MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

Marcel Ţena • Marian Andronache • Dinu Şerbănescu

MATEMATICĂ M1

MANUAL PENTRU CLASA A XI-a

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

I. PERMUTĂRI

NOŢIUNEA DE PERMUTARE ÎNMULŢIREA PERMUTĂRILOR

Am văzut în clasa a X-a că o ***permutare*** a unei mulţimi nevide A este o funcţie bijectivă definită pe A cu valori în A, iar dacă mulţimea A are n elemente, atunci numărul permutările sale este $n\,!$.

Vom folosi noţiunea de permutare pentru definirea, în capitolul „Determinanţi”, a unei caracteristici numerice, numită determinantul unei matrice. Pentru acest scop este suficient să considerăm permutările mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm mulţimea acestor permutări cu S_n şi o numim ***mulţimea permutărilor de gradul n***.

De obicei, o permutare $\sigma \in S_n$ se notează printr-un tablou de tipul:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Prin această scriere, ***compunerea*** permutărilor (pe care o notăm multiplicativ) se face foarte uşor.

Astfel, dacă $\sigma,\tau \in S_n$ iar $\tau(i) = j$, $\sigma(j) = k$, atunci $(\sigma\circ\tau)(i) = (\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(j) = k$, deci compunerea se face după următoarea „schemă”:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & k & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ \tau(1) & (2) & \ldots & j & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & k & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

De exemplu, dacă $\sigma,\tau \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, atunci

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Datorită notaţiei multiplicative, această operaţie se numeşte ***înmulţirea*** permutărilor. Deoarece injectivitatea şi surjectivitatea sunt păstrate prin compunere, rezultă că prin înmulţirea a două elemente din S_n obţinem un element din S_n.

PROPRIETĂŢILE ÎNMULŢIRII PERMUTĂRILOR

Am văzut în clasele a IX-a şi a X-a că, pe mulţimea funcţiilor definite pe o mulţime nevidă A cu valori în A, compunerea funcţiilor este asociativă, funcţia $1_A : A \to A$ cu $1_A(x) = x$, $x \in A$ este element neutru şi orice funcţie bijectivă este inversabilă.

În consecință, înmulțirea permutărilor are, pe S_n, proprietățile:

a) este asociativă, deci $(\sigma\tau)\varphi = \sigma(\tau\varphi)$, $\forall \sigma,\tau,\varphi \in S_n$.

b) are element neutru, anume permutarea identică $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$,

deci $\sigma e = e\sigma = \sigma$, $\forall \sigma \in S_n$.

c) orice permutare este inversabilă, deci pentru $\sigma \in S_n$ există $\sigma^{-1} \in S_n$ astfel încât $\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = e$; permutarea σ^{-1} se numeşte ***inversa*** permutării σ.

Observații. 1) Pentru $\sigma \in S_n$, permutarea σ^{-1} se obține schimbând locul celor două linii din tabloul care defineşte permutarea σ.

De exemplu, dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Înmulțirea permutărilor pe S_n, $n \geq 3$ nu este comutativă, deci, în general, $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ pentru $\sigma,\tau \in S_n$.

În situația particulară în care, pentru permutările $\sigma,\tau \in S_n$, avem $\sigma\tau = \tau\sigma$, vom spune că cele două permutări comută.

3) Proprietățile înmulțirii permutărilor ne permit să definim, pentru o permutare $\sigma \in S_n$, puterile întregi ale lui σ, astfel:

$$\sigma^k = \begin{cases} \underbrace{\sigma \cdot \sigma \cdot \ldots \cdot \sigma}_{k \text{ ori}}, & \text{pentru } k \in \mathbb{N}^* \\ e, & \text{pentru } k = 0 \\ \left(\sigma^{-k}\right)^{-1}, & \text{pentru } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Din această definiție rezultă că $\sigma^k \cdot \sigma^p = \sigma^{k+p}$ şi $\left(\sigma^k\right)^p = \sigma^{kp}$, $\forall\, k,p \in \mathbb{Z}$.

