

Dorin Lintă

Maranda Lintă

Alina Carmen Birta

Sorin Doru Noaghi

Maria Zaharia

CLASA

8

Matematică

Caiet de activități

## Cuvânt-înainte

Lucrarea reprezintă o *prelungire* a manualului de matematică pentru clasa a VIII-a, Editura Litera, 2020. Aceasta este elaborată în concordanță cu programa școlară – Anexa nr. 2 la ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017, păstrând viziunea ilustrată de manual și oferă elevilor și profesorilor un instrument de lucru ușor de parcurs, în paralel cu manualul.

• Prima parte a lucrării conține *teste inițiale*, concepute astfel încât să poată fi evaluat nivelul de realizare a competențelor generale, din perspectiva competențelor specifice aferente clasei a VII-a.

• A doua parte, cea de fond, urmărește *temele prevăzute de programa școlară*, grupate pe unități de învățare, delimitate similar celor din manual și prezentate într-un format uniform, echilibrat.

• Fiecare unitate de învățare conține:

- o sinteză a cunoștințelor teoretice;
- activități de învățare constând în mai multe tipuri de itemi obiectivi, semiobiectivi și subiectivi;
- teste de evaluare/autoevaluare.

• Breviarul teoretic oferă elevilor posibilitatea de a folosi acest auxiliar și în absența manualului.

Activitățile de învățare constau în diferite tipuri de itemi și vizează formarea deprinderilor, formarea și dezvoltarea abilităților matematice, dezvoltarea motivației superioare privind învățarea matematicii.

Pentru menținerea unui tonus bun al elevilor, deși itemii sunt de diferite grade de dificultate, în lucrare este evitată delimitarea clară a nivelului acestora, autorii considerând că ar constitui un factor de inhibiție pentru unii copii.

Abordarea intuitivă și configurațiile geometrice sugestive facilitează înțelegerea profundă, ceea ce sporește motivația în rândul elevilor.

Pentru perioada de recapitulare și sistematizare a cunoștințelor, esențială în desăvârșirea „construcției” realizate pe parcursul anului școlar, lucrarea conține probleme recapitulative și teste finale.

*Caietul de activități* constituie o resursă utilă și pentru profesorii care predau matematică la clasa a VIII-a și care doresc un mic sprijin în demersul didactic.

