Dorinel-Mihai Crăciun
Ioan Săcăleanu
Alina Crăciun
Bogdan Dorneanu

MATEMATICĂ

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU **CLASA A VI-A**

Semestrul I

CORINT
EDUCAŢIONAL

Cuvânt-înainte

Autorii sunt profesori apreciați, adevărați profesioniști care, împreună cu generații de elevi, au dus „lupte” drepte cu examenele naționale, olimpiadele şi alte concursuri de matematică. În general, rezultatele finale s-au concretizat prin procente foarte mari de promovabilitate, prin nenumărate premii, mențiuni, medalii.

După muncă şi răsplată…

Culegerea pentru clasa a VI-a respectă programa şcolară, fiecare capitol are un rezumat teoretic, un număr mare de exerciții şi probleme bine alese, structurate pe niveluri de dificultate, care permit elevilor să aprofundeze materia, să devină competitivi. Multe din probleme sunt originale, având enunțuri atractive şi rezolvări ingenioase.

Se acordă atenție matematicii aplicate în practică, printr-o serie de exerciții care prezintă modele din viața cotidiană. Elevii se pot autoevalua şi prin numeroasele modele de teste prezente la sfârşitul fiecărui capitol. Pentru verificare, în culegere sunt date răspunsuri, indicații de rezolvare, soluții la o mare parte din problemele propuse.

Ne cerem scuze pentru eventualele erori… sperăm ca elevii, profesorii şi părinții să găsească această lucrare utilă şi interesantă.

Autorii

A L G E B R Ă

Capitolul 1

Mulţimea numerelor naturale

1. Operaţii cu numere naturale

Mulţimea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ este mulţimea numerelor naturale.
Avem $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $x + y \in \mathbb{N}$.
Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ şi $a \geq b$, atunci $a - b \in \mathbb{N}$.
Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $x \cdot y \in \mathbb{N}$.

Proprietăţi:

1. $x + y = y + x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{N}$ (adunarea numerelor naturale este comutativă);

2. $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$ (adunarea numerelor naturale este asociativă);

3. $0 + x = x + 0 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{N}$ (0 este elementul neutru pentru operaţia de adunare a numerelor naturale).

Exemple:

1. $78\,956 + 20\,143 = 990\,99$; $\begin{array}{r} 78\,956 \\ 20\,143 \\ \hline 99\,099 \end{array}$ $+$

2. $78\,395 - 15\,993 = 62\,402$; $\begin{array}{r} 78\,395 \\ 15\,993 \\ \hline 62\,402 \end{array}$ $-$

Proprietăţi:

1. $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$ (înmulţirea numerelor naturale este comutativă);

2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ (înmulţirea numerelor naturale este asociativă);

3. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$ (1 este element neutru pentru operaţia de înmulţire);

4. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{N}$ (0 este element absorbant);

5. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ (înmulţirea este distributivă faţă de adunare);

6. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ (înmulţirea este distributivă faţă de scădere).

Teorema împărţirii cu rest:
Pentru orice numere naturale a şi b, cu $b \neq 0$, există numerele naturale q şi r (numite ***cât*** şi ***rest***) unic determinate, astfel încât $a = b \cdot q + r$, unde $0 \leq r < b$.

Avem: ► $a \vdots b \Leftrightarrow b \neq 0$ şi restul împărţirii lui a la b este 0.
(„$\Leftrightarrow$“ înseamnă echivalent);

► $0 \vdots a = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{N}*$ (împărţirea la 0 nu are sens).

Exemple:

1. $978 \cdot 71 = 69\,438$

sau

$$\begin{array}{r} 978\,\cdot \\ 71 \\ \hline 978 \\ 6846 \\ \hline 69\,438 \end{array}$$

2. $27\,588 : 19 = 1\,452$

sau

$$\begin{array}{l|l} 27588 & 19 \\ \cline{2-2} 19 & 1\,452 \\ \cline{1-1} =85 & \\ \;\;76 & \\ \cline{1-1} \;\;=98 & \\ \;\;\;\;95 & \\ \cline{1-1} \;\;\;\;=38 & \\ \;\;\;\;\;\;38 & \\ \cline{1-1} \;\;\;\;\;\;== & \end{array}$$

3. $0 : 2\,014 = 0$.

4. $60\,134 : 0$ nu are sens.

☞ **Exerciţiu rezolvat:**
Câte numere naturale de două cifre există, care împărţite la 7 dau câtul 12?
Soluţie:
$\overline{ab} = 7 \cdot 12 + r,\ r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{84, 85, 86, 87, 88, 89, 90\}$.
Sunt şapte numere. ☜

◀▶ Exerciţii şi probleme propuse◀▶

*

1. Calculaţi:
a) $3\,054 + 783$; b) $4\,365 + 819$;
c) $2\,534 + 1\,597$; d) $1\,504 - 1\,95$;
e) $41\,735 - 32\,673$; f) $1\,012 - 309$;
g) $3\,245 - 135 - 2\,015$; h) $83\,427 - 3\,304 - 21\,17$;
i) $893 + 1\,017 - 987$; j) $837 + 683 + 75\,130$.