Dacă $\sigma,\tau,\varphi \in S_n$ avem echivalențele:

a) $\sigma\tau = \sigma\varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi$

b) $\tau\sigma = \varphi\sigma \Leftrightarrow \tau = \varphi$

Într-adevăr, $\sigma\tau = \sigma\varphi \Leftrightarrow \sigma^{-1}(\sigma\tau) = \sigma^{-1}(\sigma\varphi) \Leftrightarrow (\sigma^{-1}\sigma)\tau = (\sigma^{-1}\sigma)\varphi \Leftrightarrow e \cdot \tau = e \cdot \varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi$ şi analog pentru echivalența de la punctul b).

Echivalențele a) şi b) stabilesc reguli de simplificare la stânga şi la dreapta pentru înmulțirea permutărilor.

INVERSIUNI, SEMNUL UNEI PERMUTĂRI

Pentru o permutare $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, o pereche ordonată (i, j) cu $i,j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ în care $i < j$ şi $\sigma(i) > \tau(j)$ se numeşte ***inversiune*** a lui σ.

De exemplu, inversiunile permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$ sunt perechile (2, 3), (2, 4) şi (3, 4), pentru că $\sigma(2) = 4 > 3 = \sigma(3)$, $\sigma(2) = 4 > 2 = \sigma(4)$ şi $\sigma(3) = 3 > 2 = \sigma(4)$.

Permutările care au un număr par de inversiuni se numesc ***permutări pare***, iar cele care au un număr impar de inversiuni se numesc ***permutări impare***.

Pentru $\sigma \in S_n$, considerăm numărul rațional $\varepsilon(\sigma) = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} \dfrac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ care, datorită proprietăților date de propoziția ce urmează, se numeşte ***semnul*** permutării σ.

Propoziție

Fie $\sigma \in S_n$. Atunci $\varepsilon(\sigma) = 1$ dacă σ este permutare pară şi $\varepsilon(\sigma) = -1$ dacă σ este permutare impară.

Demonstrație. Deoarece σ este bijectivă avem $\prod_{i \neq j} (\sigma(i) - \sigma(j)) = \prod_{\sigma^{-1}(k) \neq \sigma^{-1}(p)} (k - p) = \prod_{k \neq p} (k - p) = \prod_{i \neq j} (i - j)$.

Atunci $(\varepsilon(\sigma))^2 = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} =$

$= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \cdot \prod_{1 \le j < i \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \frac{\prod_{i \neq j} (\sigma(i) - \sigma(j))}{\prod_{i \neq j} (i - j)} = 1$, deci $|\varepsilon(\sigma)| = 1$.

Deoarece o pereche (i, j) cu $i < j$ este inversiune a lui σ dacă şi numai dacă fracția $\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ este negativă, rezultă din definiția lui $\varepsilon(\sigma)$, că semnul lui este dat de numărul inversiunilor lui σ. În concluzie, dacă σ este pară atunci $\varepsilon(\sigma) = 1$, iar dacă σ este impară $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Comportarea lui ε față de produsul permutărilor este evidențiată de următoarea propoziție.

Propoziție

1°. $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\, \varepsilon(\tau)$, $(\forall)\ \sigma, \tau \in S_n$.

2°. $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, $(\forall)\ \sigma \in S_n$.

Demonstrație. 1°. Din definiția lui ε rezultă că:

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{(\sigma\tau)(i) - (\sigma\tau)(j)}{i - j} = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} \cdot \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} =$$

$$= \prod_{1 \le k < p \le n} \frac{\sigma(k) - \sigma(p)}{k - p} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau).$$

2°. Deoarece permutarea e nu are inversiuni, rezultă că $\varepsilon(e) = 1$ şi în consecință $\varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \varepsilon(e) = 1$, deci $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

Vom pune acum în evidență un tip particular de permutare, necesar în studiul proprietăților determinanților din capitolul 3.

