

Dorinel-Mihai Crăciun
Ioan Săcăleanu
Alina Crăciun
Bogdan Dorneanu

MATEMATICĂ

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU CLASA A VI-A

Semestrul I

CORINT
EDUCAȚIONAL

Cuvânt-înainte

Autorii sunt profesori apreciați, adevărați profesioniști care, împreună cu generații de elevi, au dus „lupte” drepte cu examenele naționale, olimpiadele și alte concursuri de matematică. În general, rezultatele finale s-au concretizat prin procente foarte mari de promovabilitate, prin nenumărate premii, mențiuni, medalii.

După muncă și răsplată...

Culegerea pentru clasa a VI-a respectă programa școlară, fiecare capitol are un rezumat teoretic, un număr mare de exerciții și probleme bine alese, structurate pe niveluri de dificultate, care permit elevilor să aprofundeze materia, să devină competitivi. Multe din probleme sunt originale, având enunțuri atractive și rezolvări ingenioase.

Se acordă atenție matematicii aplicate în practică, printr-o serie de exerciții care prezintă modele din viața cotidiană. Elevii se pot autoevalua și prin numeroasele modele de teste prezente la sfârșitul fiecărui capitol. Pentru verificare, în culegere sunt date răspunsuri, indicații de rezolvare, soluții la o mare parte din problemele propuse.

Ne cerem scuze pentru eventualele erori... sperăm ca elevii, profesorii și părinții să găsească această lucrare utilă și interesantă.

Autorii

ALGEBRĂ

Capitolul 1

Mulțimea numerelor naturale

1. Operații cu numere naturale

Mulțimea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ este mulțimea numerelor naturale.

Avem $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $x + y \in \mathbb{N}$.

Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ și $a \geq b$, atunci $a - b \in \mathbb{N}$.

Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $x \cdot y \in \mathbb{N}$.

Proprietăți:

1. $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{N}$ (adunarea numerelor naturale este comutativă);
2. $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in \mathbb{N}$ (adunarea numerelor naturale este asociativă);
3. $0 + x = x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{N}$ (0 este elementul neutru pentru operația de adunare a numerelor naturale).

Exemple:

$$1. \quad \begin{array}{r} 78\,956 + 20\,143 = 99\,099; \\ 78\,956 \quad + \\ \underline{20\,143} \\ 99\,099 \end{array}$$

$$2. \quad \begin{array}{r} 78\,395 - 15\,993 = 62\,402; \\ 78\,395 \quad - \\ \underline{15\,993} \\ 62\,402 \end{array}$$

Proprietăți:

- $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{N}$ (înmulțirea numerelor naturale este comutativă);
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ (înmulțirea numerelor naturale este asociativă);
- $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{N}$ (1 este element neutru pentru operația de înmulțire);
- $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0, \forall a \in \mathbb{N}$ (0 este element absorbant);
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ (înmulțirea este distributivă față de adunare);
- $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ (înmulțirea este distributivă față de scădere).

Teorema împărțirii cu rest:

Pentru orice numere naturale a și b , cu $b \neq 0$, există numerele naturale q și r (numite **cât** și **rest**) unic determinate, astfel încât $a = b \cdot q + r$, unde $0 \leq r < b$.

Avem: ► $a : b \Leftrightarrow b \neq 0$ și restul împărțirii lui a la b este 0.

(„ \Leftrightarrow ” înseamnă echivalent);

► $0 : a = 0, \forall a \in \mathbb{N}^*$ (împărțirea la 0 nu are sens).

Exemple:

1. $978 \cdot 71 = 69\,438$

$$\begin{array}{r} \text{sau} \\ 978 \cdot \\ \quad 71 \\ \hline 978 \\ 6846 \\ \hline 69\,438 \end{array}$$

2. $27\,588 : 19 = 1\,452$

$$\begin{array}{r} \text{sau} \\ 27\,588 \overline{)19} \\ \underline{19} \\ =85 \\ \underline{76} \\ =98 \\ \underline{95} \\ =38 \\ \underline{38} \\ == \end{array}$$

3. $0 : 2014 = 0$.

4. $60\,134 : 0$ nu are sens.

☞ Exercițiu rezolvat:

Câte numere naturale de două cifre există, care împărțite la 7 dau câtul 12?

