Multiplii metrului cub	Submultiplii metrului cub
• decametrul cub (notat dam^3);	• decimetrul cub (notat dm^3);
• hectometrul cub (notat hm^3);	• centimetrul cub (notat cm^3);
• kilometrul cub (notat km^3);	• milimetrul cub (notat mm^3).

Observație. Fiecare unitate de măsură reprezintă volumul unui cub cu muchia de 1 dam, 1 hm, 1 km, respectiv 1 dm, 1 cm, 1 mm.

11.2. Transformarea unităților de măsură

De reținut

Pentru a transforma o unitate de măsură în alta folosim următoarea schemă:

km^3 — hm^3 — dam^3 — m^3 — dm^3 — cm^3 — mm^3

- Unitățile de măsură mari se transformă în unități mici prin înmulțire cu $(10^3)^n$.
- Unitățile de măsură mici se transformă în unități mari prin împărțire cu $(10^3)^n$, unde n este numărul segmentelor de dreaptă dintre cele două unități.

Exemple

1 $2{,}5\ dam^3 = 2{,}5 \cdot 10^3\ m^3 = 2\,500\ m^3$;

2 $0{,}8\ hm^3 = 0{,}8 \cdot (10^3)^2\ m^3 = 800\,000\ m^3$;

3 $0{,}6\ km^3 = 0{,}6 \cdot (10^3)^3\ m^3 = 600\,000\,000\ m^3$;

4 $4\ mm^3 = [4 : (10^3)^2]\ dm^3 = 0{,}000004\ dm^3$;

5 $85\ m^3 = (85 : 10^3)\ dam^3 = 0{,}085\ dam^3$;

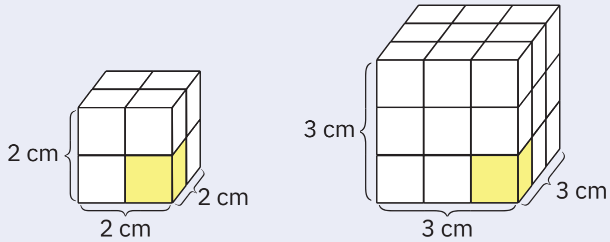
6 $1{,}6\ dm^3 = (1{,}6 : 10^3)\ m^3 = 0{,}0016\ m^3$.

11.3. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic

Situație problemă

Să numărăm din câte cuburi unitate de 1 cm^3 sunt formate cele două cuburi.

Ne punem întrebarea: ce legătură există între lungimea muchiei cubului și numărul cuburilor unitate din care este format cubul?



Primul cub este format din 8 cuburi unitate de 1 cm^3 și observăm că $2\ cm \cdot 2\ cm \cdot 2\ cm = 8\ cm^3$.
Al doilea este format din 27 de cuburi unitate de 1 cm^3 și observăm că $3\ cm \cdot 3\ cm \cdot 3\ cm = 27\ cm^3$.

De reținut
Deducem formula de calcul pentru volumul cubului: $V = l^3$, unde l este lungimea muchiei cubului.
Volumul unui corp este numărul care ne arată de câte ori se cuprinde o unitate de măsură în acel corp.

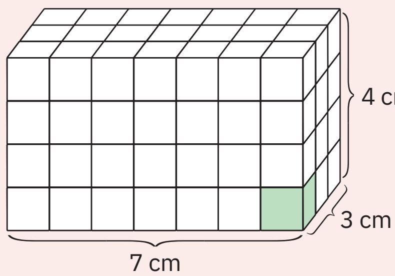
Exemplu

Paralelipipedul dreptunghic alăturat este format din 84 de cuburi unitate de 1 cm^3.

Corpul are lungimea $L = 7$ cm, lățimea $l = 3$ cm și înălțimea $h = 4$ cm.

Observăm că $7\ cm \cdot 3\ cm \cdot 4\ cm = 84\ cm^3$, adică exact numărul de cuburi unitate din care este format corpul.

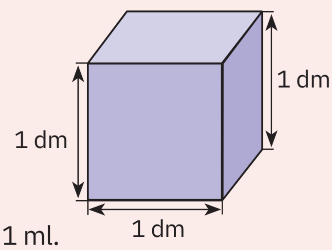
Volumul paralelipipedului dreptunghic: $V = L \cdot l \cdot h$.



11.4. Relația dintre volum și capacitate

Aplicație practică

Turnați un litru de apă într-un vas cubic cu lungimea muchiei de 1 dm.
Ce observați?
Răspuns:
Vasul este plin.



De reținut
Un vas cu volumul egal cu 1 dm^3 are capacitatea de un litru: 1 dm^3 = 1 l.
Un vas cu volumul egal cu 1 cm^3 are capacitatea de un mililitru: 1 cm^3 = 1 ml.

Probleme rezolvate: strategii și metode

1 Într-o cutie cubică cu latura de 10 cm încap 2 portocale.
  a Câte portocale încap într-o cutie cubică cu muchia de 20 cm?
  b Dar într-o cutie imaginară cu latura de 100 m?

Rezolvare:
  a Volumul cutiei cu latura de 10 cm este egal cu $(10\ cm)^3 = 1\,000\ cm^3 = 1\ dm^3$.
  Volumul cutiei cu latura de 20 cm este egal cu $(20\ cm)^3 = 8\,000\ cm^3 = 8\ dm^3$.

1 dm³ .... 2 portocale
8 dm³ .... 2 portocale · 8 = 16 portocale.

b Volumul cutiei cu latura de 100 m este egal cu $(100 \text{ m})^3 = 1\,000\,000 \text{ m}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ dm}^3$.
1 dm³ .... 2 portocale
1 000 000 000 dm³ .... 2 portocale · 1 000 000 000 = 2 000 000 000 portocale.

2 Un acvariu are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 75 cm, lățimea de 40 cm și înălțimea de 6 dm.

a Determinați volumul acvariului.
b La ce înălțime se ridică apa, dacă în acvariu se toarnă 120 de litri?

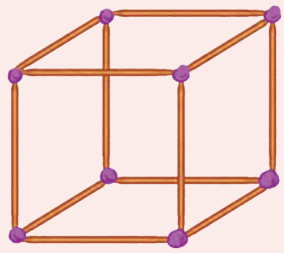
Rezolvare:

a Mai întâi trebuie să efectuăm transformări pentru ca cele trei dimensiuni să aibă aceeași unitate de măsură.
$L = 75 \text{ cm} = 7{,}5 \text{ dm}$, iar $l = 40 \text{ cm} = 4 \text{ dm}$ și atunci $V = L \cdot l \cdot h = 7{,}5 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm} \cdot 6 \text{ dm} = 180 \text{ dm}^3$.

b Ținând cont că $1\ \ell = 1 \text{ dm}^3$, cei 120 de litri de apă ocupă un volum egal cu 120 dm^3.
Fie $î$ înălțimea la care se ridică apa. Atunci volumul apei este egal cu $V = 7{,}5 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm} \cdot î \text{ dm}$.
Din $7{,}5 \text{ dm} \cdot 4 \text{ dm} \cdot î \text{ dm} = 120 \text{ dm}^3$, obținem $î = 4$ dm.

Probleme propuse

1 Folosind bețe de chibrit și plastilină, construiți acasă un cub asemănător cu cel din figura alăturată și completați pentru a obține propoziții adevărate. Cubul are:
a ... vârfuri; **b** ... fețe; **c** ... muchii. **d** Fețele cubului sunt ... .



2 Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:
a $78{,}9 \text{ dam}^3 = 0{,}789 \text{ hm}^3$; **b** $2\,500 \text{ cm}^3 = 25 \text{ dm}^3$;
c $867 \text{ mm}^3 = 0{,}867 \text{cm}^3$; **d** $0{,}4 \text{ m}^3 = 400 \text{ dm}^3$.

3 Transformați în decimetri cubi:
a $6{,}25 \text{ m}^3$; **b** $0{,}006 \text{ dam}^3$; **c** $0{,}0000005 \text{ hm}^3$;
d $3\,000 \text{ cm}^3$; **e** $4\,000\,000 \text{ mm}^3$; **f** $47{,}5 \text{ cm}^3$.

4 Determinați termenul necunoscut:
a $2{,}8 \text{ dam}^3 + 800 \text{ dm}^3 =? \text{ m}^3$; **b** $87 \text{ cm}^3 + 103 \text{ mm}^3 - 0{,}02 \text{ dm}^3 =? \text{ cm}^3$;
c $654 \text{ hm}^3 - 35\,000 \text{ m}^3 =? \text{ dam}^3$; **d** $0{,}82 \text{ km}^3 + 170 \text{ dam}^3 - 4\,000 \text{ m}^3 =? \text{ hm}^3$.

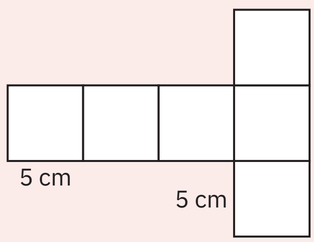
5 Indicați unitățile de măsură adecvate pentru a măsura:
a volumul sălii de clasă; **b** volumul unei cutii de chibrituri;
c volumul unui bloc; **d** capacitatea unui bazin de înot.

6 Lungimea muchiei unui cub este egală cu p metri, unde p este un număr natural, par, care are exact doi divizori. Determinați volumul cubului.

7 Volumul unui cub este egal cu $\overline{2a}$ dm³. Determinați lungimea muchiei cubului.

8 În București, în anul 2017, tariful pentru consumul unui m³ de apă/canal a fost de 1,15 euro. Câți lei a plătit o familie, știind că a consumat 25 m³ de apă/canal și că 1 euro era egal cu 4,56 lei?

9 Suma lungimilor muchiilor unui cub este egală cu 180 cm.
a Determinați perimetrul și aria unei fețe.
b Calculați volumul cubului.

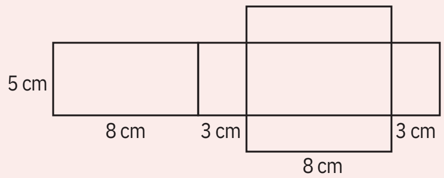


10 În figura alăturată avem desfășurarea plană a fețelor unui cub.
a Determinați aria desfășurării.
b Calculați perimetrul desfășurării.

11 Copiați tabelul de mai jos în caiete, calculați și completați:

Lungimea muchiei cubului	2,5 m		24 cm	
Volumul cubului		8 000 dm^3		216 hm^3

12 În figura alăturată este reprezentată desfășurarea plană a fețelor unui paralelipiped dreptunghic.
a Determinați aria desfășurării.
b Calculați perimetrul desfășurării.



13 Un bazin de înot are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 0,60 hm, lățimea de 400 dm și înălțimea de 0,25 dam. Câți litri de apă încap în bazin?

14 Dimensiunile unei cărămizi sunt: 240 mm, 125 mm și 140 mm.
Într-un metru cub de zidărie intră 210 cărămizi și mortar.
Care este volumul mortarului?

15 Un teren de fotbal de formă dreptunghiulară, cu lungimea de 100 m și lățimea de 70 m, trebuie curățat de zăpadă. Câte tone de zăpadă trebuie să fie transportate de pe teren, știind că grosimea stratului de zăpadă este egală cu 25 cm, iar 1 m^3 de zăpadă cântărește 60 kg?

16 Bunicii lui Horia colectează apă de ploaie într-un butoi fără capac, pentru udatul legumelor. Butoiul are forma unui cub cu lungimea muchiei de 1 m. După 10 zile consecutive de ploaie, s-au acumulat, în medie, câte 72,9 litri de apă pe metrul pătrat, după fiecare zi. La ce înălțime se ridică apa?

17 Într-un acvariu de forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea egală cu 80 cm, lățimea de 50 cm și înălțimea de 6 dm, apa se ridică la $\frac{5}{6}$ din înălțimea acvariului. Din acvariu se scot 80 litri de apă.
a Determinați volumul acvariului.
b Cu câți centimetri a scăzut nivelul apei?

Știați că... ?

Cubul lui Rubik este un *joc-problemă* inventat în anul 1974 de către sculptorul și profesorul de arhitectură maghiar Ernő Rubik.
Pentru majoritatea dintre voi, acesta este o adevărată provocare. Accesează *internetul* pentru a afla câteva secrete privind aranjarea pătrățelelor, astfel încât să se formeze fețe în care toate cele 9 pătrate au aceeași culoare!

AUTO evaluare

La problemele 1 și 2, încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Un singur răspuns este corect.

1 Transformând 150,6 m^3 în decimetri cubi, obținem:
A 0,1506 dm^3; **B** 15,06 dm^3; **C** 1 506 dm^3; **D** 150 600 dm^3.

2 Un vas are forma unui cub cu suma lungimilor muchiilor egală cu 108 dm. Capacitatea vasului, exprimată în decalitri, este egală cu:
A 0,729; **B** 7,29; **C** 72,9; **D** 729.

La problema 3, scrie rezolvările complete.

3 Un container are interiorul de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 10 m, 6 m și 5 m. În interior sunt cărămizi cu dimensiunile de 250 mm, 120 mm și 100 mm.
a Află volumul acestui container.
b Câte cărămizi sunt în container, știind că acesta este plin?

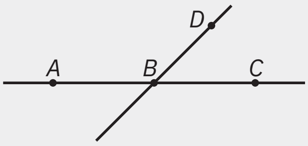
Grila de evaluare:	*Subiectul 1*	*Subiectul 2*	*Subiectul 3*		*Oficiu*	*Total*
Timp de lucru: 30 de minute	2p	2p	**a** 2p	**b** 3p	1p	10p

Elemente de geometrie și unități de măsură

1 A și B sunt două puncte distincte. Numărul dreptelor care conțin cele două puncte este egal cu:
a 2 **b** 1
c 3 **d** nu se poate determina

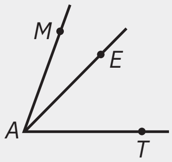
2 Dintre un pătrat, un cerc, un dreptunghi și un unghi, două axe de simetrie are:
a dreptunghiul **b** cercul
c unghiul **d** pătratul

3 Dintre propozițiile ce urmează, falsă este:



a Punctele A, B, și D sunt coliniare.
b Semidreptele AC și CA coincid.
c Segmentele AC și CA coincid.
d Dreptele AC și BD sunt concurente.

4 Dintre propozițiile ce urmează, adevărată este:



a Punctul E se află în exteriorul unghiului EAT.
b Vârful unghiului MAT este M.
c Laturile unghiului MAT sunt AM și AT.
d Unghiul MAE este obtuz.

5. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (**A**) și care este fals (**F**):

12,7 hm = 1,27 km
0,98 dam^3 = 980 m^3
5 ha = 5 000 m^2
Aria unui pătrat cu latura de 26 m este egală cu 6,76 ari

6. Asociați fiecărui calcul din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**:

A	B
$60° - 24°$	**a** 22°24'
	b 60°
$58° - 35°36'$	
	c 59°20'
$8°10' \cdot 5 + 19°10'$	**d** 36°

7 Un pătrat are aria egală cu 576 m^2, iar alt pătrat are aria de 4 ori mai mică. Atunci lungimea laturii celui de-al doilea pătrat este egală cu:
a 12 m **b** 144 m **c** 16 m **d** 13 m

8 Lungimea unui dreptunghi este de 2,5 ori mai mare ca lățimea, iar aria dreptunghiului este egală cu 90 m^2. Lungimea și lățimea acestuia sunt egale cu:
a 10 m și 9 m **b** 15 m și 6 m
c 18 m și 5 m **d** 30 m și 3 m

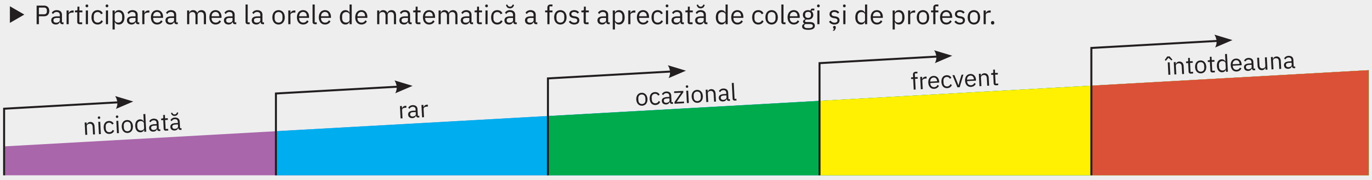
9 Pe o dreaptă g considerați punctele D, R, P și T, coliniare, în această ordine, astfel încât $DR = PT = 3$ cm, iar $RP = 4$ cm.
a Ce lungime are segmentul DT?
b Fie E mijlocul segmentului RP. Arătați că D și T sunt simetrice față de E.