O permutare $\sigma \in S_n$, $n \ge 2$ se numeşte ***transpoziție*** dacă există $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu $i \neq j$ astfel încât $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ şi $\sigma(k) = k$ pentru orice $k \notin \{i, j\}$. Vom nota transpoziția σ cu $(i\ j)$, deci $(i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$.

De exemplu, în S_5 avem $(2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi $(5\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Proprietățile transpozițiilor sunt puse în evidență de următoarea propoziție.

Propoziție

Fie $\sigma \in S_n$ o transpoziție. Atunci:

1°) $\sigma = \sigma^{-1}$.

2°) $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Demonstrație. 1°) Dacă $\sigma = (i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$, atunci

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \end{pmatrix} = (j\ i) = (i\ j) = \sigma$.

2°) Dacă $i < j$ atunci inversiunile lui $\sigma = (i\ j)$ sunt perechile: $(i, i+1)$, $(i, i+2)$, …, (i, j), $(i+1, j)$, $(i+2, j)$, …, $(j-1, j)$, deci σ are $2(j - i) - 1$ inversiuni. În concluzie σ este impară, deci $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Exerciții propuse

1. Să se calculeze produsul $\sigma\tau$ în fiecare din cazurile:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Să se precizeze inversiunile şi semnul permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Să se determine semnul permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ n & n-1 & n-2 & ... & 1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

4. Să se scrie inversele permutărilor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ n & n-1 & n-2 & ... & 1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5. Să se rezolve ecuația $\sigma x = \tau$ în următoarele cazuri:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție: Scriem $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; atunci $x = \sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Să se rezolve ecuația $\sigma x \tau = \theta$ în următoarele cazuri

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soluție. Scriem $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, rezultă că

$$x = \sigma^{-1}\theta\tau^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = e.$$

b) $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$; $\theta = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

c) $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $\tau = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$; $\theta = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

7. Să se arate că permutarea σ^2 este pară, oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$ natural.

8. Să se arate că nu există permutări $\sigma \in S_4$ astfel încât $\sigma^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

9. Să se rezolve ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

10. Să se determine toate permutările $x \in S_3$ care comută cu $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ şi toate permutările $y \in S_4$ care comută cu $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

11. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$; b) $x^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

12. Să se precizeze numărul de transpoziții din S_n, $n \geq 2$.

13. Să se arate că: $(12)(34) = (34)(12)$ în S_n, $n \geq 4$.

14. Să se verifice că în S_n avem egalitățile:

a) $(i\,j) = (1\,i)(1\,j)(1\,i)$; b) $(1\,i)(1\,j)(1\,i) = (1\,j)(1\,i)(1\,j)$; c) $(i\,j) = (1\,i)(i\,j)(1\,j)$, oricare ar fi $i,j \in \{2, 3, \ldots, n\}$ cu $n \geq 3$ şi $i \neq j$.

15. Fie $n \geq 2$ un număr natural. O submulțime nevidă H a lui S_n se numeşte ***închisă*** dacă $\sigma\tau \in H$ pentru orice permutări $\sigma,\tau \in H$.

Considerăm H o submulțime închisă a lui S_n şi σ o permutare din H.

a) Să se arate că $\{\sigma^p \mid p \in \mathbb{N}^*\} \subset H$.

b) Să se demonstreze că există numerele întregi $k < \ell$ astfel încât $\sigma^k = \sigma^\ell$.

c) Să se arate că pentru orice permutare $\varphi \in S_n$ există $p \in \mathbb{N}^*$ cu $\varphi^p = e$.

d) Să se arate că $e \in H$.

e) Să se arate că dacă $\sigma \in H$, atunci $\sigma^{-1} \in H$.

16. Să se calculeze σ^{2010} în următoarele cazuri:

a) $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$; c) $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

d) $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$; e) $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$.