Soluție:

$$\overline{ab} = 7 \cdot 12 + r, r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{84, 85, 86, 87, 88, 89, 90\}.$$

Sunt șapte numere. ☞

◀▶ Exerciții și probleme propuse ▶▶

*

1. Calculați:

a) $3\,054 + 783$;

b) $4\,365 + 819$;

c) $2\,534 + 1\,597$;

d) $1\,504 - 1\,95$;

e) $41\,735 - 32\,673$;

f) $1\,012 - 309$;

g) $3\,245 - 135 - 2\,015$;

h) $83\,427 - 3\,304 - 21\,17$;

i) $893 + 1\,017 - 987$;

j) $837 + 683 + 75\,130$.

2. Calculați, utilizând proprietățile adunării:

a) $21 + 68 + 19 + 22$;

b) $39 + 40 + 61 + 22 + 18$;

c) $175 + 275 + 125 + 25$;

d) $8\,753 + 794 + 17 + 6$.

3. Determinați $a \in \mathbb{N}$, dacă:

a) $1\,370 + a = 1\,493$;

b) $1\,270 - a = 191$;

c) $1\,700 - a = 1\,250$;

d) $a + 163 = 1\,960$;

e) $a - 1\,973 = 121$;

f) $167 + a = 2\,017$.

4. Calculați:

a) $29 \cdot 53$;

b) $231 \cdot 75$;

c) $257 \cdot 8$;

d) $427 \cdot 523$;

e) $3\,248 \cdot 1\,503$;

f) $701 \cdot 9\,018$.

5. Calculați:

a) $214 \cdot 100 - (3\,000 - 150 \cdot 12)$;

b) $431 \cdot (700 - 400) + 210 \cdot (715 - 215)$;

c) $1\,483 + 155 \cdot 61 + 20 \cdot 213 - 196 \cdot 7$;

d) $6\,173 \cdot (61 \cdot 1\,000 - 83 \cdot 13)$;

e) $718 \cdot 10 + (170 \cdot 100 - 973 \cdot 10)$.

6. Efectuați:

- a) $1\,248 : 8$; b) $1\,707 : 3$; c) $6\,760 : 26$;
d) $4\,095 : 15$; e) $79\,310 : 721$; f) $174\,529 : 1\,961$;
g) $49\,097 : 29$; h) $970\,470 : 789$; i) $38\,304 : 84$.

7. Aflați câtul și restul următoarelor împărțiri:

- a) $1\,258 : 9$; b) $3\,742 : 93$; c) $30\,221 : 14$;
d) $20\,312 : 302$; e) $4\,370 : 90$; f) $18\,540 : 15$.

8. Aflați $b \in \mathbb{N}$ pentru care:

- a) $810 : b = 9$; b) $b : 2 = 113$; c) $b : 1 = b$;
d) $2\,400 : b = 120$; e) $56\,406 : 158 = b$; f) $b : 37 = 573$.

* *

9. Suma a două numere este $4\,530$. La împărțirea lor se obține câtul 300 și restul 15 . Aflați numerele.
10. Suma a două numere naturale este $2\,030$. Aflați numerele știind că unul este de 4 ori mai mare decât celălalt.
11. Produsul a două numere este 36 . Aflați cea mai mare și cea mai mică va loare a sumei lor.
12. Suma a două numere naturale nenule este 14 . Aflați cea mai mică și cea mai mare valoare a produsului lor.
13. Aflați trei numere naturale știind că suma lor este $4\,113$, suma primelor două este $1\,750$ și suma ultimelor două numere este $3\,495$.
14. Calculați:
 $3 + 5 + 7 + \dots + 2\,015 - (2 + 4 + 6 + \dots + 2\,014)$.
15. Aflați numărul de zerouri în care se termină produsul:
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 40 \cdot 41$.
16. Calculați:
 $(33 + 66 + 99 + \dots + 1\,848) : (1 + 2 + 3 + \dots + 56)$.
17. Dacă $ab - ac = 140$ și $a = 7$, calculați $b - c$.

* * *

18. Găsiți cel mai mic număr de patru cifre cu următoarea proprietate: diferența dintre acesta și răsturnatul său să fie numărul $2\,718$.