10 Unghiul COD are măsura egală cu 110°, iar L este un punct exterior acestuia, astfel încât măsura unghiului DOL este egală cu 0,(63) din măsura unghiului COD. Fie T un punct interior unghiului COD, astfel încât măsura unghiului TOD reprezintă $\frac{4}{7}$ din măsura unghiului COT. Arătați că:
a punctele C, O, L sunt coliniare;
b unghiurile COT și DOL sunt congruente.

11 Un acvariu are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea egală cu 0,8 m, lățimea de 5 dm și înălțimea de 60 cm.
a Determinați volumul acvariului.
b La ce înălțimea se ridică apa, dacă în acvariu se toarnă 200 de litri?

Fișa de observare sistematică

- Am fost preocupat să aflu lucruri noi despre metodele de rezolvare a problemelor.
- Participarea mea la orele de matematică a fost apreciată de colegi și de profesor.



Soluții

Unitatea 1. Operații cu numere naturale

Lecția 1. Scrierea și citirea numerelor naturale

1 a opt sute patruzeci și trei de mii douăzeci și șapte; **b** cinci sute de mii doi; **c** cinci mii șaptesprezece; **d** unsprezece mii o sută unsprezece; **e** douăzeci și unu de mii cinci; **f** patru sute trei mii șaizeci și șapte; **g** o sută douăzeci de mii patru; **h** douăzeci de milioane trei sute cinci mii douăzeci și trei. **3 a** 27; **b** 358 000; **c** 5 008; **d** 9 705; **e** 2 837 002; **f** 7 003 605. **4 a** 12 numere; **b** 3 numere; **c** 6 numere. **5 a** $\overline{abc} = 379$; **b** $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$; **c** $a = 5$, $b = 3$, $c = 7$, $d = 4$. **6 a** 852 cifre; **b** 240 pagini. **8 a** 28, 34, 40; **b** 43, 54, 65; **c** 54, 162, 486; **d** 41, 65, 95; **e** 95, 284, 852; **f** 45, 56, 67. **9 a** de exemplu: 123, 321, 1 213; **b** 532, 424, 2 350, 154. **10 a** 2 numere; **b** 6 numere. **11 a** 12, 21, 30; **b** dacă $b = 0$, atunci $a + c = 6$ și obținem numerele naturale 105, 204, 303, 402, 501, 600; dacă $b = 1$, atunci $a + c = 4$ și obținem numerele 410, 311, 212, 113; dacă $b = 2$, atunci $a + c = 2$ și obținem numerele 121 și 220; dacă $b \geq 3$, atunci egalitatea nu poate avea loc; **c** 42. **12** 192 de numere. **13 b** $a = 7$, $b = 6$, $c = 3$; **c** $a = 6$, $b = 4$, $c = 7$, $d = 9$.
Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** 45; **b** 45.

Lecția 2. Reprezentarea pe axa numerelor. Compararea și ordonarea numerelor naturale; aproximări, rotunjiri, estimări

2 $A(6)$, B(5), $C(10)$, $D(7)$. **3** 4 321 > 2 314 > 2 143 > 1 342 > 1 234. **4** Da. Ioana a folosit ca unitate de măsură o pătrățică din caietul de matematică, iar Eva a folosit ca unitate de măsură două pătrățele. **5 a** 0, 1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; **b** 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24; **c** 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37. **6 a** 23 456 < 23 546; **b** 236 780 < 236 800; **c** 123 456 > 23 456. **7 a** 124 360; 124 300; 124 000; 100 000; **b** 892 530; 892 600; 893 000; 900 000; **c** prin lipsă: 587 320, 587 300; 587 000; 500 000; prin adaos: 587 330, 587 400, 588 000, 600 000; **d** 89 280; 89 300; 89 000; 100 000. **8** 2 400; 3 100; 1 100; 98 100; 64 000; 13 800; 56 300; 56 300; 81 000; 80 800. **9 a** 123; **b** 9 876; **c** 98 764; **d** 120 354. **10 a** 6 puncte; **b** 7 puncte. **11 a** de exemplu: 13 029, 13 037, 13 040, 13 043; **b** de exemplu: 13 463; 13 478; 13 482; 13 491; **c** de exemplu: 13 972; 13 979; 13 981; 13 982. **12 a** 6 578 234; **b** 85 374. **13 a** de exemplu: 23 464; 23 458; 23 470; 23 475; 23 478; 23 480; **b** de exemplu: 23 429; 23 431; 23 436; 23 439; 23 441; 23 446; **c** 23 475; 23 476; 23 477; 23 478; 23 479; 23 481. **14** Numerele sunt: 350, 351, ..., 449. Numărul lor este 100. **15** (13, 19); (13, 20); (13, 21); (14, 19); (14, 20); (14, 21); (15, 19); (15, 20); (15, 21); (16, 19); (16, 20); (16, 21); (17, 19); (17, 20); (17, 21); (18, 19); (18, 20); (18, 21); (19, 19); (19, 20); (19, 21). **16** 30 289. **17** de exemplu: $(1, b)$; $(2, d)$; $(3, c)$; $(4, e)$. **18** $b > d > a > c > e$. **19 a** $\overline{ab4}$, $\overline{ab6}$. **b** $\overline{a15}$, $\overline{a17}$, $\overline{a19}$, $\overline{a21}$, $\overline{a23}$, $\overline{a25}$, $\overline{a27}$. **20 a** Numerele de la 1 la 100 care conțin cifra 3 sunt: 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43, 53, 63, 73, 83, 93. Cifra 3 se folosește de 20 de ori. **b** 301.
Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** 400 – 200 – 1 = 199; **b** 106, 207, 117, 308, 218, 128, 409, 319, 229, 139.

Lecția 3. Adunarea numerelor naturale, proprietăți

1 a 588; **b** 361; **c** 7 653; **d** 6 116; **e** 5 035; **f** 873; **g** 4 136; **h** 220 925; **i** 63 689; **j** 5 704; **k** 99 354; **l** 22 233. **2 a** $S = (3 + 97) + (12 + 88) + (45 + 55) + (17 + 83) + 100 = 500$; **b** 800; **c** 487. **3 a** $(24 + 76) + (68 + 32) = 200$; **b** 456; **c** 1 100; **d** 2 000; **e** 2 000; **f** 400. **4 a** 465; **b** 464; **c** 429. **5 a** $a + a + 1 = 43$, numerele sunt 21 și 22; **b** 15, 16, 17; **c** 12, 14; **d** 17, 19, 21. **6 a** $702 + 11 \cdot \overline{ab} = 977$, $\overline{ab} = 25$. **b** $101 \cdot b + 20 \cdot a = 443$, $\overline{ab} = 73$. **7 a** $\overline{a4b8}$; **b** $\overline{ab6d}$; **c** $\overline{abcdef}$. **8 a** A; **b** F; **c** F; **d** A. **9 a** $n = 8$, numerele sunt: 20, 22, 24, 26, 28, 30; **b** $n = 8$, numerele sunt: 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47. **10 c** corect; **d** incorect/corect este 46; **e** corect. **11 a** 187 + 27 = 213; **b** 5 837 + 7 946 = 13 783 sau 5 836 + 7 947 = 13 783 sau 5 838 + 7 945 = 13 783 sau 5 835 + 7 948 = 13 783 sau 5 839 + 7 944 = 13 783 sau 5 834 + 7 949 = 13 783; **c** 47 + 582 = 629. **12 a** Suma minimă este 25 de lei, iar suma maximă este 37 de lei. **b** 10 caiete: șapte caiete de 3 lei, două caiete de 4 lei și un caiet de 6 lei. **13 a** Numerele m și n nu pot avea fiecare câte trei sau mai multe cifre (nu sunt simultan mai mari decât 100), deoarece suma lor este mai mică decât 200. Dacă m și n ar avea cel mult două cifre, răsturnatele lor ar avea tot cel mult două cifre, iar suma lor ar fi mai mică decât 200, fals. Așadar, m și n nu au același număr de cifre. **b** 74 și 631. **14** Rămâne suma numerelor aflate la început pe tablă: $1 + 2 + ... + 25 = 325$. **15** Presupunem că cele 40 de numere ar fi distincte două câte două. Atunci, suma lor ar fi cel puțin egală cu suma celor mai mici 40 de numere naturale distincte, adică ar fi cel puțin $0 + 1 + 2 + ... + 39 = 780$, contradicție. Așadar, cel puțin două dintre numerele date sunt egale. **16** Punctaj Ioana: $2 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 1 = 75$, punctaj Radu: $3 \cdot 9 + 1 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 73$. Câștigătorul concursului este Ioana.
Autoevaluare. **1** B. **2** A. **3 a** nu este posibil; **b** 7 + 4 = 11, 11 + 11 = 22, 22 + 11 = 33, 33 + 22 = 55, 55 + 4 = 59, 59 + 4 = 63.

Lecția 4. Scăderea numerelor naturale

1 a 1 215; **b** 3 732; **c** 989; **d** 568; **e** 17 723; **f** 22 937; **g** 14 210; **h** 4 944. **2 a** 8 888; **b** 885; **c** 9 765; **d** 1 223. **3 a** 290; **b** 101; **c** 4 589; **d** 849 991. **4 a** 536; **b** 2 149; **c** 218; **d** 749; **e** 13 497; **f** 957; **g** 630; **h** 987; **i** 5 041. **5 a** 232; **b** 1 264; **c** 11 860; **d** 76 778. **6** Numerele sunt 90 și 8. **7** 1 016 km. **8** 437; 580; 985. **9 a** $y = 5$; **b** $x = 4$; **c** $y + z = 7$. **10 a** $a - c = 347$; **b** $a - b = 9$; **c** $c = 27$. **11 a** 80 601; **b** 20 503; **c** 111 111. **12** $a = 9$, $b = 1, 2, ..., 9$, $c = 3$, $d = 5$, sunt 9 numere.
Autoevaluare. **1** B. **2** c. **3 a** 23; **b** 29.

Lecția 5. Înmulțirea numerelor naturale

1 a 420; **b** 875; **c** 5 760; **d** 4 860; **e** 26 112; **f** 63 135. **2 a** 3 553; **b** 2 600; **c** 19 040; **d** 2 730; **e** 15 540; **f** 5 824. **3 a** $2 \cdot 37 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 37 = 370$; **b** 17 000; **c** 5 790 000. **4 a** 5 229; **b** 938; **c** 2 196; **d** 3 158; **e** 7 238; **f** 1 920. **5 a** 3 465; **b** 2 727; **c** 1 530; **d** 3 038; **e** 3 996; **f** 5 020. **6 a** $p = 475$; **b** $p = 5\,880$. **7** 139 km. **8** 83 lei. **9** $10 \le a \le 16$, $12 \le b \le 21$, obținem $120 \le a \cdot b \le 336$, cea mai mică valoare posibilă a produsului este 120, iar cea mai mare este 336. **10** 20. **11** $(x, y) = (2, 16), (5, 1), (6, 0), (3, 6)$. **12** Numerele sunt 18 și 23. **13 a** 35, 45, 55; **b** 28, 35, 42; **c** 360, 1 800, 10 800; **d** 7 568, 99 010, 1 113 212; **e** 6 742, 8 972, 1 011 110; **f** 576, 27 648, 15 925 248. **14** 13 zerouri. **15 b** și **d**. **16 a** F; **b** A; **c** F; **d** F. **17 a** $(13 + 2) \cdot 5 = 25 \cdot 3$; **b** $19 - (5 \cdot 3 - 2) = 6$; **c** $(19 - 5) \cdot (3 - 2) = 14$; **18 a** $15 - 7 \cdot 2 = 1$; **b** $128 - 22 \cdot 4 - 38 = 2$; **c** $24 - 5 \cdot 3 - 2 = 7$. **20** $a + b = 431$, $2 \cdot a + 5 \cdot b = 2 \cdot (a + b) + 3 \cdot b = 1\,696$, $3 \cdot b = 834$, $b = 278$, $a = 153$. **21 a** $2 \cdot x \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $x = 1$, numărul căutat este 2 134; **b** $x \cdot y = 6$, numerele căutate sunt 2 164, 2 234, 2 324, 2 614. **22** Ultima cifră a produsului a 2 numere naturale consecutive se obține din produsul numerelor: $0 \cdot 1, 1 \cdot 2, \ldots, 8 \cdot 9$; **b** Nu. Produsul a două numere naturale consecutive este un număr par, iar 2 017 este un număr impar. Deci, nu putem avea egalitate.

Autoevaluare. **1** D. **2** B. **3 a** 60; **b** 756.

Lecția 6. Factor comun

1 a 160; **b** 1 000; **c** 14 000; **d** 12 788; **e** 3 000; **f** 70 200; **g** 2 413 000; **h** 1 217 400; **i** 1 289 000. **2 a** 1 200; **b** 50 000; **c** 702 000; **d** 478 000. **3 a** 106; **b** 15; **c** 102; **d** 1 302. **4 a** 100; **b** 114; **c** 700; **d** 2 021. **5 a** $x = 2$; **b** $x = 100$; **c** $x = 13$; **d** $x = 2\,028$. **6 b** 20 020; **c** 85 995; **d** 499 950. **7** $91 \cdot \overline{ab} = 6\,188$, $\overline{ab} = 68$.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** $a + b + c = 8$; **b** $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$.

Lecția 7. Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale

1 a 156; **b** 86; **c** 61; **d** 54; **e** 20; **f** 28; **g** 89; **h** 4 606; **i** 420; **j** 58. **2 a** 24, proba: $24 \cdot 65 = 1\,560$; **b** 21; **c** 48; **d** 36; **e** 70; **f** 23; **g** 126; **h** 241. **3 a** 655, proba: $47\,160 : 655 = 72$; **b** 57; **c** 264; **d** 89; **e** 304; **f** 36; **g** 67; **h** 27. **4** 45 kg. **5** 82 lei. **6** 23 lei. **7** 4 lei, 3 lei, 4 lei, 3 lei. **8 a** A; **b** F; **c** A; **d** A; **e** F; **f** A. **9** 32; **10** Câtul este 11, restul este 0.

Autoevaluare. **1** C. **2** D. **3 a** DA; **b** 270.