17. Fie $\sigma \in S_{2006}$. Să se arate că $f: \{1, 2, \ldots, 2006\} \to \{1, 2, \ldots, 2006\}$, $f(i) = 2007 - \sigma(i)$ este o permutare din S_{2006}, având semnul opus lui σ.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

Rezolvați:

1. Fie $\sigma \in S_{10}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 10 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine paritatea lui σ.

b) Să se descompună σ în produs de transpoziții.

c) Să se determine cel mai mic număr natural nenul k pentru care $\sigma^k = e$.

2. Fie $\sigma, \tau \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze σ^6 şi τ^2.

b) Să se rezolve ecuația $\sigma^{2004} \cdot x = \tau^{2006}$, $x \in S_4$.

c) Să se arate că ecuația $\sigma^{2004} \cdot x^2 = \tau^{2007}$ nu are soluții în S_4.

3. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < ... < a_{10}$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_{10}$ pentru care $\sum_{i=1}^{10} a_i a_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{10} a_i a_{\tau(i)}$, oricare ar fi $\tau \in S_{10}$.

Testul 2

Indicați răspunsul corect.

1. Câte inversiuni are permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 8 & 9 & 10 & ... & 16 \\ 1 & 3 & 5 & ... & 15 & 2 & 4 & ... & 16 \end{pmatrix}$.

a) 28; b) 29; c) 30; d) 32.

2. Câte soluții are în S_5 ecuația $x^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$?

a) 0; b) 1; c) 4; d) 8.

3. Câte permutări din S_5 comută cu permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$?

a) 8; b) 6; c) 4; d) 2.

II. MATRICE

NOȚIUNEA DE MATRICE
MULȚIMI DE MATRICE

În diverse activități legate de reprezentare, analiza și optimizarea desfășurării anumitor procese de natură tehnică sau economică, în studiul probabilistic sau statistic al unor fenomene, în general în activități care presupun analiza unui număr însemnat de informații, apare necesitatea concentrării datelor în tablouri numite matrice.

În rezolvarea sistemelor liniare, matricele (tablourile coeficienților ecuațiilor) vor constitui principalul instrument de lucru. Prin introducerea operațiilor cu matrice, acestea vor putea fi privite ca „numere generalizate” cu ajutorul cărora vom contoriza soluțiile acestor sisteme.

Să considerăm următorul caz practic:

Situația vânzărilor de carte la o anumită editură, în patru orașe, într-o perioadă de timp determinată, este prezentată în tabelul de mai jos, în care sunt specificate orașul, tipul de carte și numărul exemplarelor vândute din fiecare tip.

Tipul de carte / Orașul	Beletristică	Socio-politică	Știință	Tehnică	Didactică
Orașul *A*	120	15	42	10	400
Orașul *B*	90	21	10	5	212
Orașul *C*	87	10	25	11	308
Orașul *D*	410	12	14	17	197

Din acest tabel se pot extrage cu ușurință informații legate de vânzarea unui anumit tip de carte (prin citirea tabelului pe coloane) sau de situația generală a vânzărilor dintr-un anumit oraș (prin citirea tabelului pe linii).

În cazul în care ordonarea orașelor precum și ordonarea tipurilor de carte sunt fixate, situația vânzărilor poate fi prezentată sub forma următorului tabel matriceal:

$$\begin{pmatrix} 120 & 15 & 42 & 10 & 400 \\ 90 & 21 & 10 & 5 & 212 \\ 87 & 10 & 25 & 11 & 308 \\ 410 & 12 & 14 & 17 & 197 \end{pmatrix}$$

Poziția fiecărui număr din tabel este fixată de numărul liniei și al coloanei pe care se află. De exemplu, numărul 11 este situat pe linia 3 și coloana 4, deci reprezintă numărul de cărți tehnice vândute în orașul *C*.