Autorii

# Cuprins

<b>Cuvânt-inainte .....</b>	<b>3</b>
<b>Teste inițiale .....</b>	<b>7</b>
<b>1. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN <math>\mathbb{R}</math></b>	
<b>1.1. Multimi .....</b>	<b>10</b>
<b>Multimi de numere .....</b>	<b>10</b>
<b>Relații intre multimi .....</b>	<b>10</b>
<b>Operații cu multimi .....</b>	<b>10</b>
<b>1.2. Intervale de numere reale .....</b>	<b>16</b>
<b>Operații cu intervale de numere reale .....</b>	<b>16</b>
<b>1.3. Inecuații de forma <math>ax + b \leq 0</math> (<math>&lt;</math>, <math>&gt;</math>, <math>\geq</math>), unde <math>a, b \in \mathbb{R}</math> .....</b>	<b>22</b>
<b>Proprietăți ale relațiilor de inegalitate <math>\leq, \geq, &lt;, &gt;</math> .....</b>	<b>22</b>
<b>Inecuațiile de forma <math>ax + b \leq 0</math> (<math>&lt;</math>, <math>&gt;</math>, <math>\geq</math>), unde <math>a</math> și <math>b</math> sunt numere reale date, <math>a \neq 0</math>, se numesc <i>inecuții de gradul I</i>, cu o necunoscută .....</b>	<b>23</b>
<b>Inecuații reducibile la inecuații de forma <math>ax + b \leq 0</math> (<math>&lt;</math>, <math>&gt;</math>, <math>\geq</math>), unde <math>a</math> și <math>b</math> sunt numere reale date, <math>a \neq 0</math> .....</b>	<b>23</b>
<b>2. CALCUL ALGEBRIC ÎN <math>\mathbb{R}</math></b>	
<b>2.1. Operații cu numere reale .....</b>	<b>29</b>
<b>Operații cu numere reale .....</b>	<b>29</b>
<b>Calcule cu numere reale reprezentate prin litere .....</b>	<b>31</b>
<b>2.2. Formule de calcul prescurtat .....</b>	<b>38</b>
<b>Pătratul unui binom. Produsul dintre suma și diferența a doi termeni .....</b>	<b>38</b>
<b>Aplicații ale formulelor de calcul prescurtat în rationalizarea numitorilor unor fracții .....</b>	<b>38</b>
<b>2.3. Descompuneri în factori, utilizând reguli de calcul .....</b>	<b>44</b>
<b>Metoda factorului comun .....</b>	<b>44</b>
<b>Descompuneri în factori, folosind formule .....</b>	
<b>2.4. Fracții algebrice.</b>	
<b>Operații cu fracții algebrice .....</b>	<b>50</b>
<b>Fracții algebrice. Mulțimea de definiție a unei fracții algebrice. Valoarea numerică a unei expresii algebrice .....</b>	<b>50</b>
<b>Amplificarea și simplificarea unui raport de numere reale reprezentate prin litere .....</b>	<b>50</b>
<b>Operații cu fracții algebrice (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere) .....</b>	<b>51</b>
<b>2.5. Ecuații de forma <math>ax^2 + bx + c = 0</math>, unde <math>a, b, c \in \mathbb{R}</math> .....</b>	<b>60</b>
<b>3. FUNCȚII</b>	
<b>3.1. Funcții definite pe mulțimi finite.</b>	
<b>Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice .....</b>	<b>68</b>
<b>Noțiunea de funcție. Moduri de a defini o funcție .....</b>	<b>68</b>
<b>Graficul unei funcții.</b>	
<b>Reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice .....</b>	<b>68</b>
<b>3.2. Funcții de forma <math>f: D \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>f(x) = ax + b</math>, <math>D \subset \mathbb{R}</math>. Interpretare geometrică.</b>	
<b>Lecturi grafice .....</b>	<b>75</b>
<b>Funcții de forma <math>f: D \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>f(x) = ax + b</math>, unde <math>a, b \in \mathbb{R}</math> .....</b>	<b>75</b>
<b>Reprezentarea grafică a funcțiilor <math>f: D \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>f(x) = ax + b</math>, unde <math>a, b \in \mathbb{R}</math> și <math>D</math> este un interval de numere reale. Lecturi grafice .....</b>	<b>76</b>
<b>3.3. Elemente de statistică matematică .....</b>	<b>83</b>
<b>Sortarea și organizarea datelor date după criterii de tip dependență funcțională .....</b>	<b>83</b>
<b>Reprezentarea geometrică a seriilor statistice (graficul frecvențelor absolute) .....</b>	<b>84</b>
<b>Indicatorii tendinței centrale. Interpretarea indicatorilor tendinței centrale a unui set de date .....</b>	<b>84</b>

## 4. ELEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

<b>4.1. Puncte, drepte, plane</b> .....	92	Plane perpendiculare .....	139
Puncte, drepte, plane, convenții de notare, reprezentare, determinarea dreptei .....	92	Secțiuni diagonale. Secțiuni axiale .....	139
Determinarea planului. Relații între puncte, drepte, plane. Poziții relative a două drepte în spațiu .....	92	Drepte perpendiculare .....	
Poziții relative ale unei drepte față de un plan .....	93	Dreaptă perpendiculară pe un plan .....	141
Poziții relative a două plane. Plane paralele; descriere și reprezentare .....	93	Distanța de la un punct la un plan .....	141
<b>4.2. Corpuri geometrice</b> .....	102	Înălțimea piramidei. Înălțimea conului circular drept .....	146
Piramida: reprezentare, elemente caracteristice .....	102	Distanța dintre două plane paralele .....	
Desfășurarea piramidei .....	103	Înălțimea prismei drepte, înălțimea cilindrului circular drept, înălțimea trunchiului de piramidă/trunchiului de con circular drept .....	149
Prisma dreaptă: reprezentare, elemente caracteristice, desfășurare .....	104	Plane perpendiculare .....	151
Desfășurarea prismei drepte .....	105	Secțiuni diagonale. Secțiuni axiale .....	157
Cilindrul circular drept: reprezentare, elemente caracteristice, desfășurare .....	105	<b>4.5. Proiecții ortogonale în spațiu</b> .....	162
Conul circular drept: reprezentare, elemente caracteristice, desfășurare .....	106	Proiecții de puncte, de segmente, de drepte, pe un plan .....	162
<b>4.3. Paralelism în spațiu</b> .....	115	Unghiul dintre o dreaptă și un plan .....	
Drepte parallele. Unghiul a două drepte în spațiu .....	115	Lungimea proiecției unui segment pe un plan .....	163
Dreaptă paralelă cu un plan .....	115	Unghiul diedru. Unghi plan corespunzător unui diedru. Unghiul a două plane .....	164
Plane paralele .....	116	Proiecții de puncte, de segmente, de drepte, pe un plan .....	165
Secțiuni paralele cu baza, în corpurile studiate .....	116	Unghiul dintre o dreaptă și un plan .....	
Drepte paralele .....		Lungimea proiecției unui segment, pe un plan .....	170
Unghiul a două drepte în spațiu .....	117	Unghiul diedru. Unghi plan corespunzător unui diedru. Unghiul a două plane .....	174
Dreaptă paralelă cu un plan .....	122	<b>4.6. Teorema celor trei perpendiculare;</b> calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane parallele .....	181
Plane paralele .....	126	Teorema celor trei perpendiculare, calculul distanței de la un punct la o dreaptă .....	181
Secțiuni paralele cu baza, în corpurile studiate .....	130	Reciprocile teoremei celor trei perpendiculare, calculul distanței dintre două plane paralele .....	181
<b>4.4. Perpendicularitate în spațiu</b> .....	136	Proiecții de puncte, de segmente, de drepte, pe un plan .....	182
Drepte perpendiculare .....			
Dreaptă perpendiculară pe un plan .....			
Distanța de la un punct la un plan .....	136		
Distanța dintre două plane paralele .....			
Înălțimea prismei drepte, înălțimea cilindrului circular drept, înălțimea trunchiului de piramidă/trunchiului de con circular drept .....	137		