2. Calculaţi, utilizând proprietăţile adunării:
a) $21 + 68 + 19 + 22$; b) $39 + 40 + 61 + 22 + 18$;
c) $175 + 275 + 125 + 25$; d) $8\,753 + 794 + 17 + 6$.

3. Determinaţi $a \in \mathbb{N}$, dacă:
a) $1\,370 + a = 1\,493$; b) $1\,270 - a = 191$;
c) $1\,700 - a = 1\,250$; d) $a + 163 = 1\,960$;
e) $a - 1\,973 = 121$; f) $167 + a = 2\,017$.

4. Calculaţi:
a) $29 \cdot 53$; b) $231 \cdot 75$; c) $257 \cdot 8$;
d) $427 \cdot 523$; e) $3\,248 \cdot 1\,503$; f) $701 \cdot 9\,018$.

5. Calculaţi:
a) $214 \cdot 100 - (3\,000 - 150 \cdot 12)$;
b) $431 \cdot (700 - 400) + 210 \cdot (715 - 215)$;
c) $1\,483 + 155 \cdot 61 + 20 \cdot 213 - 196 \cdot 7$;
d) $6\,173 \cdot (61 \cdot 1\,000 - 83 \cdot 13)$;
e) $718 \cdot 10 + (170 \cdot 100 - 973 \cdot 10)$.

6. Efectuaţi:
a) $1\,248 : 8$; b) $1\,707 : 3$; c) $6\,760 : 26$;
d) $4\,095 : 15$; e) $79\,310 : 721$; f) $174\,529 : 1\,961$;
g) $49\,097 : 29$; h) $970\,470 : 789$; i) $38\,304 : 84$.

7. Aflaţi câtul şi restul următoarelor împărţiri:
a) $1\,258 : 9$; b) $3\,742 : 93$; c) $30\,221 : 14$;
d) $20\,312 : 302$; e) $4\,370 : 90$; f) $18\,540 : 15$.

8. Aflaţi $b \in \mathbb{N}$ pentru care:
a) $810 : b = 9$; b) $b : 2 = 113$; c) $b : 1 = b$;
d) $2\,400 : b = 120$; e) $56\,406 : 158 = b$; f) $b : 37 = 573$.

* *

9. Suma a două numere este 4 530. La împărţirea lor se obţine câtul 300 şi restul 15. Aflaţi numerele.

10. Suma a două numere naturale este 2 030. Aflaţi numerele ştiind că unul este de 4 ori mai mare decât celălalt.

11. Produsul a două numere este 36. Aflaţi cea mai mare şi cea mai mică va loare a sumei lor.

12. Suma a două numere naturale nenule este 14. Aflaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare a produsului lor.

13. Aflaţi trei numere naturale ştiind că suma lor este 4 113, suma primelor două este 1 750 şi suma ultimelor două numere este 3 495.

14. Calculaţi:
$3 + 5 + 7 + \ldots + 2\,015 - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2\,014)$.

15. Aflaţi numărul de zerouri în care se termină produsul:
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 40 \cdot 41$.

16. Calculaţi:
$(33 + 66 + 99 + \ldots + 1\,848) : (1 + 2 + 3 + \ldots + 56)$.

17. Dacă $ab - ac = 140$ şi $a = 7$, calculaţi $b - c$.

* * *

18. Găsiţi cel mai mic număr de patru cifre cu următoarea proprietate: diferenţa dintre acesta şi răsturnatul său să fie numărul 2 718.

19. Găsiţi zece numere naturale care au suma şi produsul egale cu 20.

20. Scrieţi numărul 1 997 cu ajutorul a zece cifre de 2 şi al unor operaţii aritmetice.

21. Cum trebuie distribuite greutăţile 1 g, 2 g, ..., 9 g în trei cutii, astfel încât în prima cutie să fie două greutăţi, în a doua, trei, iar în a treia, patru şi suma greutăţilor din fiecare cutie să fie aceeaşi?

22. Găsiţi cel mai mare număr care are toate cifrele diferite, iar produsul lor este 360.

23. În anul 1995, o doamnă a avut vârsta egală cu suma cifrelor anului naşterii sale. În ce an s-a născut?

24. a) Câte numere lipsesc din şirul: $1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots, 97, 98$?

b) Efectuaţi:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + \ldots + 97 + 98 - 2 \cdot (3 + 4 + 5 + \ldots + 34).$$

25. Completaţi căsuţele libere ale pătratului de mai jos cu numere naturale astfel încât suma numerelor din fiecare linie, fiecare coloană şi fiecare diagonală să fie aceeaşi. (*Şerban Nicu*)

16	2	3	13
	11	10	
5			16
4			

2. Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural; ordinea efectuării operaţiilor

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Definim $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Proprietăţi:

$a^1 = a$; $a^0 = 1$, dacă $a \neq 0$; 0^0 nu are sens (nu se defineşte);
$0^n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.
a^n se citeşte „a ***la puterea n***“ sau „***puterea a n-a a numărului a***“.
a se numeşte ***bază a puterii***, iar n este ***exponentul puterii***.