Definiție

Fie $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe și $m,n \in \mathbb{N}^*$. Se numește ***matrice cu m linii și n coloane***, sau ***matrice de tip*** **(*m, n*)** o funcție

$$f : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{C}.$$

Dacă $a_{ij} \in \mathbb{C}$ reprezintă imaginea perechii (i, j) cu $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci cele $m \cdot n$ imagini ale lui f se aranjează într-un tablou de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mn} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Această aranjare justifică denumirea funcției f de matrice cu m linii şi n coloane. Cum orice funcție $f : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ este perfect determinată de tabloul imaginilor sale, vom numi matrice de tip (m, n) un tablou A de forma (1).

Numerele a_{ij} cu $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ se numesc elementele matricei A. Cum elementul a_{ij} situat pe linia i şi coloana j ale tabloului A reprezintă imaginea perechii (i, j) rezultă că scrierea unei matrice este unică.

Înlocuind, în definiție, mulțimea $\mathbb{C}$ cu una din mulțimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ obținem noțiunea de matrice de tipul (m, n) peste $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi respectiv peste $\mathbb{R}$.

Liniile matricei A sunt mulțimile ordonate scrise „pe orizontală”:

$$L_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$
$$L_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}),$$

iar coloanele matricei A sunt mulțimile ordonate „scrise pe verticală”:

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix};\ C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix};\ \ldots;\ C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dacă $L_1, L_2, \ldots, L_m$ sunt liniile lui A şi $C_1, C_2, \ldots, C_n$ coloanele lui A atunci scriem: $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \ldots \\ L_m \end{pmatrix}$ sau $A = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

O matrice de tip $(1, n)$ se numeşte ***matrice linie***.
O matrice de tip $(m, 1)$ se numeşte ***matrice coloană***.
O matrice de tip (n, n) se numeşte ***matrice pătratică de ordin n*** sau, mai scurt, ***matrice de ordin n***.

Notăm: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ = mulțimea matricelor de tipul (m, n) peste $\mathbb{C}$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ = mulțimea matricelor de ordin n peste $\mathbb{C}$.

În mod analog definim mulțimile: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ şi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

O notație concentrată pentru matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ este $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ sau, mai scurt, $A = (a_{ij})$. În acest ultim caz, tipul matricei rezultă din precizarea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Matricele $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ şi $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}}$ sunt egale dacă sunt de acelaşi tip (deci $m = p$, $n = q$) şi $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ atunci mulțimea ordonată $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ se numeşte ***diagonala principală*** a lui A, iar mulțimea ordonată $(a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1})$ se numeşte ***diagonala secundară*** a lui A. Suma elementelor de pe diagonala principală a lui A se numeşte ***urma matricei A*** şi se notează tr A. Deci tr $A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ atunci matricea obținută din A prin schimbarea „liniilor în coloane” şi invers, se numeşte ***transpusa lui A*** şi se notează A^t. Se observă că $A^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.

EXEMPLU: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$. Atunci $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$.

OPERAȚII CU MATRICE

1. Adunarea matricelor

Considerăm următoarea situație practică:

O firmă de construcții deține două întreprinderi A şi B, a căror structură de personal este prezentată în cele două tabele de mai jos, pe funcții şi categorii de vârstă:

A	inginer constructor	inginer de instalații	economist	muncitor
18 – 25 ani	0	0	2	41
25 – 40 ani	12	4	11	79
40 – 65 ani	10	7	5	102

B	inginer constructor	inginer de instalații	economist	muncitor
18 – 25 ani	0	1	1	14
25 – 40 ani	8	5	10	83
40 – 65 ani	4	1	4	81

Structura angajaților firmei este dată de tabelul:

$A+B$	inginer constructor	inginer de instalații	economist	muncitor
18 – 25 ani	0	1	3	55
25 – 40 ani	20	9	21	162
40 – 65 ani	14	8	9	183

obținut prin adunarea numerelor din cele două tabele situate pe aceeaşi linie şi aceeaşi coloană. Pe scurt, putem scrie:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 41 \\ 12 & 4 & 11 & 79 \\ 10 & 7 & 5 & 102 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 14 \\ 8 & 5 & 10 & 83 \\ 4 & 1 & 4 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 55 \\ 20 & 9 & 21 & 162 \\ 14 & 8 & 9 & 183 \end{pmatrix}.$$

Definiție

Fie $A,B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$. Matricea $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $C = (a_{ij} + b_{ij})$ se numeşte ***suma*** matricelor A şi B şi se notează $A + B$.