Lecția 8. Împărțirea cu rest a numerelor naturale

1 a 20 rest 5; **b** 33 rest 4; **c** 62 rest 8; **d** 93 rest 1; **e** 154 rest 4; **f** 73 rest 11; **g** 129 rest 5; **h** 84 rest 5; **i** 156 rest 10; **j** 27 rest 140; **k** 609 rest 21; **l** 102 rest 48. **2 a** A; **b** A; **c** F; **d** F. **3 a** $a : 32 = 36$ rest 28, $a = 1\,180$; **b** 1 428. **4 a** $a = 6 \cdot 13 + r$, $r < 6$, $a = 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84$; **b** 348.**5** $a + b + c = 135$, $a = 12c + 1$, $b = 31c + 2$, obținem $44c = 132$, $c = 3$, $a = 37$, $b = 95$. **6** $a - b = 72$, $a + b = 362$, $a = 217$, $b = 145$. **7 a** $a = 13c + r$, $r < 13$, $r = c$, obținem $a = 14c$, de unde $a = 0, 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, 168$; **b** numerele sunt: 0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119; **c** $x : 2\,009 = c$ rest r, $r < 2\,009$, $r = 10c$, $10c = 2\,000$, $c = 200$, obținem $x = 2\,019c = 403\,800$. **8 b** Cel mai mic număr este $120 = 37 \cdot 3 + 9$, iar cel mai mare număr este $971 = 37 \cdot 26 + 9$, sunt $26 - 3 + 1 = 24$ numere, suma lor este egală cu 13 092. **9 a** $x = 6c + 3$, $x = 3(2c + 1) + 0$, deci restul împărțirii numărului natural x la 3 este 0, diferit de 2. **10 a** $A = 17a + 17b + 17 + 8 = 17(a + b + 1) + 8$, $8 < 17$, restul împărțirii numărului A la 17 este 8; **b** $B = 4(4a + 7b + 3) + 1$, $1 < 4$, restul împărțirii numărului B la 4 este 1. **11** $x = 30c + 8$, $y = 35d + 34$, $3x + 2y = 10(9c + 7d + 9) + 2$, $2 < 10$, restul împărțirii numărului $3x + 2y$ la 10 este 2. **12** $a + b + c = 232$, $b = 7c + 1$, $a = 98c + 19$, obținem $c = 2$, $a = 215$, $b = 15$. **13** Numerele sunt 195, 85, 17. **14** $a - b = 139$, $a = 20b + 6$, $a = 146$, $b = 7$. **15 a** $\overline{abc} = 5 \cdot \overline{bc} + 4$, $25 \cdot a = \overline{bc} + 1$, $\overline{abc} = 124, 249, 374, 499$; **b** $\overline{abad} = \overline{ab00} + \overline{ad} = q \cdot \overline{ab} + 5$, $\overline{ab00} : \overline{ab} = 100$, $\overline{ad} : \overline{ab} = 1$ rest 5, $d = b + 5$, $a = 1, 2, \ldots, 9$, $(b, d) = (0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)$, sunt 45 de numere naturale care verifică condițiile problemei. **16 a** $126 = 2 \cdot 9 \cdot 7$, $N = (2 \cdot 9 \cdot 7) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 125 + 126 + 124 = 126 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 125 + 1) + 124$, câtul împărțirii lui N la 126 este $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 125 + 1$, iar restul este 124.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** 108; **b** 997.

Lecția 9. Puterea cu exponent natural a unui număr natural. Pătratul unui număr natural

1 $a = 7$, $b = 9$, $c = 11^4$, $d = 3$, $e = 37$, $f = 31$, $g = 18$. **2** $a = 10$, $b = 625$, $c = 24$, $d = 1\,024$, $e = 9\,801$. **3 a** 5^6; **b** 12^3; **c** 7^5; **d** $(8 \cdot 3)^4$; **e** 1^5; **f** 3^{2017}. **4 a** 1; **b** 126; **c** 217; **d** 47; **e** 63; **f** 87; **g** 0; **h** 1; **i** 1 000; **j** 400; **k** 49; **l** 4. **5 a** $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$; **b** $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2$. **6 a** 2; **b** 3; **c** 5; **d** 6; **e** 1; **f** 8; **g** 1; **h** 4. **7** 0. **8 a** $6^2 < 39 < 7^2$; **b** $26^2 < 700 < 27^2$; **c** $12^2 < 160 < 13^2$; **d** $11^2 < 123 < 12^2$. **9 a** ultima cifră a numărului este 7, deci el nu poate fi pătratul niciunui număr natural; **b** $u(2^{403} + 2^{402}) = 2$, deci numărul dat nu poate fi pătratul niciunui număr natural.**10 a** Soluțiile sunt: $x = 0$, $y = 8$ sau $x = 8$, $y = 0$. **b** Soluțiile sunt: $x = 0$, $y = 5$, $z = 6$ sau $x = 0$, $y = 6$, $z = 5$ sau $x = 5$, $y = 0$, $z = 6$ sau $x = 6$, $y = 0$, $z = 5$ sau $x = 5$, $y = 6$, $z = 0$ sau $x = 6$, $y = 5$, $z = 0$.

Autoevaluare. **1** B. **2** B. **3 a** $U(A) = 0$; **b** a, b impare $\Rightarrow U(A) = 3$.

Lecția 10. Reguli de calcul cu puteri

1 a 7^{45}; **b** 16^{33}; **c** 3^{11}; **d** 5^{23}; **e** 23^{57}; **f** 5^{153}. **2 a** 2^{70}; **b** 75^3; **c** 3^7; **d** 5^{39}; **e** 7^{25}; **f** 14^{25}. **3 a** 3^{28}; **b** 13^{72}; **c** 17^{54}; **d** 7^{44}; **e** 16^{48}; **f** 5^{12}. **4 a** 21^{16}; **b** 35^{10}; **c** 70^{34}; **d** 10^4; **e** 165^{12}; **f** 84^{30}. **5 a** 4^{24}; **b** 25^{45}; **c** 2^{17}; **d** 3^{36}; **e** 3^{21}; **f** 25^8. **6 a** 5^{67}; **b** 3^{37}; **c** 2^{57}. **7 a** $2^{76} \cdot 21$; **b** $5^{47} \cdot 163$; **c** $13^{12} \cdot 480$. **8 a** $(5^{23})^2$; **b** $(23^{50})^2$; **c** $(7^{15})^2$;

d $(5^{37})^2$; **e** $(2^{75})^2$; **f** $(5^{14})^2$; **g** 20^2; **h** $(2^9 \cdot 3^3)^2$; **i** $(5 \cdot 3^9)^2$. **9** A; F; A; N; F. **Exemplu:** $(9 + 16)^9 = 25^9 = (5^9)^2$ (**A**; $(3 + 2)^3 = 5^3$ (**F**. **10** (13, 2); (36, 7); (7, 8); (25, 5).11. **b** $5^2 = 3^2 + 4^2$, $5^{200} = 5^2 \cdot 5^{198} = (3^2 + 4^2) \cdot 5^{198} = (3 \cdot 5^{99})^2 + (4 \cdot 5^{99})^2$.12. **a** $n = 3^{23} \cdot 2^{46} - 2^{44} \cdot 3^{23} = 3^{23} \cdot 3 \cdot 2^{44} = (3^{12} \cdot 2^{22})^2$. **b** $n = 3^{2008} \cdot 49 =$ $= (3^{1004} \cdot 7)^2$.

Autoevaluare. **1** A. **2** D. **3** **a** *8*; **b** 243.

Lecția 11. Compararea puterilor

1 **a** 25^{28}; **b** 26^{1234}; **c** $2\,011^5$; **d** 393^{100}; **e** 125^{126}; **f** 111^{44}. **2** **a** 15^{27}; **b** 24^{123}; **c** $2\,010^4$; **d** 987^{123}; **e** 25^{125}; **f** $1\,010^{201}$.**3** **a** $5^{87} > 25^{36}$; **b** $4^{333} > 8^{122}$; **c** $2^{65} < 16^{20}$; **d** $125^{34} < 25^{75}$; **e** $36^{224} > 6^{363}$; **f** $27^{303} < 9^{502}$. **4** **a** $3^{22} > 2^{33}$; **b** $4^{33} < 3^{44}$; **c** $11^{22} > 22^{11}$; **d** $2^{39} < 3^{26}$; **e** $5^{45} > 6^{30}$; **f** $15^{90} > 6^{135}$. **5** De exemplu:($2^a < 2^b$; $a = 3$, $b = 7$); ($a^{21} > b^{21}$; $a = 5$, $b = 3$); ($4^a > 2^b$; $a = 4$, $b = 6$). **6** **a** $\overline{ab} > 97$, $\overline{ab} = 98, 99$; **b** $\overline{ab} < 13$, $\overline{ab} = 10, 11, 12$; **c** $\overline{abc} < 132$, $\overline{abc} = 100, 101, ..., 131$. **7** **a** $25^{18} < 5^{40} < 125^{15}$; **b** $3^{95} < 9^{51} < 27^{48}$; **c** $32^7 < 8^{12} < 27^8$.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3** **a** *13*; **b** 10, 11, 12.

Lecția 12. Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2

1 **a** $812 = 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10^0$; **b** $1\,121 = 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10^0$; **e** $\overline{a7b} = a \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + b \cdot 10^0$; **f** $\overline{a19b} = a \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 +$ $+ b \cdot 10^0$. **2** **a** 4 708; **b** 64 790; **c** 8 095; **d** 704 803; **e** 4 906. **3** **a** $5_{(10)}$; **b** $13_{(10)}$; **c** $22_{(10)}$; **d** $25_{(10)}$. **4** **a** $11\,011_{(2)}$; **b** $100\,110_{(2)}$; **c** $101\,101_{(2)}$; **d** $111\,001_{(2)}$; **e** $111\,101_{(2)}$; **f** $1\,001\,000_{(2)}$; **g** $1\,010\,101_{(2)}$; **h** $1\,100\,001_{(2)}$. **5** **a** $2\,010 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2$; **b** $1\,999 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 +$ $+ 2^2 + 2 + 2^0$. **6** $a = 10\,010_{(2)}$; $b = 2^4 + 2$; $c = 1 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0$; $d = 10$; $e = 2^3 + 2$; $f = 1 \cdot 10 +$; $g = 37$; $h = 100\,101_{(2)}$; $i = 3 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0$; $j = 5\,087$; $k = 1\,001\,111\,011\,111_{(2)}$. **7** **a** $x = 1\,111\,001$; **b** $x = 100\,010$; **c** $x = 27$; **d** $x = 43$. **8** **a** F; **b** A; **c** A; **d** A.

Lecția 13. Ordinea efectuării operațiilor, utilizarea parantezelor rotunde, pătrate și acolade

1 **a** 31; **b** 29; **c** 66; **d** 66; **e** 1 386; **f** 392. **2** **a** 4; **b** 216; **c** 2; **d** 4; **e** 2; **f** 500. **3** **a** 100; **b** 1 225; **c** 1; **d** 1; **e** 11; **f** 11. **4** **a** 585; **b** 1 914; **c** 1 119; **d** 0. **5** **a** 70; **b** 1. **6** $a = 30$; $b = 135$. Numerele cuprinse între 30 și 135 sunt: 31, 32, ...,134. Numărul lor este 104. **7** **a** $5 \cdot (4 : 2 + 8) - 2 = 48$; **b** $6 \cdot (9 : 3 + 5 - 2) = 36$; **c** $3 \cdot (8 : 4 + 6 \cdot 2) - 18 = 24$. **8** 365 lei. **9** $(10^4 \cdot a + 100 \cdot \overline{bc} + \overline{de} - 100 \cdot \overline{bc} - \overline{de} : 10^4 = 7$ sau $(10^4 \cdot a) : 10^4 = 7$, de unde obținem $a = 7$. **10** **a** $11 \cdot a +$ $+ 11 \cdot b + 11 \cdot c = 88$, deci $a + b + c = 8$; **b** $a + b + c = 18$; **c** $a + b + c = 7$; **d** $a + b + c = 5$.

Autoevaluare. **1** D. **2** B. **3** **a** $(828 - 24 \cdot 12) : 18 = 30$; **b** $(828 - 6 \cdot 18) : (18 + 12) = 24{,}24 + 6 = 30$.

Unitatea 2. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

Lecția 1. Metoda reducerii la unitate

1 9 lei. **2** 36 cm, 16 cm, 12 cm, 8 cm. **a** Dacă lungimea laturii se mărește, atunci și perimetrul pătratului se mărește. **b** Dacă lungimea laturii se micșorează, atunci și perimetrul pătratului se micșorează. **3** **a** adevărată. **4** **a** Este posibil! Dintr-o cantitate de apă de două ori mai mare, se va obține de două ori mai multă sare. **b** 25 000 litri. **5** 180 km. **6** 400 000 €. **8** Completăm cu 20, 15, 5, 6 și 10. **a** Dacă valoarea lui *x* se mărește, atunci valoarea lui *y* se micșorează. **b** Dacă valoarea lui *x* se micșorează, atunci valoarea lui *y* se mărește. **9** **a** Este posibil! Numărul muncitorilor s-a micșorat de două ori și atunci timpul necesar s-a mărit de două ori. **b** 20 de muncitori. **10** Două ore. **12** 8 100 000 m. **13** Între trei bătăi consecutive de clopot sunt două intervale de timp a 6 secunde fiecare; 66 de secunde.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3** **a** 8 ore și 20 de minute = 500 de minute. Debitul este egal cu 30 000 litri: 500 de minute = 60 litri pe minut. **b** A doua pompă are debitul egal cu 40 litri pe minut. Se va umple în 5 ore.

Lecția 2. Metoda comparației

1 **c** 16 lei. **2** **a** adevărată. **3** 228 ℓ. **4** **a** Nu este posibil. Deoarece 5 pungi cu mălai și 7 pungi cu făină cântăresc 31 kg, deducem că 10 pungi cu mălai și 14 pungi cu făină cântăresc 62 kg. **b** 2 kg, respectiv 3 kg. **5** **a** Prin însumare, deducem că 9 băieți și 9 fete au confecționat 45 de mărțișoare. Un băiat și o fată au confecționat 5 mărțișoare. **b** 3, respectiv două mărțișoare. **6** Ogarul parcurge 60 m, iar vulpea 30 m. **8** 1 m. **9** **a** Nu este posibil. Trei trandafiri costă tot atât cât 9 garoafe. **b** 6 lei, respectiv, 2 lei. **10** În prima egalitate, adăugăm o tamburină în ambii membri și apoi înlocuim membrul drept cu 160 lei. O tamburină costă 40 lei. **11** Boul. **12** Comparând primele două egalități, deducem că $\square + \triangle + \bigcirc = 8$. Comparând această egalitate nou obținută tot cu cea de-a doua egalitate, obținem că diferența cerută este 4.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3** **a** Înlocuind 3 kg de mere și 4 kg de pere cu 5 kg de gutui, deducem că 10 kg de gutui costă 50 lei. Un kilogram de gutui costă 5 lei. **b** 3 lei, respectiv 4 lei.

Lecția 3. Metoda figurativă

1 **d** 72 kg. **2** **b** falsă. **3** **a** Este posibil, deoarece în a treia zi a citit 25 de pagini. **b** 40 de pagini. **4** 11 trandafiri, 13 frezii și 15 lalele. **5** 468 m. **6** **a** Nu este posibil, deoarece pe al doilea ar trebui să fie 60 de pietre prețioase și s-ar depăși numărul total al pietrelor. **b** 48. **7** Locul X. **8** 28 de ani. **9** **a** Chiar dacă $74 = 5 \cdot 12 + 14$, nu este posibil, deoarece restul nu îndeplinește condiția de a fi mai mic decât împărțitorul. **b** 94, respectiv 16.

10 94, respectiv 16. **11** Reprezentăm numărul rămas cu o parte. Cel inițial este reprezentat prin 10 părți plus numărul 7. Numărul inițial este 2 017. **12 a** L = 450 m și $l = 150$ m. Sunt 75 de intervale a 6 m fiecare, deci 76 de pomi. **b** 200 de pomi. **13** Mai întâi se arată că numărul mic nu poate avea o cifră. Așezându-i unui număr de două cifre cifra 1 în stânga, îl mărim cu 100. Numerele sunt 53 și 153. **14** Reprezentăm al doilea factor cu 3 părți și după ce se micșorează cu 750 devine o parte. Diferența 750 reprezintă două părți. Al doilea factor este egal cu 1 125. Avem două soluții: 225 și 1 125, respectiv, 5 625 și 1 125. **15** Reprezentăm numărul trandafirilor galbeni, roșii și albi cu o parte, două părți, respectiv, 4 părți. Numărul total al trandafirilor este 21 sau 28, deoarece trebuie să se împartă exact la 7. A adus 3 galbeni, 6 roșii, 12 albi, respectiv 4 galbeni, 8 roșii și 16 albi. **16** 30 de elevi și 12 bănci. **17** 10 mere și 30 de prune. **18 a** Avem reprezentările:

Faza inițială: $\underbrace{\dfrac{2b}{f}, \dfrac{2b}{f}, \dfrac{2b}{f}, \ldots, \dfrac{2b}{f}}_{\text{de două ori mai multe bomboane decât fursecuri}}$. **Faza finală:** $\underbrace{\dfrac{5b}{3f}, \dfrac{5b}{3f}, \dfrac{5b}{3f}, \ldots, \dfrac{5b}{3f}}_{\text{nr. acestor grupe coincide cu nr. elevilor participanți la masa festivă}}$ (servite) $\underbrace{\underbrace{f, f, f, \ldots, f}_{12}\ \underbrace{b, b, b, \ldots, b}_{40}}_{\text{rămase pe platoul mare}}$.