19. Găsiți zece numere naturale care au suma și produsul egale cu 20.
20. Scrieți numărul 1 997 cu ajutorul a zece cifre de 2 și al unor operații aritmetice.
21. Cum trebuie distribuite greutatețile 1 g, 2 g, ..., 9 g în trei cutii, astfel încât în prima cutie să fie două greutateți, în a doua, trei, iar în a treia, patru și suma greutateților din fiecare cutie să fie aceeași?
22. Găsiți cel mai mare număr care are toate cifrele diferite, iar produsul lor este 360.
23. În anul 1995, o doamnă a avut vârsta egală cu suma cifrelor anului nașterii sale. În ce an s-a născut?
24. a) Câte numere lipsesc din șirul: 1, 2, 4, 5, 7, 8, ..., 97, 98?
b) Efectuați:
 $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + \dots + 97 + 98 - 2 \cdot (3 + 4 + 5 + \dots + 34)$.
25. Completați căsuțele libere ale pătratului de mai jos cu numere naturale astfel încât suma numerelor din fiecare linie, fiecare coloană și fiecare diagonală să fie aceeași. (*Șerban Nicu*)

16	2	3	13
	11	10	
5			16
4			

2. Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural; ordinea efectuării operațiilor

Definiție. Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Definim $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Proprietăți:

$a^1 = a$; $a^0 = 1$, dacă $a \neq 0$; 0^0 nu are sens (nu se definește);

$0^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.

a^n se citește „*a la puterea n*” sau „*puterea a n-a a numărului a*”.

a se numește *bază a puterii*, iar n este *exponentul puterii*.

Reguli de calcul cu puteri

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*, m, n \in \mathbb{N}$. Se aplică următoarele reguli de calcul cu puteri:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, unde $m \geq n$;
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$;
4. $(a^m \cdot b^n)^p = a^{m \cdot p} \cdot b^{n \cdot p}, p \in \mathbb{N}$;
5. $a^m : b^m = (a : b)^m$, dacă $a : b$.

Definiție. Un număr care este puterea a doua a unui număr natural se numește *pătrat perfect*.

Exemple:

$$36 = 6^2; \quad 121 = 11^2; \quad 625 = 25^2.$$

Ultima cifră a unui pătrat perfect este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.

Numerele care au ultima cifră 2, 3, 7 sau 8 nu sunt pătrate perfecte.

Un număr care este cuprins între două pătrate perfecte consecutive nu este pătrat perfect.

Definiție. Un număr care este puterea a treia a unui număr natural se numește *cub perfect*.

Exemple:

$$125 = 5^3; \quad 1\ 000 = 10^3; \quad 216 = 6^3; \quad 1\ 331 = 11^3.$$

Ordinea efectuării operațiilor cu numere naturale

Adunarea și scăderea sunt operații de ordinul I.

Înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul al II-lea.

Ridicarea la putere este operație de ordinul al III-lea.

Ordinea operațiilor este următoarea:

Întâi se efectuează operațiile de ordinul al III-lea, apoi cele de ordinul al II-lea și apoi cele de ordinul I.

Dacă există numai operații de același ordin, atunci operațiile se efectuează în ordinea în care sunt scrise.

Dacă exercițiul conține și paranteze, ordinea efectuării acestora se face începând cu cele rotunde, apoi cu cele drepte, după care se efectuează operațiile din acolade, iar la final operațiile din exteriorul acoladelor.

Sisteme de numerație

Sistemul de numerație cel mai des utilizat este *sistemul zecimal* (cu baza 10). Acest sistem utilizează pentru scrierea numerelor zece cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Orice număr natural se poate scrie ca o sumă de produse în care un factor este o putere a lui 10.

Exemple:

$$1\ 273 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3;$$

$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d;$$

$$\overline{210a7} = 2 \cdot 10^4 + 10^3 + a \cdot 10 + 7.$$

Un alt sistem de numerație des folosit, mai ales în informatică, este *sistemul binar* (cu baza 2).

Pentru scrierea unui număr natural în baza 2 se folosesc cifrele 0 și 1.

Exemple:

$$10111_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 23_{(10)};$$

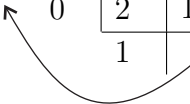
$$111011_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 59_{(10)};$$

Pentru a trece un număr natural din baza 10 în baza 2 se utilizează un algoritm bazat pe împărțiri succesive la 2.

Exemplu: Trecem în baza 2 numărul 12.

Avem succesiv:

12	2		
12	6	2	
0	6	3	2
	0	2	1
		1	



Rezultă $1100_{(2)} = 12_{(10)}$.