Operația prin care fiecărei perechi $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea $A + B$ se numeşte ***adunarea*** matricelor.

EXEMPLU: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Observații:

1. Adunarea a două matrice se poate efectua numai dacă sunt de acelaşi tip (m, n). Suma lor este tot o matrice de tipul (m, n) şi, de aceea, spunem că adunarea matricelor este operație algebrică sau lege de compoziție pe mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

2. Dacă matricele $A,B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ atunci $A+B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. Proprietatea se păstrează dacă înlocuim mulțimea $\mathbb{Z}$ cu una din mulțimile $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$.

Matricea de tip (m, n) ale cărei elemente sunt toate egale cu zero se numeşte ***matricea nulă de tip*** $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ şi se notează $\mathbb{O}_{m,n}$.

În cazul în care $m = n$, această matrice se notează $\mathbb{O}_n$.

Pentru o matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, matricea „$-A$" $= (-a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se numeşte ***opusa*** matricei A.

Proprietăţile adunării matricelor pe $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt imediate şi sunt evidenţiate în următoarea propoziţie:

Propoziţie

Sunt adevărate proprietăţile:

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\forall\, A,B,C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (adunarea matricelor este asociativă).
2) $A + B = B + A$, $\forall\, A,B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (adunarea matricelor este comutativă).
3) $A + \mathbb{O}_{m,n} = A$, $\forall\, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (matricea nulă este element neutru al adunării matricelor).
4) $A + (-A) = \mathbb{O}_{m,n}$, $\forall\, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (orice matrice are o opusă faţă de adunare).

Demonstraţia poate constitui o temă facilă şi în acelaşi timp utilă. Cele patru proprietăţi rămân adevărate în cazul înlocuirii mulţimii $\mathbb{C}$ cu una din mulţimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$.

Proprietăţile anterioare conferă fiecăreia din mulţimile $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$ şi $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, înzestrate cu adunarea, o „structură algebrică" numită grup abelian.

Regulile de calcul relative la adunarea matricelor sunt, datorită acestei structuri de grup abelian, identice cu cele de la adunarea numerelor.

De exemplu, asociativitatea adunării ne permite ca pentru $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $p \in \mathbb{Z}$, să folosim notaţiile:

$$pA = \begin{cases} \underbrace{A + A + \ldots + A}_{p \text{ ori}}, & \text{dacă } p \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{O}_{m,n}, & \text{dacă } p = 0 \\ -(-pA), & \text{dacă } p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Următoarele egalităţi sunt adevărate:

$$(p + q)A = pA + qA \text{ şi } p(qA) = (pq)A,\ \forall\, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ p,q \in \mathbb{Z}.$$

Dacă pentru $A,B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ notăm, ca la numere, matricea $A + (-B)$ cu $A - B$, atunci, într-o egalitate matriceală putem trece o matrice dintr-un membru în altul, cu „semn schimbat". Adică $A + B = C \Leftrightarrow (A + B) + (-B) = C + (-B) \Leftrightarrow A + (B + (-B)) = C - B \Leftrightarrow A + \mathbb{O}_{m,n} = C - B \Leftrightarrow A = C - B$.