Faza intermediară. Ținând cont că fiecărui elev i se servesc 3 fursecuri, facem următorul *aranjament* pe platoul mare: $\dfrac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}, \dfrac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}, \dfrac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}, \ldots, \dfrac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}$. În final, pe platou au rămas 12 fursecuri, ceea ce înseamnă că au rămas 4 aranjamente de tipul $\dfrac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}$. Acestea conțin 12 fursecuri și 24 de bomboane. Există o diferență de 16 bomboane, astfel încât pe platoul mare să rămână 40 de bomboane. Fiecare participant a fost servit cu 5 bomboane, ceea ce înseamnă că de la fiecare aranjament de tipul $\dfrac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}$ rămâne o bomboană. Deducem că existau 16 aranjamente de tipul $\dfrac{2b\,2b\,2b}{f\;\;f\;\;f}$. La eveniment au fost 16 elevi, iar în clasă erau 31 de elevi. **b** 60 de fursecuri și 120 de bomboane.

Autoevaluare. **1** D. **2** B. **3 a** Nu este posibil, deoarece prin împărțirea lui 63 la 12 obținem câtul 5 și restul 3. **b** 87 și, respectiv, 18.

Lecția 4. Metoda mersului invers

1 b 2022. **2 a** adevărată. **3** 63. **4** 350. **5 a** 22. **b** 324. **6** Din $(x + 5) : 6 = 11$ obținem $x = 61$ și $(61 - 6) : 5 = 11$. **7** 1. **8** 54. **9** Atenție la ordinea operațiilor! Problema este transpusă de **b**. **10** $(2 \cdot x + 2) \cdot 3 - 3 = 57$; 9 nuferi. **11** $(z \cdot 2 + 64) \cdot 5 + l = 443$. În paranteză dăm factor comun pe 2 și obținem: $(z + 32) \cdot 2 \cdot 5 + l = 443$, adică $(z + 32) \cdot 10 + l = 443$. Deoarece ultima cifră a produsului este zero, deducem că $l = 3$. Atunci $z = 12$. Data aniversării este 12 martie. **12** 64 de bile. Adi câștigă. **13 a** Combinăm *metoda figurativă* cu *metoda mersului invers*. Reprezentăm lungimea traseului cu 6 părți. Distanța dintre primele două obiective reprezintă o parte din lungimea traseului. Dacă 40 km reprezintă o parte, atunci distanța dintre ultimele două obiective, reprezentată prin două părți, este de 80 km. Deci este posibil. **b** Jumătate din traseu are 40 km + 80 km = 120 km. Lungimea traseului este egală cu 240 km. **14 a** Nu este posibil. Jumătate din 16 km este egal cu 8 km și un sfert din 8 km este egal cu 2 km. **b** Un sfert din jumătatea distanței este egal cu 1 km și atunci jumătatea distanței este egală cu 4 km. Traseul are 8 km. **15** 33 de mere în prima grămadă și 15 mere în a doua grămadă.

Autoevaluare. **1** B. **2** D. **3 a** Nu este posibil, deoarece pe masă ar fi rămas 5 nuci. **b** Bunica a lăsat 24 de nuci. Vlad a luat 12 nuci, iar Ștefan a luat 6 nuci.

Lecția 5. Metoda falsei ipoteze

1 d 80. **2 a** adevărată. **3** 5 kg. **4 a** Nu este posibil, deoarece 6 veverițe și 5 vrăbiuțe au împreună 34 de piciorușe. **b** 7 vrăbiuțe. **5** 5 bancnote de 5 lei. **6** 22 de albine. **7** Zece acțiuni de 25 de euro și 8 acțiuni de 12 euro. **8** 120 de vite și 200 păsări. **9** Trei vase a 3 litri. **10** 23 de victorii. **11 a** Doi iepuri și 3 rațe; **b** Două picioare (ale gospodinei). **12** Atenție! La fiecare rezolvare greșită pierde 12 puncte. Cinci probleme. **13** Șase săgeți. **14 a** 6 zile. **b** Însorită. **15** Presupunând că toate monedele erau de 5 €, există o nepotrivire de 35 €. Ca să aflăm numărul monedelor de 2 €, număr natural, trebuie să împărțim 35 € la 3 € și să obținem un număr natural, ceea ce este imposibil. **16** 6 lei.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** Nu este posibil, deoarece ar fi primit 13 puncte. **b** 6 probleme.

Recapitulare și evaluare. **1** a. **2** d. **3** c. **4** a. **5** a. **6** c. **7** b. **8** a. **9** 475 și 156. **10** 9 băieți și 21 de fete. **11** 63 de lei. **12** $A = 367$; $B = 2$; $C = 80$. **13** Le-a lăsat 16 fursecuri. **14** Erau 26 de bănci și 100 de persoane.

Unitatea 3. Divizibilitatea numerelor naturale

Lecția 1. Divizor, multiplu; divizori comuni; multipli comuni

1 a $16 : 4 = 4$ rest 0, deci $16 \vdots 4$; **b** $30 \vdots 5$; **c** $27 : 13 = 2$ rest 1, deci $27 \not\vdots\, 13$; **d** $42 \vdots 7$; **e** $22 \not\vdots\, 4$; **f** $72 \vdots 9$; **g** $65 \not\vdots\, 7$; **h** $90 \vdots 10$; **i** $0 \vdots 6$. **2 a** 1, 5; **b** 1, 2, 4, 8, 16; **c** 1, 23; **d** 1, 3, 9, 27; **e** 1, 2, 4, 7, 14, 28; **f** 1, 3, 11, 33; **g** 1, 2, 3, 6, 12, 14, 21, 42; **h** 1, 3, 7, 9, 21, 63; **i** 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64; **j** 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80. **3 a** 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76; 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72; 27, 36, 45, 54, 63, 72. **b** 21, 28, 35, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91; 30, 45, 60, 75, 90; 29, 58, 87. **4 a** $108 : 18 = 6$ rest 0, deci 18 este un divizor al lui 108; $18 : 6 = 3$ rest 0, deci 18 este un multiplu al lui 6. **b** $2\,184 : 91 = 24$ rest 0, deci 91 este un divizor al lui 2 184; $91 : 21 = 4$ rest 7, deci 91 nu este multiplu al lui 21. **c** $11 \cdot 2 = 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, deci $11 \cdot 12$ este un multiplu al lui $2 \cdot 3$; $22 \cdot 33 = 11 \cdot 6 \cdot 11$, deci $22 \cdot 33$ nu se poate scrie ca produsul dintre $11 \cdot 12$ și alt număr natural, adică $11 \cdot 12$ nu este divizor al lui $22 \cdot 33$. Altfel, se efectuează $22 \cdot 33 = 726$ și $11 \cdot 12 = 132$, apoi se observă că $726 : 132 = 5$ rest 66. Deci $11 \cdot 12$ nu este divizor al lui $22 \cdot 33$. **5 a** Divizorii lui 34 sunt 1, 2, 17, 34. $3n - 1 = 1$, n nu este număr natural; $3n - 1 = 2$, $n = 1$; $3n - 1 = 17$, $n = 6$; $3n - 1 = 34$, n nu este număr natural. **b** Divizorii lui 98 sunt 1, 2, 7, 14, 49, 90. Obținem $n = 3$, $n = 10$. **6 a** Valorile lui m sunt 34, 41, 48, 55, 62, 69. **b** $2n + 1$ este multiplu al lui 45; valorile lui n sunt 22 și 67. **7 a** $x = 7 \cdot 5 \cdot a + 7 \cdot 9 \cdot b = 7 \cdot (5a + 9b) \vdots 7$. **b** $u + v = 9a + 9b + 9c = 9(a + b + c) \vdots 9$. **8 a** $a = 12c + 9 = 3(4c + 3) \vdots 3$; **b** $b = 57d + 38 = 19(3d + 2) \vdots 19$. **9** Grupăm termenii câte doi și aplicăm strategia de la problema rezolvată 4. **10a** Cel mai mare divizor comun este 12. **b** Cel mai mic multiplu comun nenul este 36. **11** Numărul egal de baloane, fluiere și coifuri este egal cu cel mai mic multiplu comun al numerelor 18, 12 și 8, adică numărul 72. Radu ar trebui să cumpere 3 seturi de baloane, 6 seturi de fluiere și 9 seturi de coifuri. **12** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 9 și 12 este egal cu 36. Deci, cei doi copii se vor întâlni la start peste 36 de minute. Bogdan va efectua 4 tururi, iar Corina 3 tururi. **13 a** deoarece 4 este divizor al lui 24, obținem că vizitatorii care primesc rucsac primesc și insignă. **b** Insignă și tricou vor primi din 36 în 36 vizitatori. Insignă și ochelari de soare din 60 în 60 vizitatori. **c** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 4, 9, 15 și 24 este egal cu 360. Primesc toate cele patru obiecte cadou vizitatorii cu numărul 360 și 720, adică doi vizitatori din primii 1 000. **14** Cel mai mic număr de cutii este 6. **15 a** $30 \vdots 3$, $24 \vdots 3$ și $18 \vdots 30$, deci se pot pune câte trei fructe în fiecare coș; deoarece $30 \not\vdots 4$, obținem că nu se pot pune câte 4 fructe de același fel, în fiecare coș. **b** Numărul coșurilor este 6. Fiecare coș conține 5 portocale, 4 piersici și 3 pere. **16** Corul școlii este format din 36 de fete și 24 de băieți. Cel mai mare divizor comun al numerelor 36 și 24 este 12. Vor fi trei rânduri a câte 12 fete și două rânduri a câte 12 băieți. Numărul elevilor de pe fiecare rând este 12, iar numărul rândurilor este 5.

Autoevaluare. **1** C. **2** B. **3 a** De 8 ori cel cu lumină albastră și de 12 ori cel cu lumină albă. **b** Proiectoarele clipesc simultan după un număr de secunde egal cu cel mai mic număr natural multiplu și de 5, și de 7, adică după 35 de secunde. 10 minute = 600 secunde; cum $600 : 35 = 17$ rest 5, proiectoarele vor clipi simultan de 35 de ori.

Lecția 2. Criterii de divizibilitate cu 2, 5, 10n, 3 și 9

2 a 50, 12, 38, 84; **b** 5, 20, 25; **c** 24, 60; **d** 18; **e** 78, 84, 12; **f** 60, 45. ***3.*** **a** 105, 165, 195, 605, 615, 695, 905, 915, 965; **b** 910, 950, 960, 906, 916, 956; **c** 501, 561, 591, 651, 951, 105, 165, 195, 615, 159, 519, 609; **d** 105, 165, 615, 195, 915. **4 a** 120; **b** 140, 240, 340, 440, 540, 640, 740, 840, 940; **c** 6 300, 6 310, 6 320, ..., 6 390; **d** 910, 920, 930, 940, 950, 960, 970, 980, 990. **5 a** 190, 192, 194, 196, 198; **b** 500, 522, 544, 566, 588; **c** 708, 718, 728, ..., 798; **d** 202, 404, 606, 808. **6 a** 740, 745; **b** 800, 810, 820, ..., 890; **c** 4 020, 4 525; **d** 1 510, 2 520, 3 530, ..., 9 590, 1 515, 2 525, 3 535, ..., 9 595. **7 a** 705, 735, 765, 795; **b** 981, 984, 987; **c** 4 080, 4 383, 4 686, 4 989. **8 a** 153; **b** 279; **c** 3 330, 3 339; **d** 12 060, 12 150, 12 240, 12 330, 12 420, 12 510, 12 600, 12 690, 12 780, 12 870, 12 960. **9 a** 0; **b** 2, 5 sau 8; **c** 0 sau 5; **d** 0, 2, 4, 6 sau 8; **e** 6; **f** 1, 4 sau 7; **g** 0; **h** 7. **10 a** b poate lua una dintre valorile 0, 2, 4, 6 sau 8. Din $a + b + 8 + 7 = 29$, obținem $a + b = 14$. Dacă $b = 8$, atunci $a = 6$ și obținem numărul 8 768. Dacă $b = 6$, atunci $a = 8$ și obținem numărul 8 786. Dacă b ia valorile 0, 2 sau 4, atunci a nu este cifră. **b** 33 970. **c** 45 020, 45 110, 45 200. **11 a** 720, 750, 780. **b** 9 060, 9 360, 9 660, 9 990, 9 165, 9 465, 9 765. **c** 52 650, 42 642, 32 634, 22 626, 12 618. **12** Studiind ultima cifră a lui A obținem n par.

Autoevaluare. **1** D. **2** A. **3 a** Nu, 7 374 nu este divizibil cu 9, întrucât $7 + 3 + 7 + 4 = 21$, care nu este divizibil cu 9. **b** Numărul de locuri din noua tribună este divizibil cu 5, deci are ultima cifră 5, adică $a = 5$. Numărul total de locuri al stadionului este $7\,374 + 5\,685 = 13\,059$, care este divizibil cu 9, deoarece $1 + 3 + 0 + 5 + 9 = 18$, care este divizibil cu 9.

Lecția 3. Numere prime. Numere compuse

2 a 3; **b** 3; **c** 5; **d** 2; **e** 13; **f** 17. **3 a** 1, 3, 7; **b** 1, 3, 9; **c** 1, 2, 4, 5, 7, 8; **d** 1, 3, 7, 9; **e** 1; **f** 3, 6. **4 a** 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8; **b** 0, 2, 4, 5, 6, 8, 9; **c** 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9; **d** 2, 5, 8, 9; **e** 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9; **f** 0, 2, 4, 5, 6, 8, 9. **5** De exemplu: **b** $22 = 3 + 19$; **c** $46 = 53 - 7$; **d** $26 = 29 - 3$; **e** $77 = 7 \cdot 11$; **f** $39 = 3 \cdot 13$. **7a** (13,2); (11,4); (7,8); (5,10); **b** (2,73), (73,2); **c** (43,2); **d** (5,17), (17,5). **8a** Studiem cazuri după valorile lui b; obținem $a = 13$, $b = 2$; **b** $a = 11$, $b = 5$; **c** $a = 5$, $b = 3$, $c = 7$ sau $a = 11$, $b = 3$, $c = 3$. **9a** $n = 0$; **b** $n = 1$; **c** $n = 7$. **10a** $A = (2^n + 1) \cdot (3^n + 1)$; **b** $B = (3^n + 5) \cdot (5^n + 1)$. **11** $n = 0$ sau $n = 1$ nu convin. Pentru $n = 2$, se obțin numerele prime 3, 13 și 29. Pentru $n \geq 3$, vom studia cazurile $n = 3k$, $n = 3k + 1$ sau $n = 3k + 2$. În fiecare dintre cele trei cazuri obținem cel puțin un număr compus din cele 3.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** Nu, deoarece $\overline{7b}$ ar fi număr impar, deci suma $2a + 7b + 6c$ ar fi egală cu un număr impar, iar 78 este par. **b** $\overline{7b}$ este număr par, deci $b = 2$. Obținem $a + 3c + 32$, deci (a, b, c) pot fi (11, 2, 7), (17, 2, 5) sau (23, 2, 3). Din condiția asupra sumei rezultă că $a = 17$, $b = 2$ și $c = 5$.

Recapitulare și evaluare. **1** b. **2** d. **3** c. **4** d. **5** b. **6** b. **7** c. **8** b. **9** F, F, A, F. **10** $(a, 2)$, $(b, 4)$, $(c, 1)$. **11** De exemplu: (36,2), (45,5), (84,3). **12** De exemplu (2,80), (3,39), (5,75). **13** $a = 7$, $b = 3$. **14** $n = 24 \cdot c + 15 = 3 \cdot (8c + 5)$ care este divizibil cu 3. Deoarece $24 \cdot$ c este număr par și 15 este număr impar, obținem că $24 \cdot c + 15$ este număr impar.

Unitatea 4. Fracții ordinare

Lecția 1. Fracții ordinare. Fracții echivalente. Procente

2 a g i j l subunitare; **b f h** echiunitare; **c d e k** supraunitare. **3 a** 3; **b** 0, 1; **c** 0, 1, 2; **d** 3. **4 a** Horia 38%, Ioana 15%, Radu 18%, Eva 20%; **b** 56%; **c** 35%; **d** 9%. **5** Perechi de fracții echivalente sunt la **a b d g i**. **6 a** 30; **b** 8; **c** 48; **d** 6; **e** 12; **f** 4; **g** 2; **h** 4; **i** 4.