Observație: Scrierea unui număr într-o bază b se bazează pe faptul că b unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior. Pentru scrierea unui număr în baza b se folosesc cifrele: $0, 1, 2, 3, \dots, b - 1$.

Exemple:

$214_{(5)} = 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4 = 69_{(10)} = 59$. Notăția pentru baza 10 poate fi omisă.

$1012_{(3)} = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2 = 32_{(10)} = 32$.

$\overline{xyz}_{(b)} = x \cdot b^2 + y \cdot b + z$, $x, y, z \in \{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$.

◀▶ Exerciții și probleme propuse ▶◀

*

1. Ridicați la putere:

- a) 10^2 ; 10^4 ; 10^5 ; 10^7 ; b) 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; 3^5 ; c) 2^0 ; 2^1 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^7 ;
 d) 2^{3^2} ; 1^{10^4} ; 3^{2^2} ; e) 0^{70} ; 1^{175} ; 2013^0 .

2. Efectuați:

- a) $18^2 - 11^2$; b) $29^2 - 17^2$; c) $20^3 - 10^3$;
 d) $3^3 - 2^3$; e) $9^2 - 4^2$; f) $(2^2)^3 - 3^2$.

3. Calculați:

- a) $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 - 20$; b) $1^{2^3} + 3^{2^2}$;
 c) $1^{10} + 3^0 + 0^7 + 78^0 - 11^0$; d) $4^5 - 3^4 - 2^3 - 1$.

Cuprins

Algebră

Capitolul 1 – Mulțimea numerelor naturale	7
1. Operații cu numere naturale	7
2. Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural; ordinea efectuării operațiilor	12
3. Divizor; multiplu; criterii de divizibilitate	18
4. Proprietăți ale relației de divizibilitate în \mathbb{N}	22
5. Numere prime; numere compuse	25
6. Divizori comuni a două sau mai multor numere naturale; cel mai mare divizor comun	29
7. Multipli comuni a două sau mai multor numere naturale; cel mai mic multiplu comun	34
8. Probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea	38
9. Probleme recapitulative cu caracter practic	40
10. Probleme pentru pregătirea concursurilor	43
11. Teste de evaluare sumativă	44
Capitolul 2 – Mulțimea numerelor raționale pozitive	48
1. Frații echivalente; fracție ireductibilă; noțiunea de număr rațional; Forme de scriere a unui număr rațional	48
2. Adunarea și scăderea numerelor raționale pozitive	60
3. Înmulțirea numerelor raționale pozitive	66
4. Împărțirea numerelor raționale pozitive	70
5. Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr rațional pozitiv; reguli de calcul cu puteri	74
6. Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive	80
7. Media aritmetică și media aritmetică ponderată ale unor numere raționale pozitive	87
8. Ecuații în mulțimea numerelor raționale pozitive	92
9. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	99
10. Probleme practice	103
11. Probleme pentru pregătirea concursurilor de matematică	105
12. Teste de evaluare sumativă	108

Geometrie

Capitolul 1 – Dreapta; segmentul	114
1. Noțiunile fundamentale ale geometriei: punctul, dreapta, planul; poziții relative ale punctelor și dreptelor	114
2. Segmentul: măsurarea segmentelor, distanța dintre două puncte; mijlocul unui segment; simetricul unui punct față de alt punct	124
3. Probleme recapitulative și cu caracter practic	131
4. Teste de evaluare sumativă.....	136
Capitolul 2 – Semidreapta; unghiul	145
1. Semidreapta; unghiul; clasificarea unghiurilor după poziția laturilor	145
2. Măsurarea unghiurilor cu raportorul; clasificarea unghiurilor după măsura lor	150
3. Unghiuri adiacente; bisectoarea unui unghi; unghiuri complementare și suplementare	157
4. Unghiuri opuse la vârf; unghiuri în jurul unui punct	162
5. Probleme recapitulative cu caracter practic	167
6. Teste de evaluare sumativă	170
Capitolul 3 – Congruența triunghiurilor	177
1. Triunghiul: definiție, elemente, perimetrul; congruența triunghiurilor	177
2. Cazurile de construcție ale triunghiurilor; criteriile de congruență ale triunghiurilor	185
3. Metoda triunghiurilor congruente	192
4. Probleme recapitulative cu caracter practic	196
5. Teste de evaluare sumativă	202
Indicații; soluții; rezolvări	209
1. Algebră	209
2. Geometrie	236