2. Înmulţirea matricelor cu scalari

Considerăm următoarea situaţie practică:

Un depozit de alimente aprovizionează magazinele X şi Y, într-o săptămână, cu diverse cantităţi din alimentele a, b şi c exprimate în kilograme, după tabelul de mai jos:

	a	*b*	*c*
X	1200	600	300
Y	1500	840	420

În urma scumpirii acestor alimente consumul pe fiecare din cele trei alimente a scăzut cu o treime. Noul tabel cu necesarul de aprovizionare al celor două magazine este:

	a	b	c
X	800	400	200
Y	1000	560	280

Ultimul tabel a fost obținut prin înmulțirea cu $\frac{2}{3}$ a elementelor tabelului inițial. Scriem pe scurt:

$$\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}1200 & 600 & 300\\ 1500 & 840 & 420\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}800 & 400 & 200\\ 1000 & 560 & 280\end{pmatrix}.$$

Definiție

Fie $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $\lambda\in\mathbb{C}$. Dacă $A = (a_{ij})$, atunci matricea $B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B = (\lambda a_{ij})$ se numeşte ***produsul matricei A cu scalarul λ*** şi se notează λA. Operația prin care fiecărei perechi $(\lambda, A)\in\mathbb{C}\times\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea λA se numeşte ***înmulțirea matricelor cu scalari***.

Dacă înlocuim în definiție mulțimea $\mathbb{C}$ cu una din mulțimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ obținem definiția înmulțirii cu scalari a matricelor din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

EXEMPLU: $5\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10 & -5\\ 20 & 0 & 15\end{pmatrix}$.

Proprietățile înmulțirii cu scalari a matricelor din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt evidențiate de următoarea propoziție:

Propoziție

Sunt adevărate proprietățile:

1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,\ \forall A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ \forall \lambda\in\mathbb{C}$.
2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,\ \forall A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ \forall \lambda,\mu\in\mathbb{C}$.
3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A,\ \forall A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}$.
4) $1\, A = A,\ \forall A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
5) $\lambda A = \mathbb{O}_{m,\,n} \Leftrightarrow \lambda = 0$ sau $A = \mathbb{O}_{m,\,n}$.

Demonstrația este imediată şi reprezintă o temă utilă.

Proprietățile rămân adevărate dacă înlocuim mulțimea $\mathbb{C}$ cu una din mulțimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$.

În cazul în care K este una din mulțimile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ spunem că mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ înzestrată cu operația „internă” de adunare şi cu operația „externă” de înmulțire cu scalari, este un K – spațiu vectorial.

Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_p\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_p\in\mathbb{C}$ atunci matricea $B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_p A_p\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se numeşte ***combinație liniară*** a matricelor $A_1, A_2, \ldots, A_p$ cu coeficienții $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_p$. În cazul în care $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sunt matrice linii, spunem că matricea B este ***combinație liniară de linii***, iar când $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sunt matrice coloane, spunem că matricea B este ***combinație liniară de coloane***.

Aceste noțiuni vor fi utilizate în următoarele două capitole.

3. Înmulțirea matricelor

Considerăm următoarea situație practică:

Situația vânzării, pe categorii, a biletelor la un meci de fotbal este dată de următorul tabel linie:

Tribuna 0	Tribuna I	Tribuna a II-a	Peluză
2 000	7 000	10 000	5 000

Costul unui bilet este dat de următorul tabel coloană:

Tribuna 0	100
Tribuna I	80
Tribuna a II-a	70
Peluză	50

Suma obținută prin vânzarea biletelor este:
200 000 + 560 000 + 700 000 + 250 000 = 1 710 000 lei.
Scriem pe scurt:

$$\begin{pmatrix} 2\,000 & 7\,000 & 10\,000 & 5\,000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix} = 20\,000 \cdot 100 + 7\,000 \cdot 80 + 10\,000 \cdot 70 + 5\,000 \cdot 50 =$$

$= 1\,710\,000$.

În definiția care urmează vom privi un număr din $\mathbb{C}$ ca o matrice de tip (1, 1) peste $\mathbb{C}$.

Definiție

1. Fie $L = (a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ o matrice linie şi $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ o matrice coloană. Numărul $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \in \mathbb{C}$ se numeşte ***produsul dintre matricea linie L şi matricea coloană C*** (în această ordine) şi se notează LC.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice cu liniile $L_1, L_2, \ldots, L_m$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ o matrice cu coloanele $C_1, C_2, \ldots, C_p$.