Autoevaluare. **1** B. **2** C. **3 a** 0, 1, 2, ..., 12. **b** 98.

Lecția 2. Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător. Reprezentarea fracțiilor pe axa numerelor

1 a $\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}, \frac{12}{7}, \frac{14}{7}$; **b** $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{9}{9}, \frac{11}{9}, \frac{16}{9}$; **c** $\frac{4}{91}, \frac{4}{11}, \frac{4}{9}, \frac{4}{5}, \frac{4}{4}, \frac{4}{3}$. **2** $\frac{4}{7}<\frac{5}{7}$; $\frac{3}{5}<\frac{4}{5}$; $\frac{16}{25}<\frac{17}{25}$. **3 a** $\frac{2}{7}<\frac{4}{7}$; **b** $\frac{4}{9}<\frac{5}{9}$; **c** $\frac{3}{2}<\frac{5}{2}$. **4 a** $\frac{3}{7}<\frac{3}{5}$; **b** $\frac{5}{5}>\frac{5}{6}$; **c** $\frac{5}{4}>\frac{5}{8}$. **5** $A\left(\frac{2}{9}\right)$; $B\left(\frac{6}{9}\right)$; $C\left(\frac{8}{9}\right)$; $D\left(\frac{11}{9}\right)$; $E\left(\frac{14}{9}\right)$; $M\left(\frac{16}{9}\right)$; $N\left(\frac{20}{9}\right)$; $P\left(\frac{23}{9}\right)$; $R\left(\frac{26}{9}\right)$. **8** $\frac{8}{9}, \frac{7}{9}, \frac{6}{9}, \frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{3}{9}$. **9** Se obțin două puncte distincte, deoarece fracțiile $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ și $\frac{3}{6}$ sunt echivalente și, la fel, fracțiile $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$ și $\frac{5}{5}$ sunt echivalente. **10 a** 0,1 ; **b** 0 ; **c** 1 ; **d** 0, 1, 2.

Autoevaluare. **1** D. **2** A. **3 a** 6, 7, 8, ... **b** $\frac{2}{2n+1}, \frac{3}{2n+1}, ..., \frac{6}{2n+1}$.

Lecția 3. Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție

1 a $1\frac{2}{5}$; **b** $2\frac{3}{5}$; **c** $3\frac{4}{5}$; **d** $5\frac{1}{5}$; **e** $5\frac{3}{8}$; **f** $7\frac{1}{9}$. **2 a** $\frac{15}{7}$; **b** $\frac{23}{7}$; **c** $\frac{31}{7}$; **d** $\frac{49}{9}$; **e** $\frac{59}{9}$; **f** $\frac{80}{9}$. **3 a** între 2 și 3; **b** între 2 și 3; **c** între 3 și 4; **d** între 3 și 4; **e** între 12 și 13; **f** între 7 și 8. **4** $3\frac{5}{6}$ kg.

Lecția 4. Cel mai mare divizor comun a două numere naturale. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile

1 a $\frac{4}{20}$; **b** $\frac{16}{28}$; **c** $\frac{8}{100}$; **d** $\frac{116}{40}$; **e** $\frac{68}{200}$; **f** $\frac{140}{48}$. **2 a** $\frac{18}{12}$; **b** $\frac{12}{42}$; **c** $\frac{66}{18}$; **d** $\frac{24}{54}$; **e** $\frac{96}{150}$; **f** $\frac{66}{216}$. **3 a** $\frac{1}{7}$; **b** $\frac{4}{5}$; **c** $\frac{9}{2}$; **d** $\frac{13}{24}$; **e** $\frac{22}{33}$; **f** $\frac{12}{32}$. **4 a** $\frac{1}{2}$; **b** $\frac{2}{5}$; **c** $\frac{10}{3}$; **d** $\frac{8}{18}$; **e** $\frac{12}{15}$; **f** $\frac{5}{20}$. **5 a** $\frac{3}{12}$; **b** $\frac{16}{20}$. **6 a** 4; **b** 10. **7 a** 5; **b** 3. **8 a** $\frac{1}{18}$; **b** $\frac{8}{11}$; **d** $\frac{49}{64}$; **f** $\frac{25}{27}$. **9 a** $\frac{1}{4}$; **b** $\frac{7}{3}$; **c** $\frac{3}{5}$; **d** $\frac{1}{2}$; **e** $\frac{7}{4}$; **f** $\frac{8}{25}$. **10 a** Din $3n+1<20$ obținem $n \leq 6$. Fracții ireductibile se obțin dacă n este 0, 2, 4 sau 6. **b** n poate fi 0,1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12 sau 13. **11 a** $\overline{64a}$ se divide cu 5, deci a este 0 sau 5. Fracțiile sunt $\frac{640}{885}$ și $\frac{645}{885}$. **b** Suma cifrelor numerelor $\overline{11a2}$ și $\overline{2b70}$ trebuie să fie divizibilă cu 3; a poate fi 2, 5 sau 8; b poate fi 0, 3, 6 sau 9. **12** Fracția scrisă de Radu se obține în urma simplificării fracției $\frac{18}{36}$. Divizorii comuni diferiți de 1 ai numerelor 18 și 36 sunt 2, 3, 6, 9 și 18. Radu a scris una dintre fracțiile: $\frac{9}{18}, \frac{6}{12}, \frac{3}{6}, \frac{2}{4}$ sau $\frac{1}{2}$.

Autoevaluare. **1** C. **2** D. **3** a 0, 1, 2, 4, 6, 7, 8. **b** $a=4$.

Lecția 5. Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale. Aducerea fracțiilor la un numitor comun

1 a $\frac{3}{6}, \frac{5}{6}$; **b** $\frac{2}{8}, \frac{3}{8}$; **c** $\frac{16}{84}, \frac{13}{84}$; **d** $\frac{30}{96}, \frac{49}{96}$. **2 a** ${}^{15)}\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$, ${}^{2)}\frac{7}{15}=\frac{14}{30}$, $\frac{1}{2}>\frac{7}{15}$; **b** ${}^{25)}\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$, ${}^{4)}\frac{16}{25}=\frac{64}{100}$, $\frac{3}{4}>\frac{16}{25}$; **c** ${}^{9)}\frac{3}{14}=\frac{27}{126}$, ${}^{14)}\frac{2}{9}=\frac{28}{126}$, $\frac{2}{9}>\frac{3}{14}$; **d** ${}^{5)}\frac{7}{12}=\frac{35}{60}$, ${}^{12)}\frac{8}{5}=\frac{96}{60}$, $\frac{8}{5}>\frac{7}{12}$. **3 a** $[10,15]=30$; ${}^{3)}\frac{1}{10}=\frac{3}{30}$, ${}^{2)}\frac{11}{15}=\frac{22}{30}$; **b** $[12,20]=60$; ${}^{5)}\frac{5}{12}=\frac{25}{60}$, ${}^{3)}\frac{9}{20}=\frac{27}{60}$; **c** $[18,27]=54$; ${}^{3)}\frac{7}{18}=\frac{21}{54}$, ${}^{2)}\frac{8}{27}=\frac{16}{54}$; **d** $[14,49]=98$; ${}^{7)}\frac{3}{14}=\frac{21}{98}$, ${}^{2)}\frac{5}{49}=\frac{10}{98}$. **4 a** $\frac{6^{(6}}{12}=\frac{1}{2}$, $\frac{14^{(7}}{21}=\frac{2}{3}$; ${}^{3)}\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, ${}^{2)}\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; **b** $\frac{5^{(5}}{20}=\frac{1}{4}$, $\frac{22^{(11}}{55}=\frac{2}{5}$; ${}^{5)}\frac{1}{4}=\frac{5}{20}$, ${}^{4)}\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$; **c** $\frac{9^{(9}}{27}=\frac{1}{3}$, $\frac{9^{(9}}{36}=\frac{1}{4}$; $\frac{1^{(4}}{3}=\frac{4}{12}$, ${}^{3)}\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$; **d** $\frac{48^{(12}}{60}=\frac{4}{5}$, $\frac{32^{(8}}{56}=\frac{4}{7}$; ${}^{7)}\frac{4}{5}=\frac{28}{35}$, ${}^{5)}\frac{4}{7}=\frac{20}{35}$. **5** $[10,3,5]=30$; ${}^{3)}\frac{7}{10}=\frac{21}{30}$, ${}^{10)}\frac{2}{3}=\frac{20}{30}$, ${}^{6)}\frac{4}{5}=\frac{24}{30}$; $\frac{24}{30}>\frac{21}{30}>\frac{20}{30}$, deci echipa galbenă a câștigat cele mai puține meciuri. **6 a** ${}^{4)}\frac{4}{5}=\frac{16}{20}$, ${}^{2)}\frac{7}{10}=\frac{14}{20}$, ${}^{5)}\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$; $\frac{14}{20}<\frac{15}{20}<\frac{16}{20}$; **b** ${}^{24)}\frac{2}{3}=\frac{48}{72}$, ${}^{8)}\frac{4}{9}=\frac{32}{72}$, ${}^{3)}\frac{20}{24}=\frac{60}{72}$; $\frac{32}{72}<\frac{48}{72}<\frac{60}{72}$; **c** ${}^{20)}\frac{11}{12}=\frac{220}{240}$, ${}^{15)}\frac{6}{16}=\frac{90}{240}$, ${}^{8)}\frac{25}{30}=\frac{200}{240}$; $\frac{90}{240}<\frac{200}{240}<\frac{220}{240}$; **d** $3\frac{1}{6}={}^{2)}\frac{19}{6}=\frac{38}{12}$, $1\frac{2}{3}={}^{4)}\frac{5}{3}=\frac{20}{12}$, $2\frac{3}{4}={}^{3)}\frac{11}{4}=\frac{33}{12}$; $\frac{20}{12}<\frac{33}{12}<\frac{38}{12}$.

Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** al doilea copil. **b** 15.

Lecția 6. Adunarea și scăderea fracțiilor

1 a $\frac{4}{5}$; **b** $\frac{8}{13}$; **c** $\frac{13}{15}$; **d** $\frac{20}{21}$. **2 a** $\frac{14}{15}$; **b** $\frac{34}{93}$; **c** $\frac{5}{32}$; **d** $\frac{8^{(2}}{42}=\frac{4}{21}$. **3 a** $\frac{5}{8}$; **b** $\frac{91}{42}$; **c** $\frac{5}{12}$; **d** $\frac{2}{3}$; **e** $\frac{1}{12}$; **f** $\frac{1}{12}$; **g** $\frac{4}{15}$; **h** $\frac{1}{3}$. **4 a** $3\frac{4}{7}$; **b** $4\frac{1}{2}$; **c** $5\frac{11}{15}$; **d** $4\frac{23}{28}$; **e** $4\frac{2}{3}$; **f** $1\frac{1}{6}$; **g** $3\frac{6}{7}$; **h** $1\frac{1}{4}$. **5 a** $\frac{1}{3}$; **b** $\frac{8}{9}$; **c** $\frac{17}{36}$; **d** $\frac{2}{3}$. **6** $\frac{5}{17}$. **7** $12\frac{9}{10}$ metri. **8** Solul A: $1\frac{1}{12}$ cm, solul B: $1\frac{1}{12}$ cm, solul C $\frac{1}{2}$ cm. **9** $6\frac{11}{12}$ litri. **10** $\frac{6}{7}$ și $\frac{6}{21}$.

Autoevaluare. **1** D. **2** D. **3 a** $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. **b** $\frac{1}{4}$.

Lecția 7. Înmulțirea fracțiilor

1 a $\frac{6}{7}$; **b** $\frac{28}{31}$; **c** $\frac{55}{78}$; **d** $\frac{91}{99}$; **e** $\frac{8}{21}$; **f** $\frac{20}{33}$; **g** $\frac{21}{80}$; **h** $\frac{44}{85}$. **2 a** $\frac{6}{5}$; **b** $\frac{5}{6}$; **c** $\frac{2}{15}$; **d** $\frac{5}{33}$; **e** $\frac{7}{24}$; **f** $\frac{1}{15}$; **g** $\frac{5}{6}$; **h** $\frac{3}{20}$. **3 a** 28; **b** $2\frac{2}{5}$; **c** $7\frac{1}{5}$; **d** 9. **4 a** $\frac{1}{11}$; **b** $\frac{3}{2}$; **c** $\frac{1}{39}$; **d** $\frac{1}{3}$. **5 a** $\frac{18}{49}=\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{7}$; **b** $\frac{15}{28}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}$; **c** $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$; **d** $\frac{5}{7}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{7}$ (sunt și alte posibilități). **6** Grosimea tuturor CD-urilor este de $24\cdot\frac{3}{2}$ cm $=36$ cm, deci încap în cutie. **7 a** Pentru 4 perdele se folosesc $4\cdot\frac{23}{5}=\frac{92}{5}=18\frac{2}{5}$ metri de material. Cum $18\frac{2}{5}>18$, nu se pot confecționa 4 perdele. **b** Pentru 6 perdele sunt necesari $6\cdot\frac{23}{5}=27\frac{3}{5}$ metri, deci ajung 28 metri de material. **8 a** $\frac{1}{8}$; **b** $\frac{1}{5}$.

Autoevaluare. **1** B. **2** D. **3 a** $\frac{3}{2}$kg, $\frac{21}{5}$ pahare de apă, $\frac{9}{4}$ lingurițe de esență. **b** $\frac{1}{6}, \frac{7}{15}, \frac{1}{4}$.

Lecția 8. Împărțirea fracțiilor

1 a $\frac{13}{11}$; **b** $\frac{7}{16}$; **c** $\frac{9}{47}$; **d** $\frac{7}{50}$. **2 a** $\frac{15}{8}$; **b** $\frac{44}{35}$; **c** $\frac{7}{23}$; **d** $\frac{3}{8}$; **e** $\frac{8}{33}$; **f** $\frac{11}{36}$; **g** $\frac{47}{19}$; **h** $\frac{10}{13}$. **3 a** $\frac{5}{7}$; **b** $\frac{9}{8}$; **c** $\frac{4}{3}$; **d** $\frac{6}{11}$; **e** $\frac{28}{9}$; **f** $\frac{10}{7}$; **g** $\frac{1}{8}$; **h** $\frac{3}{8}$. **4 a** $\frac{10}{3}$; **b** $\frac{1}{6}$; **c** $\frac{1}{2}$; **d** $\frac{8}{5}$. **5 a** $\frac{8}{9}$; **b** $\frac{20}{27}$. **6 a** $\frac{5}{2}$; **b** $\frac{1}{16}$; **c** $\frac{1}{5}$. **7 a** $2\frac{3}{10}:\frac{3}{5}=\frac{23}{10}\cdot\frac{5}{3}=\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$, deci Radu taie trei bucăți de $\frac{3}{5}$ metri. **b** Lungimea porțiunii rămase este $\frac{23}{10}-3\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$ metri. **8** $200:7\frac{1}{2}=200:\frac{15}{2}=200\cdot\frac{2}{15}=\frac{80}{3}=26\frac{2}{3}$, deci poate confecționa 26 de ecusoane.

Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** 10 zile. **b** $\frac{7}{8}$km.

Lecția 9. Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare

1 a $\frac{1}{128}$; **b** $\frac{32}{243}$; **c** $\frac{64}{729}$; **d** $\frac{1\,331}{343}$; **e** $\frac{625}{256}$; **f** 1; **g** $\frac{19}{43}$; **h** 1. **2 a** $\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$; **b** $\left(\frac{3}{10}\right)^{13}$; **c** $\left(\frac{11}{5}\right)^{10}$; **d** $\left(\frac{3}{4}\right)^{7}$; **e** $\frac{8}{3}$; **f** $\left(\frac{13}{17}\right)^{2}$; **g** $\left(\frac{2}{15}\right)^{55}$; **h** $\left(\frac{14}{27}\right)^{24}$; **i** $\left(\frac{3}{100}\right)^{0}=1$. **3 a** 1; **b** $\left(\frac{3}{4}\right)^{9}$; **c** $\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$; **d** $\left(\frac{1}{3}\right)^{5}$; **e** $\left(\frac{4}{3}\right)^{6}$; **f** $\left(\frac{5}{4}\right)^{12}$. **4 a** $\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$; **b** $\left(\frac{2}{3}\right)^{4}$; **c** $\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$. **5 a** $\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$; **e** $\left(\frac{2}{3}\right)^{5}$; **f** $\left(\frac{7}{6}\right)^{3}$.