Reguli de calcul cu puteri

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$. Se aplică următoarele reguli de calcul cu puteri:
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, unde $m \geq n$;
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$;
4. $(a^m \cdot b^n)^p = a^{m \cdot p} \cdot b^{n \cdot p}$, $p \in \mathbb{N}$;
5. $a^m : b^m = (a : b)^m$, dacă $a \,\vdots\, b$.

Definiţie. Un număr care este puterea a doua a unui număr natural se numeşte ***pătrat perfect***.

Exemple:
$36 = 6^2$; $121 = 11^2$; $625 = 25^2$.
Ultima cifră a unui pătrat perfect este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.
Numerele care au ultima cifră 2, 3, 7 sau 8 nu sunt pătrate perfecte.
Un număr care este cuprins între două pătrate perfecte consecutive nu este pătrat perfect.

Definiţie. Un număr care este puterea a treia a unui număr natural se numeşte ***cub perfect***.

Exemple:
$125 = 5^3$; $1\,000 = 10^3$; $216 = 6^3$; $1\ 331 = 11^3$.

Ordinea efectuării operaţiilor cu numere naturale

Adunarea şi scăderea sunt operaţii de ordinul I.
Înmulţirea şi împărţirea sunt operaţii de ordinul al II-*lea*.
Ridicarea la putere este operaţie de ordinul al III-lea.

Ordinea operaţiilor este următoarea:
Întâi se efectuează operaţiile de ordinul al III-lea, apoi cele de ordinul al II-lea şi apoi cele de ordinul I.
Dacă există numai operaţii de acelaşi ordin, atunci operaţiile se efectuează în ordinea în care sunt scrise.
Dacă exerciţiul conţine şi paranteze, ordinea efectuării acestora se face începând cu cele rotunde, apoi cu cele drepte, după care se efectuează operaţiile din acolade, iar la final operaţiile din exteriorul acoladelor.

Sisteme de numeraţie

Sistemul de numeraţie cel mai des utilizat este ***sistemul zecimal*** (cu baza 10). Acest sistem utilizează pentru scrierea numerelor zece cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Orice număr natural se poate scrie ca o sumă de produse în care un factor este o putere a lui 10.

Exemple:
$1\,273 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3$;
$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$;
$\overline{210a7} = 2 \cdot 10^4 + 10^3 + a \cdot 10 + 7$.

Un alt sistem de numeraţie des folosit, mai ales în informatică, este ***sistemul binar*** (cu baza 2).
Pentru scrierea unui număr natural în baza 2 se folosesc cifrele 0 si 1.

Exemple:
$10111_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 23_{(10)}$;
$111011_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 59_{(10)}$;

Pentru a trece un număr natural din baza 10 în baza 2 se utilizează un algoritm bazat pe împărţiri succesive la 2.

Exemplu: Trecem în baza 2 numărul 12.
Avem succesiv:

$$\begin{array}{r|r|r|r}
12 & 2 & & \\
\hline
12 & 6 & 2 & \\
\cline{1-1}\cline{3-3}
0 & 6 & 3 & 2 \\
\cline{2-4}
 & 0 & 2 & 1 \\
\cline{3-4}
 & & 1 &
\end{array}$$

Rezultă $1100_{(2)} = 12_{(10)}$.

Observaţie: Scrierea unui număr într-o bază b se bazează pe faptul că b unităţi de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior. Pentru scrierea unui număr în baza b se folosesc cifrele: $0, 1, 2, 3, \ldots, b-1$.

Exemple:
$214_{(5)} = 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4 = 69_{(10)} = 59$. Notaţia pentru baza 10 poate fi omisă.
$1012_{(3)} = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2 = 32_{(10)} = 32$.
$\overline{xyz}_{(b)} = x \cdot b^2 + y \cdot b + z$, $x, y, z \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$.

◄► Exerciţii şi probleme propuse ◄►

*

1. Ridicaţi la putere:

a) 10^2; 10^4; 10^5; 10^7; b) 3^2; 3^3; 3^4; 3^5; c) 2^0; 2^1; 2^2; 2^3; 2^7;

d) 2^{3^2}; 1^{10^4}; 3^{2^2}; e) 0^{70}; 1^{175}; 2013^0.

2. Efectuaţi:

a) $18^2 - 11^2$; b) $29^2 - 17^2$; c) $20^3 - 10^3$;

d) $3^3 - 2^3$; e) $9^2 - 4^2$; f) $\left(2^2\right)^3 - 3^2$.

3. Calculaţi:

a) $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 - 20$; b) $1^{2^3} + 3^{2^2}$;

c) $1^{10} + 3^0 + 0^7 + 78^0 - 11^0$; d) $4^5 - 3^4 - 2^3 - 1$.

Cuprins

Geometrie