Atunci matricea $C = \begin{pmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & \ldots & L_1C_p \\ L_2C_1 & L_2C_2 & \ldots & L_2C_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_mC_1 & L_mC_2 & \ldots & L_mC_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ se numeşte ***produsul matricelor A şi B*** (în această ordine) şi se notează AB.

Operația prin care fiecărei perechi $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea AB se numeşte ***înmulțirea matricelor***.

Se spune că produsul AB se obține după regula de înmulțire „linie cu coloană”.

EXEMPLU: Fie $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ şi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$. Atunci

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz + cu & ay + bt + cv \\ dx + ez + fu & dy + et + fv \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Observații

1. Putem efectua produsul AB (în această ordine) numai dacă numărul coloanelor lui A este egal cu numărul liniilor lui B.

2. Dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ atunci $AB = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ unde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ şi $\forall\ k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.
Reţinem: matrice $(m, n) \cdot$ matrice $(n, p) =$ matrice(m, p).

3. Punctul 1 din definiţie este un caz particular al punctului 2 deoarece am convenit să privim un număr din $\mathbb{C}$ ca o matrice de tip (1, 1) peste $\mathbb{C}$.

4. Dacă înlocuim în definiţie mulţimea $\mathbb{C}$ cu una din mulţimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ obţinem definiţia înmulţirii matricelor peste $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi respectiv $\mathbb{R}$.

5. Este posibil să putem efectua produsul $A \cdot B$, iar produsul $B \cdot A$ să nu aibă sens. De exemplu, dacă $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$ atunci $A \cdot B$ are sens, iar $B \cdot A$ nu are sens, deoarece numărul coloanelor lui B nu este egal cu numărul liniilor lui A.
Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ atunci putem efectua produsele $A \cdot B$ şi $B \cdot A$, dar în general $A \cdot B \neq B \cdot A$. Mai mult, ele pot fi de tipuri diferite deoarece $AB \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ şi $BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

6. Pentru orice două matrice de ordin n putem efectua produsul lor iar dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Spunem că înmulţirea este operaţie algebrică sau lege de compoziţie pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

În cele ce urmează vom pune în evidenţă proprietăţile înmulţirii matricelor. Anumite proprietăţi (existenţa elementului neutru, inversabilitatea matricelor, comutativitatea – proprietăţi care necesită efectuarea de produse de tip AB şi BA) nu pot fi studiate decât în mulţimi de matrice pătratice $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Asociativitatea înmulţirii matricelor ca şi distributivitatea înmulţirii matricelor faţă de adunare vor fi studiate într-un context mai larg, şi anume acela în care au sens toate produsele şi sumele considerate. Pentru aceasta avem nevoie de o lemă, care stabileşte o proprietate a sumelor duble.

Lemă. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Atunci $\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$.

Demonstraţie. Fie S suma elementelor matricei A. Deoarece suma elementelor pe linia L_i este $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ rezultă că $S = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$. Cum suma elementelor de pe coloana C_j este $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ rezultă că $S = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$ şi egalitatea a fost demonstrată.

Propoziţie: Înmulţirea matricelor are următoarele proprietăţi:

1). $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, (înmulţirea matricelor este asociativă).

2). $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, B şi $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$;

3). $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, B şi $C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{C})$;

(înmulţirea este distributivă faţă de adunare la stânga şi la dreapta).

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Demonstraţie

1). Dacă $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{k\ell})$; $AB = (d_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$, $BC = (e_{j\ell}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$, $(AB) \cdot C = (f_{i\ell}) \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$ iar $A(BC) = (g_{i\ell}) \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$, atunci $f_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} c_{k\ell} =$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) c_{k\ell} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{k\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{k\ell}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{j\ell} = g_{i\ell},$$

$\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ şi $\ell \in \{1, 2, \ldots, q\}$ şi egalitatea este demonstrată.