Lecția 10. Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare

1 a 25; **b** 224; **c** 30; **d** 333; **e** 88; **f** 72; **g** 39; **h** 1 078. **2 a** $\frac{1}{7}$; **b** 1; **c** $\frac{21}{19}$; **d** $1\frac{1}{2}$; **e** $\frac{2}{3}$; **f** $2\frac{4}{7}$; **g** $\frac{5}{9}$; **h** $3\frac{2}{3}$. **3 a** 1; **b** 1; **c** 4; **d** 45; **e** 64; **f** 324; **g** 416; **h** 252. **4 a** 84 kg; **b** 56 l; **c** 840 lei; **d** 35 km. **5** $3\frac{3}{4}$ metri. **6** $2\frac{1}{4}$ km. **7** S-au vândut 375 de bilete cu 14 lei, 1 400 de bilete cu 10 lei și 725 de bilete cu 5 lei; s-au încasat în total 22 875 lei. **8** 140 parcele cu grâu, 84 parcele cu floarea soarelui. **9** 3% din 4 800 lei este 144 lei. Prețul se mărește cu 144 de lei și devine 4 944 de lei. **10** 12% din 2 400 lei este 288 lei. Prețul scade cu 288 de lei și devine 2 112 lei. **11** Lungimea drumului este 9 km$:\frac{3}{5}=15$ km. Au rămas de parcurs 6 km. **12** $24:\frac{6}{11}=44$ de volume. **13** Masă: 93 600 lei, întreținere 41 400 lei, transport 16 200 lei, activități culturale 12 600 lei, activități sportive 9 000 lei, alte cheltuieli 7 200 lei. **14 a** $\frac{2}{5}$ kg castraveți. **b** Se folosesc $\frac{7}{4}$ kg pentru 7 salate Gourmet și $\frac{9}{5}$ kg pentru 9 salate Caesar; $\frac{9}{5}=\frac{36}{20}, \frac{7}{4}=\frac{35}{20}; \frac{9}{5}>\frac{7}{4}$, deci mai multe roșii se folosesc la salatele Gourmet. **c** Salata Caesar cântărește $\frac{49}{60}$ kg, iar salata Gourmet cântărește $\frac{26}{35}$ kg; $\frac{49}{60}>\frac{26}{35}$, deci salata Caesar cântărește mai mult.

Autoevaluare. **1** B. **2** A. **3 a** 12. **b** 4.

Unitatea 5. Fracții zecimale

Lecția 1. Fracții zecimale; scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă de fracții zecimale; transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară

1 a 0,3; **b** 2,07; **c** 0,043; **d** 20,008; **e** 6,07; **f** 0,09. **2 a** 2; 7. **b** 26; 0,784. **c** 8; 2 678; **d** 26 784; 4. **3** 0,2; 0,32; 0,0032; 0,007; 25,67; 79,58; 0,079. **4** $\frac{2}{100}$; $\frac{1\,023}{1\,000}$; $\frac{4\,532}{100}$; $\frac{156\,003}{1\,000}$; $\frac{78}{10}$; $\frac{9}{10}$. **5** $\left(\frac{123}{1\,000}; 0{,}123\right)$, $\left(\frac{234}{1\,000}; 0{,}234\right)$. **6** Se amplifică fracțiile ordinare cu: 4, 2, 5, 8, 2, 4, 4, 2, respectiv 5. **7 a** 43,56; **b** 305,107. **8 a** $n = 637$; **b** $n = 3$; **c** $n = 130$.

Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** fals. **b** 100 bidoane.

Lecția 2. Aproximări; compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

1 a $1{,}7 < 1{,}8$; **b** $23{,}5 = 23{,}50 < 23{,}51$; **c** $304{,}2 > 204{,}2$; **d** $15{,}7 = 15{,}70$; **e** $0{,}34 < 0{,}44$; **f** $0{,}07 > 0{,}007$. **2 a** $>$; **b** $<$; **c** $>$; **d** $>$. **3 a** F; **b** A; **c** A; **d** A; **e** F; **f** A. **4 a** ordine crescătoare: 0,09; 0,5; 4,25; 7,9; 63,7; ordine descrescătoare: 63,7; 7,9; 4,25; 0,5; 0,09. **6 a** 23,15; **b** 23,1; **c** 23; **d** 20. **7 a** $3 < 3{,}12 < 4$; **b** $0 < 0{,}5 < 1$; **c** $6 < 6{,}29 < 7$; **d** $23 < 23{,}24 < 24$. **8 a** 7,211; 7,213; 7,229; **b** 6,192; 6,194; 6,197; **c** 8,3421; 8,3423; 8,3428; **d** 7,004; 7,125; 7,264. **9** $370 < n \leq 527$; numerele căutate sunt 371, 372, ..., 527, adică $527 - 371 + 1 = 157$ numere.

Autoevaluare. **1** B. **2** C. **3 a** $F = 12{,}32$, $f = 12{,}40$. **b** $36 + 100 + 100 = 236$ fracții.

Lecția 3. Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

1 a 10,8; **b** 9; **c** 4,39; **d** 221,72; **e** 59,82; **f** 105,325. **2** 151,25. **3** 15,37. **4 a** 3,5; **b** 5,8; **c** 8,54; **d** 25,39; **e** 19,002; **f** 201,91. **5** 8,9. **6** 88,35. **7** 76. **8 a** 9,4; **b** 17,9; **c** 76,36; **d** 302,7; **e** 22,5429; **f** 52,4407. **9 a** 4,5; 3,23; **b** 28,65; 17,45. **10** $a = 1$, $b = 2$ sau $a = 2$, $b = 1$. **11** $D - S = d$ și $(D + 23{,}456) - (S - 1{,}544) = D - S + 23{,}456 + 1{,}544 = D - S + 25 = d + 25$; diferența se mărește cu 25. **12 a** Numărul căutat este 458; **b** Numărul căutat este 1 110. **13** Răspuns corect, **a** mai mic decât 10 lei.

Autoevaluare. **1** C. **2** D. **3 a** 72,65 lei. **b** Poate cumpăra o carte și un caiet sau un caiet și un penar; trebuie să renunțe, ori la penar ori la carte.

Lecția 4. Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

1 a 23; **b** 17,3; **c** 3; **d** 1 251; **e** 49 537; **f** 253; **g** 42 003,5; **h** 20. **2 a** 6; **b** 8,25; **c** 411,57; **d** 448,224; **e** 11 023,76; **f** 3 490,63. **3 a** 1,027 kg; **b** 0,276 l. **4 a** 26,6; **b** 22,264; **c** 147,2115; **d** 8,82688; **e** 0,648; **f** 430,752. **5 a** 9; **b** 84; **c** 362,8; **d** 112,416; **e** 66,48; **f** 1,075; **g** 5,103; **h** 47,6. **6 a** 323,925 m; **b** 6,04 kg. **7** $15{,}75 < a \cdot b < 21$; de exemplu $15 < a \cdot b < 21$. **8 a** $3{,}7 \cdot 5 = 18{,}5$; **b** $6{,}12 \cdot 0{,}2 = 1{,}224$; **c** $15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$; **d** $0{,}19 \cdot 100 = 19$. **9 a** $2 \cdot 0{,}1 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 0{,}1 = 10 \cdot 0{,}1 = 1$; **b** 27; **c** 56; **d** 534; **e** 436,8; **f** 15,7. **10** $4{,}2 - 3{,}14 = 1{,}06$; $5{,}3 \cdot 0{,}81 = 4{,}293$; $12{,}6 + 4{,}08 = 16{,}68$. **11** $3{,}36 < a \cdot b < 4{,}16$; $n = 3$. **12** $a \cdot b = 9{,}45$ și $(a + 1) \cdot b = 12{,}95$ sau $a \cdot b + b = 12{,}95$; $b = 12{,}95 - 9{,}45 = 3{,}5$. **13 a** $6{,}51 = 0{,}651 \cdot 10^1 = 0{,}0651 \cdot 10^2$; **b** $18{,}33 = 1{,}833 \cdot 10^1 = 0{,}1833 \cdot 10^2$; **c** $378{,}123 = 37{,}8123 \cdot 10^1 = 3{,}78123 \cdot 10^2 = 0{,}378123 \cdot 10^3$. **14** $4{,}3 \odot 2{,}5 = 12{,}24$.

Autoevaluare. **1** A. **2** D. **3 a** 9 km. **b** Cu $14{,}4 - 12{,}6 = 1{,}8$ km mai mult.

Lecția 5. Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; aplicație: media aritmetică a două sau mai multor numere naturale; transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală; periodicitate

1 a 4,6; **b** 21,25; **c** 0,7; **d** 0,28; **e** 1,18; **f** 47,2; **g** 3,655; **h** 0,064. **2** 0,8; 1,(6); 4,6; 20,5; 4,25; 3,(2); 1,4(6); 95,676; 3,04; 2,08(3); 546,472; 0,0688. **3 a** 1,1(6); **b** 2,4(6); **c** 2,(7); **d** 25,91(6); **e** 0,72; **f** 0,037; **g** 1,975; **h** 109,(6). **4 a** 24; **b** 32; **c** 4,5; **d** 7,7; **e** 2,44; **f** 3,8. **5** 24,4. **6** 21,42. **7** Fracții ordinare care se transformă în fracții zecimale periodice simple: $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{239}{17}$, $\frac{45}{43}$, $\frac{25}{75}$; fracții ordinare care se transformă în fracții zecimale periodice mixte: $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{45}$, $\frac{1}{62}$, $\frac{37}{15}$, $\frac{403}{600}$. **8 a** $n = 10$; **b** $n = 1$; **c** $n = 5$. **9 a** $n = 5$; **b** $n = 13$; **c** $n = 0$. **10 a** $2\,012 - 1 = 2\,011$; $2\,011 : 2 = 1\,005$ rest 1; a 2012-a zecimală este 3; **b** $S = 3 + 49 \cdot (3 + 5) + 3 = 398$. **11 a** $32{,}126 = 321{,}26 : 10^1 = 3\,212{,}6 : 10^2$; **b** $25{,}48 = 254{,}8 : 10^1 = 2\,548 : 10^2$; **c** $672{,}9873 = 6\,729{,}873 : 10^1 = 67\,298{,}73 : 10^2$. **12** 8. **13 a** 15; **b** 254,5; **c** 7,7; **d** 11,66; **e** 28,92; **f** 17,4. **14 a** 21,1; **b** 4 758; **c** 46. **15** 7. **16 a** suma notelor, S, este egală cu 180, deci media notelor este 7,5; **b** calculam suma notelor mai rapid astfel $S = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 = 180$. **17** $a + b + c = 132$, $b = a + 18$, $c = 2 \cdot a$, $d = a + 9$; obinem $a = 21$, $b = 39$, $c = 42$, $d = 30$. **18** $a = 34$, $b = 30$, $c = 48$. **19 a** 8; **b** 7,5; **c** 8.

Autoevaluare. **1** B. **2** A. **3 a** 2. **b** $3 + 1 + 32(3 + 2 + 5) + 3 + 2 = 329$.

Lecția 6. Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul; împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule. Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară

1 a 2,86; **b** 0,635; **c** 13,9475; **d** 3,885; **e** 12,011; **f** 7,82; **g** 16,275; **h** 7,54. **2 a** 0,02345; **b** 6,75; **c** 9,123; **d** 1,578; **e** 1,29567; **f** 0,0004; **g** 0,01234; **h** 0,075. **3 a** 0,65 tone; **b** 24,096 kg; **c** 0,2345 kg. **4** 2,63; 0,058; 3,271; 5,003; 44,87324; 0,252525; **5 a** 12; **b** 11,2; **c** 3; **d** 29,2625; **e** 5672; **f** 800; **g** 5,90625; **h** 17,94. **6 a** $2\frac{5}{9}$, $13\frac{7}{9}$, $125\frac{8}{9}$, $\frac{29}{99}$, $4\frac{37}{99}$, $125\frac{106}{999}$, $29\frac{471}{999}$; **b** $\frac{25}{90}$, $4\frac{59}{90}$, $8\frac{214}{900}$, $16\frac{1\,421}{9\,900}$, $200\frac{79\,046}{99\,900}$. **7 a** 185; **b** 250,15; **c** 10; **d** 20; **e** 100. **8 a** 1 666,(6); **b** 2 100; **c** 426,(6); **d** 26 666,(6); **e** 36,(6). **9** 23,789 : 100 = 0,23789; 237,89 : 100 = 2,3789; 2,3789 : 100 = 0,023789. **10 a** 5,5(6); **b** 3,7(08).

Lecția 7. Număr rațional pozitiv; ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive

1 a 15,4; **b** 3,27; **c** 4,4; **d** 1,524; **e** 41,2; **f** 129,8; **g** 1,6588; **h** 9. **2 a** $\frac{5}{8}$; **b** $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; **c** $\frac{17}{18}$; **d** $\frac{28}{3}$; **e** $\frac{17}{7}$; **f** Z$\frac{5}{11}$. **3 a** 22,7; **b** 4,15; **c** 27,027; **d** 13,86; **e** 68,7; **f** 374,829. **4 a** 43,4; **b** 131,12; **c** 47,92; **d** 34,62; **e** 1,732; **f** 9,01. **5 a** $\frac{43}{45}$; **b** 7; **c** $\frac{5}{18}$; **d** 14. **6 a** 83,7; **b** 228; **c** 9,84; **d** 640; **e** 25,5; **f** 34,162; **g** 1; **h** 90. **7** 2,86; 0,371; 0,36; 0,385. **8 a** $\frac{2}{9}$; **b** 3; **c** 0; **d** $\frac{1}{2}$. **9 a** Model 1: $(12,56 + 41,275 + 29,11) \cdot 10 = 829,45$. Model 2: $12,56 \cdot 10 + 41,275 \cdot 10 + 29,11 \cdot 10 = 829,45$. **b** 5 km. **c** 10 zile.

Autoevaluare. **1** C. **2** D. **3 a** fals. **b** (18,16 – 12,3) : 2,5 = 2,344.

Lecția 8. Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții

1 40% din 25 de pătrate reprezintă 10 pătrate. Aplicând metoda reducerii la unitate, obținem că acoperirea unui pătrat costă 27,95 lei și toată gresia costă 698,75 lei. **2 a** Nu este posibil, deoarece 9 cărți costă 54 de lei, ceea ce depășește valoarea coletului. **b** Aplicăm metoda falsei ipoteze: 7 cărți și 5 caiete. **3** 1 200 de tone de orz și 7 200 de tone de grâu. **4** Aplicăm metoda reducerii la unitate; 1,350 kg. **5** Aplicăm metoda mersului invers. Din î : 2 : 2 : 2 = 80 cm, obținem î = 640 cm. **6 b** Din $(m + 1)$ kg : $1,50^2 = 20$, aplicând metoda mersului invers, obținem că masa lui Radu este m = 44 kg și are indicele 19,(5). **7** 5 lei, respectiv, 4 lei. **8 a** Nu este posibil. Dacă ar fi răspuns corect la toate întrebările, ar fi primit 100 de puncte, iar dacă ar fi răspuns greșit la o întrebare, ar fi primit 93,5 puncte. **b** La un răspuns greșit, Edi este penalizat cu 6,5 puncte. Aplicând metoda falsei ipoteze, obținem că Edi a dat 18 răspunsuri corecte. **9** Este adevărată. **10** Aflăm a câta parte din bazin umple leul: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$. Deducem că leul va umple bazinul într-o zi. **11** Aplicăm metoda comparației. Debitul unui robinet este egal cu 5,4 hl, iar al unei pompe cu 16,2 hl. Cele 5 pompe ar umple bazinul în $\frac{19}{15}$ ore = o oră și $\frac{4}{15}$ din 60 de minute, adică într-o oră și 16 minute. **12** Aplicând metoda mersului invers, obținem x = 0,4(6). **13 a** Nu este posibil, deoarece $\frac{2}{7}$ din 15 nu este număr natural. **b** Aplicăm *metoda mersului invers* și *metoda figurativă.* Deoarece 60% din rest fac tumbe, deducem că 40% din rest aplaudă. Reprezentăm restul cu 5 părți. Atunci cele 4 maimuțe reprezintă două părți. Restul este egal cu 10 maimuțe. Reprezentând numărul total al maimuțelor cu 7 părți, deducem că cele 10 maimuțe reprezintă 5 părți. Erau 14 maimuțe. **14** Reprezentăm cantitatea de lapte cu 10 părți. În prima zi s-a consumat 40% din 10 părți, adică 4 părți. A doua zi s-au consumat 4 părți și încă un litru. Deci două părți reprezintă 12 litri. Inițial se aflau în bidon 60 litri de lapte. **15** Semiperimetrul este egal cu 384 m **:** 2 = 192 m. Aplicăm *metoda figurativă*: reprezentăm lățimea cu 3 părți, iar jumătate din lungime cu două părți și încă 26 m. Atunci lungimea reprezintă 4 părți și încă 52 m. O parte reprezintă (192 m – 52 m) : 7 = 20 m. Lungimea grădinii este egală cu 132 m.

Autoevaluare. **1** C. **2** C. **3 a** Nu este posibil, deoarece, dacă 40% din rest ar reprezenta 3,5 km, atunci 60% din rest nu poate reprezenta 3,3 km. **b** Reprezentăm lungimea traseului cu 15 părți. În prima etapă a parcurs o treime din traseu, ceea ce reprezintă 5 părți. În a doua etapă a parcurs 40% din restul de 10 părți, adică 4 părți. Restul de 6 părți reprezintă 3,3 km. Traseul măsura 8,25 km.

Recapitulare și evaluare. **1** a. **2** b. **3** c. **4** a. **5** a. **6** c. **7** b. **8** a. **9** d. **10** c. **11** b. **12** c. **13** Semiperimetrul este egal cu 516 m : 2 = 258 m. Aplicăm *metoda figurativă,* reprezentând lungimea cu 5 părți și lățimea cu 3 părți. O parte reprezintă 258 m : 8 = 32,25 m. Lungimea este egală cu 161,25 m, iar lățimea este egală cu 96,75 m. **14** Fie s suma inițială. La Piață a cheltuit $\frac{3}{7}\cdot s$ și i-a rămas un rest, $r_1 = \frac{4}{7}\cdot s$. La carmangerie a cheltuit $40\% \cdot r_1$ și i-a rămas un rest, $r_2 = 60\% \cdot r_1 = 120$ lei. Aplicând *metoda mersului invers,* obținem $r_1 = 200$ lei și apoi $s = 350$ lei.

Lecția 9. Probleme de organizare a datelor. Frecvență. Grafice cu bare. Grafice cu linii. Media unui set de date statistice

1 a Clasa a V-a A: fotbal 12, handbal 4, baschet 7; a V-a B: handbal 6, total 25; a V-a C: handbal 12, baschet 9. În total, 31 de elevi preferă fotbalul și 22 preferă handbalul. **b** fotbalul (31 de elevi); **c** $\frac{22}{80} = 27{,}5\%$; **d** 30%. **2** Mihnea 6p, Cătălin 6p, Dana 8p, Mădălina 8p, Andrei 8p, Ștefan 10p. **4 a** clasa a VI-a; **b** $30\% \cdot 300 = 90$ de elevi; **c** În clasa a VI-a sunt $20\% \cdot 300 = 60$ de elevi, un număr mai mic decât 70% din numărul elevilor de clasa a VII-a, care înseamnă $70\% \cdot 90 = 63$ de elevi. **5 a** vineri; **b** aproximativ 27 de mașini. **6 a** media estimată este 6 (cele mai multe note); **b** media clasei este $\frac{10\cdot3+9\cdot4+8\cdot2+6\cdot8+5\cdot4+4\cdot1}{3+4+2+8+4+1} = 7$, mai mare decât media estimată. **7 a** 200 de bilete; **b** 15%; **c** 10%; **d** 3450 lei; **e** 17,25 lei.

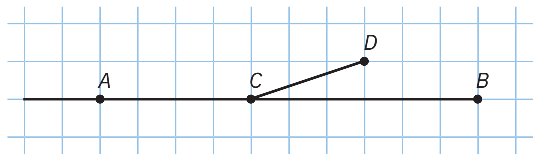
Autoevaluare. **1** C. **2** B. **3 a** 6; **b** 76%.

Unitatea 6. Elemente de geometrie și unități de măsură

Lecția 1. Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment de dreaptă

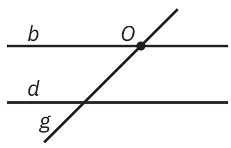
1 a *A* și *B* sunt puncte identice și notăm $A = B$; **b** *A* și *C* sunt puncte distincte și notăm $A \neq C$. **2 c** $A \neq B = C$. **3** Afirmația $A \neq C \neq B$ este adevărată. **5** *A* și *C* pot fi atât identice, cât și distincte, deoarece în ipoteză nu scrie *A* diferit de *C*. **6** Propozițiile **a** și **b** sunt adevărate, iar **c** este falsă. Desenul din figura 5 reprezintă semidreapta *EF*. **7 a** *A* și *B* se numesc extremitățile (capetele) segmentului *AB*. **b** Pentru semidreapta *EF*, punctul *E* indică originea, iar punctul *F* indică sensul. **8** Sunt 3 segmente: *AB*, *AC*, *BC*. **9** În figura 7 a notat greșit două puncte distincte cu aceeași literă. În figura 8 a desenat semidreapta *CD*, iar în figura 9 a desenat semidreapta *FE*. **10 a** segment de dreaptă; **b** segment de dreaptă; **c** o semidreaptă. **11 a** *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*; **b** *AC*, *AD*, *BC*, *BD*. **12 a** segment de dreaptă; **b** dreaptă; **c** punct; **d** semidreaptă; **e** punct; **f** plan; **g** semidreaptă. **14** Punct, semidreaptă, dreaptă, plan, semidreaptă, punct, triunghi, cerc, dreaptă, segment de dreaptă, respectiv, cub. **15 a** *BC* și *DE*; **b** *AB*, *BC* și *BD*; **c** *AC*, *AE*, *BC* și *CE*; **d** *AD* și *AC*; **e** *AD* și *BD*. **16** *B*, *I*, *N* sunt marcate vertical, în această ordine.

Autoevaluare. **1** D. **2** B. **3** Vezi figura alăturată.



Lecția 2. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Puncte coliniare. Pozițiile relative a două drepte: drepte concurente, drepte paralele

1 a adevărată. **2 c** *A*, *B* și *E*. **3 d** și **e** sunt false, iar celelalte sunt adevărate. **4 a** *G*, *E* și *O*. **b** punct interior; **c** punct exterior; **d** puncte coliniare; **e** puncte necoliniare; **f** drepte identice. **8** o infinitate de drepte. **9 a** identice; **b** o infinitate; **c** distincte; **d** dreaptă. **10 a** 3; **b** 6. **11 a** *AV* și *a*; *AV* și *b*; *AV* și *c*; **b** dreptele *a* și *b*; *b* și *c*; *a* și *c*; **c** *AB* și *a*; *TE* și *b*; *VF* și *c*. **13** Vezi figura. **15** Dacă $A = B = C$, determină o infinitate de drepte. Dacă $A = B \neq C$, atunci determină o singură dreaptă. Dacă $A \neq B \neq C \neq A$, atunci determină o dreaptă, dacă sunt coliniare, respectiv, 3 drepte, dacă sunt necoliniare. **16 a** Dacă punctele sunt coliniare, atunci determină o dreaptă. **b** Dacă oricare 3 puncte sunt necoliniare, atunci determină 28 de drepte distincte. **17** Dacă cele 3 drepte sunt paralele, numărul punctelor de intersecție este egal cu zero; dacă două dintre drepte sunt paralele, numărul punctelor de intersecție este egal cu 2; dacă cele 3 drepte sunt concurente în același punct, au un singur punct de intersecție, iar dacă sunt concurente două câte două, atunci există 3 puncte de intersecție.



Autoevaluare. **1** B. **2** B. **3 a** O singură dreaptă, dacă toate cele 20 de puncte sunt coliniare. **b** 190 de drepte distincte, dacă oricare 3 puncte din cele 20 sunt necoliniare.

Lecția 3. Lungimea unui segment. Distanța dintre două puncte. Segmente congruente

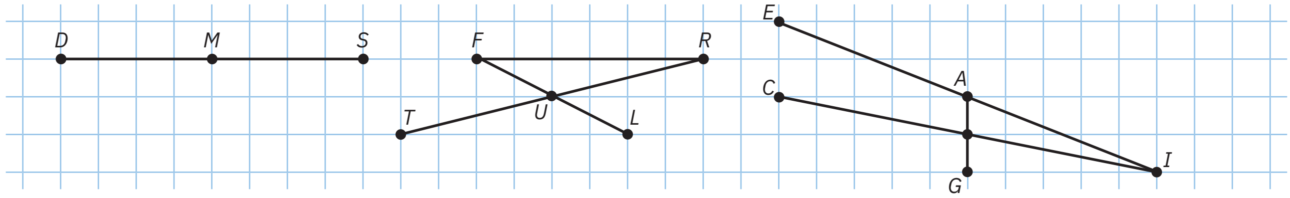
1 Ioana. **4** 18 cm. **5 b** 5 cm. **6** $AB = CD \Rightarrow d(A, B) = d(C, D)$. **7 i b** 1 154 m; **ii d** 1 275 m. **9 c** $AB \equiv BC$. **10 a** Segmentul *AB* este congruent cu segmentul *CD*. Aplicând definiția segmentelor congruente, rezultă că lungimea segmentului *AB* este egală cu lungimea segmentului *CD*. **b** Lungimea segmentului *AB* este egală cu lungimea segmentului *CD*. Aplicând definiția segmentelor congruente, rezultă că segmentul *AB* este congruent cu segmentul *CD*. **c** Segmentul *AB* este congruent cu segmentul *CD* și segmentul *CD* este congruent cu segmentul *EF*. Aplicând tranzitivitatea relației de congruență, rezultă că segmentul *AB* este congruent cu segmentul *EF*. Aplicând definiția segmentelor congruente, rezultă că lungimea segmentului *AB* este egală cu lungimea segmentului *EF*. **d** Lungimea segmentului *AB* este egală cu lungimea segmentului *CD* și lungimea segmentului *CD* este egală cu lungimea segmentului *EF*. Aplicând tranzitivitatea relației de egalitate, rezultă că lungimea segmentului *AB* este egală cu lungimea segmentului *EF*. Aplicând definiția segmentelor congruente, rezultă că segmentul *AB* este congruent cu segmentul *EF*. **11** $AB = CD \Rightarrow AB \equiv CD$. **12** $AB \equiv AC \Rightarrow AC = AB = 3$ cm $\Rightarrow BC = AB + AC = 6$ cm. **13** $AB = AC \Rightarrow AB \equiv AC$. **14 a** $AB + BC = AC \Rightarrow A, B, C$ sunt coliniare, în această ordine. **b** $AB + AC = BC \Rightarrow B, A, C$ sunt coliniare, în această ordine. **c** $BC + AC > AB \Rightarrow A, B, C$ sunt necoliniare. **d** $AC + BC = AB \Rightarrow A, C, B$ sunt coliniare, în această ordine. **15** În funcție de ordinea punctelor avem $BC = 3$ cm sau $BC = 7$ cm. **16 a** Este posibil. $AB = 40$ m și $BC = 50$ m, iar 40 m = 80% din 50 m. **b** 200 m. **17** 8 cm. **18** 3 cm. **19 d** $E - U - C - L - I - D$. **20** Observăm că lungimea segmentului $A_nA_{n+1} = n$ cm; 6 cm, 4 cm, 19 cm, respectiv, $(1 + 2 + 3 + ... + 19)$ cm = 190 de cm. **21** Observăm că lungimea segmentului $A_nA_{n+1} = 3n$ cm; 57 cm, respectiv 570 cm. **22** $2AC = AB + AD \Leftrightarrow 2(AB + BC) = AB + (AB + BC + CD) \Leftrightarrow BC = CD$. Obținem $BC = 2^{11}$ cm : $2 = 2^{10}$ cm = 1 024 cm.

Autoevaluare. **1** D. **2** D. **3 a** QR este jumătate din PQ, ceea ce înseamnă că PQ reprezintă două treimi din PR, adică 8 cm. **b** Distingem două cazuri. Dacă S este punct interior segmentului PQ, atunci $PS = 5{,}6$ cm. Dacă S este punct interior segmentului QR, atunci $PS = 10{,}4$ cm.

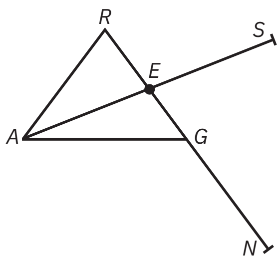
Lecția 4. Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct față de un punct

3 a 4 cm. **4 c** M. **5 b** Este falsă, deoarece formularea este greșită: mijlocul unui segment este un punct. **6** $AC = 5$ cm. **7** $BC = AC = 5$ cm $\Rightarrow BC \equiv AC \Rightarrow C$ este mijlocul segmentului AB. **8 a** F este mijlocul segmentului $GH \Rightarrow FH \equiv FG \Rightarrow FH = FG = 4$ cm; $EH = 12$ cm; **b** 6 cm. **9** M este mijlocul segmentului $BC \Rightarrow MB \equiv MC \Rightarrow MB = MC = x$. M este mijlocul segmentului $AD \Rightarrow MA \equiv MD \Rightarrow MA = MD = y$; $AB = MA - MB = y - x$ și $CD = MD - MC = y - x$. Prin tranzitivitate, $AB = CD \Rightarrow AB \equiv CD$. **10** Ca la problema anterioară, $MB = MC = x$. Din $AB \equiv CD \Rightarrow AB = CD = t$. Atunci $MA = AB + BM = t + x$ și $MD = CD + CM = t + x \Rightarrow MA = MD \Rightarrow MA \equiv MD \Rightarrow M$ este mijlocul segmentului AD. **11 a** 29,70 m : 16,5 = 1,8 m. **12 a** I este mijlocul segmentului AD. **b** E și A sunt simetrice față de V. **13 b** D. **14 a** A și C sunt simetrice față de O. **b** B este simetricul lui D față de O.

15



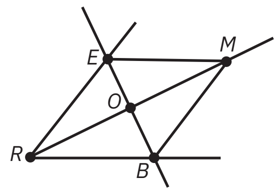
16



17 $ON = OT = 4$ cm. **18** $ON = OT = 5$ cm $\Rightarrow ON \equiv OT \Rightarrow O$ este mijlocul segmentului $NT \Rightarrow T$ și N sunt simetrice față de O. **19 a** C, E, A, S sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $CE \equiv EA \equiv AS$. **b** Notăm $CE = EA = AS = 2x$. Fie M mijlocul segmentului $CS \Rightarrow MC \equiv MS \Rightarrow MC = MS = CS : 2 = 6x : 2 = 3x$; $ME = MC - CE = 3x - 2x = x$; $MA = MS - AS = 3x - 2x = x$. Deci $ME = MA \Rightarrow ME \equiv MA \Rightarrow M$ este mijlocul segmentului $EA \Rightarrow E$ și A sunt simetrice față de M. **20** $d(H, R) = 10$ m $\Rightarrow HR = 10$ m; $d(D, H) = d(D, R) = 10$ m : 2 = 5 m. D și H sunt simetrice față de $I \Rightarrow I$ este mijlocul segmentului $DH \Rightarrow DI \equiv HI \Rightarrow DI = HI = HD : 2 = 5$ m : 2 = 2,5 m. Obținem că $d(I, R) = 2{,}5$ m + 5 m = 7,5 m. **21** Vezi *Gândire critică*, pagina 193. **a** $n = 32$.

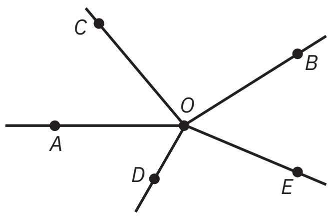
Autoevaluare. **1** C. **2** B. **3 a** $PQ = ST = 3$ cm $\Rightarrow PQ \equiv ST$. **b** R este mijlocul segmentului $QS \Rightarrow QR \equiv SR \Rightarrow QR = SR = x$ cm. Atunci $PR = TR = (x + 3)$ cm $\Rightarrow PR \equiv TR \Rightarrow R$ este mijlocul segmentului $PT \Rightarrow P$ și T sunt simetrice față de R.

Lecția 5. Unghi: definiție, notații, elemente. Interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi



1 d $\sphericalangle EVA$. **2** Primele două sunt adevărate, iar ultimele sunt false. A patra este falsă, deoarece laturile unghiului, fiind semidrepte, sunt infinite și nu pot fi măsurate. **3** $\sphericalangle MIT$ sau $\sphericalangle TIM$; vârful este I, iar laturile sunt semidreptele IM și IT. **4** Vârfurile sunt E, O, A, respectiv, D, iar laturile sunt semidreptele EG și EO, OD și OR, AF și AN, respectiv, DA și DI. **5 a** GU; **b** exterior; **c** interior; **d** U, N, G, H și I; **e** A și B; **f** T și Z. **6 a** $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle AOB$ *și* $\sphericalangle BOC$; **b** OA și OB, iar vârful este O; **c** OB și OC, iar vârful este O; **d** $\sphericalangle AOC$, iar vârful este O; **e** OB, respectiv, AOB; **f** vârf, punctul O. **7** Toate sunt adevărate. **11** Vezi configurația geometrică alăturată.

Lecția 6. Măsura unui unghi. Unghiuri congruente



1 50°, 90°, 115°, respectiv, 155°. **2 b** $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle PRS$; $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle MNO$; $\sphericalangle GHI \equiv \sphericalangle TUV$. **3** În figura 5, vârful B al unghiului ABC nu este poziționat în O. În figura 6, vârful B al unghiului ABC nu este poziționat în O și nici latura BA în dreptul diviziunii de 0°. **4** Din $\sphericalangle RIN \equiv \sphericalangle CRI \Rightarrow \sphericalangle RIN = \sphericalangle CRI = 60°$. **5 a** $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$; **b** $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$. **9 a** măsura unghiului A este egală cu măsura unghiului B și scriem: $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. **b** $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. Aplicând definiția unghiurilor congruente $\Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. **c** $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. Am aplicat tranzitivitatea relației de congruență. **10** Toate au măsura egală cu 90° și atunci cele trei unghiuri sunt congruente. **11** Vezi configurația geometrică alăturată.

Lecția 7. Clasificarea unghiurilor. Calcule cu măsuri de unghiuri

1 a unghiul de 1° sexagesimal; **b** 180°; **c** 0°; **d** între 0° și 90°; **e** între 90° și 180°. **2** Nul, ascuțit, obtuz, drept, respectiv, alungit. **3** Obtuz, ascuțit, respectiv, drept. **4 a** ascuțit; **b** drept; **c** obtuz. **5** Nule: $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle G$; ascuțite: $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle F$; drepte: $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle J$; obtuze: $\sphericalangle D$ și $\sphericalangle H$; alungite: $\sphericalangle E$ și $\sphericalangle I$. **6** Doar propozițiile **d** și **g** sunt false. **7 a** 480'; **b** 2 100'; **c** 550'; **d** 930'; **e** 3 945'. **8 a** 5°; **b** 20°; **c** 62°; **d** 62°30'; **e** 80°45'. **9 a** 90°; **b** 47°; **c** 152°; **d** 22°; **e** 83°42'; **f** 14°31'; **g** 46°7'; **h** 138°45'; **i** 18°45'; **j** 24°34'. **10** A transformat greșit 1°. Rezultat corect: 40°10'. **11 a** 56°; 57°; 56°; **b** 27°; 28°; 28°; **c** 107°; 108°; 107°; **d** 59°; 60°; 60°; **e** 89°; 90°; 90°. **12** 118° + 62° = 73° + 107° = 44° + 136° = 180°. **13 a** n ia valorile 0, 1, 2, 3, ..., 24; **b** 25; **c** 26, 27, 28, ..., 114; **d** 115. **14** $\sphericalangle B = 2\,400' = 40° = \sphericalangle A \Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. **15** $\sphericalangle A = 1\,800' = 30°$. **16 b** ABC. **17 c** ABD. **18** $\sphericalangle SOC = 117°$. **19 b** 6°. **20 d** 65°. **21** Măsura unghiului BOM este egală 40° – 20°= 20°. Din $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM \Rightarrow \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM$. **22** $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM \Rightarrow \sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM = 20°$. $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOM + \sphericalangle BOM = 20° + 20° = 40°$. **23** $\sphericalangle BOD = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOC - \sphericalangle COD = 180° - 70° - 40° = 70°$, deci $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD = 70° \Rightarrow \sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$. **24 a** $\sphericalangle DOE = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOD - \sphericalangle EOB = 158° - 50° - 79° = 29°$. **b** $\sphericalangle AOE = \sphericalangle BOE = 79° \Rightarrow \sphericalangle AOE \equiv \sphericalangle BOE$. **25** $\sphericalangle LOT = 40°$; $\sphericalangle COT = \sphericalangle COL + \sphericalangle LOT =$

$= 140° + 40° = 180° \Rightarrow \sphericalangle COT$ este unghi alungit $\Rightarrow C, O, T$ sunt coliniare. **26 a** $\sphericalangle CBD = 75\% \cdot 60° = 45° = \sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CBD$; **b** $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = 45° + 45° = 90° \Rightarrow \sphericalangle ABD$ este unghi drept $\Rightarrow BA \perp BD$. **27 a** $\sphericalangle BIA \equiv \sphericalangle BIS \Rightarrow \sphericalangle BIA = \sphericalangle BIS = \sphericalangle AIS : 2 = 120° : 2 = 60°$. **b** $\sphericalangle LIS = \sphericalangle AIL - \sphericalangle AIS = 180° - 120° = 60°$. Din $\sphericalangle BIS = \sphericalangle LIS \Rightarrow \sphericalangle BIS \equiv \sphericalangle LIS$. **28** $\sphericalangle EAR = 30°$; $\sphericalangle TAE = 60°$. **29** Distingem două cazuri: C se află în interiorul unghiului NRI, caz în care $\sphericalangle CRN = 25°$ și $\sphericalangle CRI = 75°$, respectiv, C se află în exteriorul unghiului NRI, caz în care $\sphericalangle CRN = 50°$ și $\sphericalangle CRI = 150°$.

Autoevaluare. **1** A. **2** D. **3 a** $\sphericalangle PAO = 30°$; $\sphericalangle VAO = \sphericalangle VAP + \sphericalangle PAO = 60° + 30° = 90° \Rightarrow \sphericalangle VAO$ este unghi drept. **b** Din $\sphericalangle VAP = \sphericalangle RAO = 60° \Rightarrow \sphericalangle VAP \equiv \sphericalangle RAO$.

Lecția 8. Figuri congruente. Axa de simetrie

2 a $\Delta ACP \equiv \Delta DCP$. **b** ΔEBP s-a suprapus peste ΔEFP și atunci $\Delta EBP \equiv \Delta EFP$. **c** Sunt congruente. **4 a** M este mijlocul segmentului AB și $AM \equiv BM$; OM este axa unghiului AOB și $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM$. **b** T este mijlocul segmentului AO și $AT \equiv TO$; BT este axa de simetrie a unghiului ABO și $\sphericalangle ABT \equiv \sphericalangle OBT$. **6** Toate sunt adevărate. **7** A, D, E, M, T, V, W, O.

Autoevaluare. **1** C. **2** B. **3 b** Cifra 3 are o axă de simetrie, iar cifra 8 admite două axe de simetrie.

Recapitulare și evaluare. **1** a. **2** b. **3** c. **4** b. **5** a. **6** a. **7** b. **8** c. **9** A; A; F; A. **10** d, a, b. **11 a** 10 cm. **b** $DP = RT = 7$ cm $\Rightarrow DP \equiv RT$. **c** Se arată că E este mijlocul segmentului DT. **12 a** $\sphericalangle DOL = 70°$. Din $0° < \sphericalangle DOL < 90° \Rightarrow \sphericalangle DOL$ este unghi ascuțit. **b** $\sphericalangle COL = \sphericalangle COD + \sphericalangle DOL = 110° + 70° = 180° \Rightarrow \sphericalangle COL$ este unghi alungit $\Rightarrow C, O, L$ sunt coliniare. **c** $\sphericalangle COT = \sphericalangle DOL = 70° \Rightarrow \sphericalangle COT \equiv \sphericalangle DOL$.

Lecția 9. Unități de măsură pentru lungime. Aplicație: perimetre

1 a 85 dam > 85 dm; **b** 24 cm = 240 mm; **c** 72 km = 7 200 dam; **d** 6,8 km > 601 dam; **e** 3,4 dm > 333 mm; **f** 0,764 dam > 7 630 mm. **2 b c** sunt adevărate; **a d e f** false. **3 a** 7,5 m; **b** 458 m; **c** 246,5 m; **d** 2 350 m; **e** 8 250 m. **4 a** 62,5 dm; **b** 236 dm; **c** 24 506 dm; **d** 1 750 dm; **e** 3,6 dm; **f** 0,475 dm; **g** 0,455 dm; **h** 0,032 dm; **i** 2,35 dm; **j** 0,06 dm. **5 a** 325 dam; **b** 8,5 dam; **c** 6,8 dam; **d** 1 320 dam; **e** 0,6 dam; **f** 8,27 dam; **g** 4,05 dam; **h** 0,02 dam; **i** 0,0045 dam; **j** 0,08 dam. **6 a** 1 238 dm; **b** 77,3 cm; **c** 6 242,4 dam; **d** 24,8 m; **e** 24,75 hm; **f** 2,81 km. **7 a** 6 cm; **b** 119,6 m; **c** 2,61 hm; **d** 85,175 dm; **e** 3,94 km; **f** 2,32 dam. **8 a** cm; **b** m; **c** km; **d** mm; **e** cm; **f** km. **10** A – C – E – B. **11** Lungimile lipsă: 1,7 km și 166,5 dam; perimetrele care lipsesc 17,2 m și 98 cm. **12** 60 cm. **13** $x = 12$ m și $y = 12,8$ m. **14** Perimetre lipsă: 201,6 m; 18,36 m; 1 881 m; lungime: 209,4 cm; lățime: 28 hm. **15** Ioana. **16** 116 m, 118 m, respectiv, 120 m. **17** $L = 18$ m; $l = 6$ m. **18** Perimetrul dreptunghiului este egal cu 2 450 m. Latura pătratului are 306,25 m. **19** 39 cm.

Autoevaluare. **1** C. **2** D. **3 a** 549 m : 3 = 183 m = 1 830 dm > 1 820 m. **b** 182 m, 183 m, respectiv, 184 m.

Lecția 10. Unități de măsură pentru arie. Aplicații: Aria pătratului/dreptunghiului

1 a 9 cm²; **b** 144 m²; **c** 6,25 dam²; **d** 0,09 km²; **e** 14 400 mm²; **f** 0,0001 ha; **g** 56,25 cm²; **h** 20,25 dm². **2 a** 16 m²; **b** 50,5 cm²; **c** 7 m²; **d** 567 m². **3** $P = 22$ cm, $A = 30$ cm². **4 a** 7,2 m²; **b** 39 000 m²; **c** 2 500 m²; **d** 6,7 m²; **e** 300 m²; **f** 7,2 m². **5 a** 1 528 cm²; **b** 82 000 dm²; **c** 0,7 dam²; **d** 0,147 km²; **e** 250 ari; **f** 0,1 ha. **6 a** cm²; **b** m²; **c** km². **8 a** 36 cm² > 123 mm²; **b** 22 dam² < 1 ha; **c** 72 ari < 0,072 km²; **d** 74 m² < 7,4 hm²; **h** 0,05 dam² = 500 dm²; **f** 3,5 m² > 3,49 dm². **9** Suprafața curții este de 987 m², iar suprafața unei plăci este de 0,25 m². Sunt necesare 3 948 plăci. **10** 6 zile. **11** 9 cm². **12** 3 600 m² : 7 200 = 0,5 m². **13** 200 cm² · 30 · 24 = 144 000 cm² = 14,4 m². **14** 75 l · 36 = 2 700 l = 2,7 kl. **15 a** 120 m · 4 – 3 m = 477 m. **b** 14 400 m² = 1,44 ha. **16** 90 dam · 54 dam = 4 860 dam² = 486 000m²; 7 lei · 0,2 · 486 000 = 680 400 lei. **17 a** 1 750m², respectiv 190 m. **b** Este cuprinsă între 1 750 m² – 315 m² · 3 și 1 750 m² – 314 m² · 3, adică între 805 m² și 808 m².

Autoevaluare. **1** B. **2** D. **3 a** (50 m + 30 m) · 2 = 160 m. **b** 50 m · 30 m – 100 m² = 1 400 m².

Lecția 11. Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic

1 a 8; **b** 6; **c** 12; **d** pătrate. **2 a b** false; **c d** adevărate. **3 a** 6 250 dm³; **b** 6 000 dm³; **c** 500 dm³; **d** 3 dm³; **e** 4 dm³; **f** 0,0475 dm³. **4 a** 2 800,8 m³; **b** 67,103 cm³; **c** 653 965 dam³; **d** 820,166 hm³. **6** $p = 2$; $V = 8$ m³. **7** $\overline{2a}$ dm³ = 27 dm³ = (3 dm)³ $\Rightarrow l = 3$ dm. **8** 131,10 lei. **9 a** O muchie are 15 cm lungime. Perimetrul unei fețe este 60 cm, iar aria 225 cm². **b** 3 375 cm³. **10 a** 150 cm²; **b** 70 cm. **11** Lungimi lipsă: 20 dm, 6 hm. Volume lipsă: 15,625 m³; 13 824 cm³. **12 a** (2 · 5 · 8 + 2 · 3 · 5 + 2 · 8 · 3)cm² = 158 cm²; **b** P = (8 · 4 +5 · 2 + 3 · 8)cm = 66 cm. **13** Bazinul are volumul de 6 000 m³; 6 000 000 litri. **14** O cărămidă are volumul de 0,0042 m³, iar cele 210 cărămizi ocupă 0,882 m³. Volumul mortarului este 0,118 m³. **15**. Zăpada căzută formează un paralelipiped dreptunghic cu volumul de 1 750 m³. Ea cântărește 105 tone. **16** În butoi se colectează 729 de litri, adică 0,729 m³. Apa se ridică la înălțimea de 729 mm. **17 a** 240 dm³; **b** În acvariu erau 200 l apă, din care au rămas 120 l. Apa rămasă se ridică la înălțimea de 3 dm, deci nivelul a scăzut cu 20 cm.

Autoevaluare. **1** D. **2** C. **3 a** $V = 300$ m³. **b** Volumul unei cărămizi este de 300 m³ : 0,003 m³ = 100 000. Se pot pune 100 000 de cărămizi. Alternativ, lungimea containerului este egală cu lungimea a 40 de cărămizi, lățimea containerului egală cu lățimea a 50 de cărămizi, iar înălțimea egală cu cea a 50 de cărămizi și atunci încap 40 cărămizi · 50 · 50 = 100 000 de cărămizi.

Recapitulare și evaluare. **1** b. **2** a. **3** b. **4** c. **5** A, A, F, A. **6** d, a, b. **7** a. **8** b. **9 a** 10 cm. **b** Se arată că E este mijlocul segmentului DT. **10 a** $\sphericalangle DOL = 70°$; $\sphericalangle COL = \sphericalangle COD + \sphericalangle DOL = 110° + 70° = 180° \Rightarrow \sphericalangle COL$ este unghi alungit $\Rightarrow C, O, L$ sunt coliniare. **b** $\sphericalangle COT = \sphericalangle DOL = 70° \Rightarrow \sphericalangle COT \equiv \sphericalangle DOL$. **11 a** 240 dm³; **b** 5 dm.

www.art-educational.ro
ISBN 978-606-076-249-2