## **5. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE**

<b>5.1.</b> Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate .....	191	Aria și volumul piramidei regulate și ale tetraedrului regulat .....	214
Calcularea unor distanțe pe fețele sau în interiorul corpurilor studiate: .....	191	Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată .....	220
Calcularea unor măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor studiate: .....	191		
<b>5.2.</b> ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE .....	198	<b>5.4.</b> Aria laterală, aria totală și volumul unor corperi geometrice rotunde .....	225
Aria și volumul prismei drepte (cu baza triunghi echilateral, patrat sau hexagon regulat), ale paralelipipedului dreptunghic și ale cubului .....	198	Aria și volumul cilindrului circular drept .....	225
Paralelipipedul dreptunghic, Cubul .....	199	Aria și volumul conului circular drept .....	226
Prisma regulată (triunghiulară, patrulateră, hexagonală) .....	205	Aria și volumul trunchiului de con circular drept .....	226
<b>5.3.</b> Aria și volumul piramidei regulate și ale tetraedrului regulat. Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată .....	212	Sfera, Aria și volumul sferei .....	227
Aria și volumul piramidei regulate și ale tetraedrului regulat .....	212	Aria și volumul cilindrului circular drept .....	227
Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată .....	213	Aria și volumul conului circular drept .....	230
		Aria și volumul trunchiului de con circular drept .....	232
		Sfera, Aria și volumul sferei .....	234
		<b>PROBLEME RECAPITULATIVE</b> .....	238
		Teste finale .....	243
		Răspunsuri .....	248

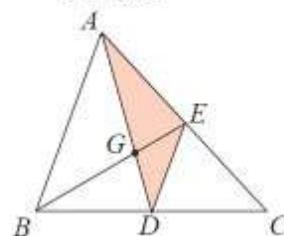
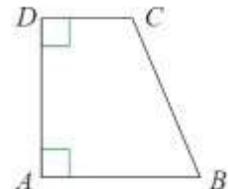
# Teste inițiale

## TEST ÎNÎAL 1

### Subiectul I

Încercuiți răspunsul corect. Doar un răspuns este corect.

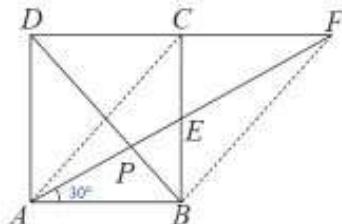
- 5 p.** 1 Rezultatul calculului  $\sqrt{36} - 2,5 \cdot \sqrt{5,76}$  este:  
 A. 2;      B. 1;      C. 0;      D. -1.
- 5 p.** 2 Dacă  $\frac{4}{x} = \frac{y}{\sqrt{2}}$ , atunci  $3 \cdot x \cdot y - \frac{30}{\sqrt{2}}$  este:  
 A.  $\sqrt{2}$ ;      B.  $3\sqrt{2}$ ;      C.  $-\sqrt{2}$ ;      D.  $-3\sqrt{2}$ .
- 5 p.** 3 Opusul numărului  $|1 - \sqrt{3}| + \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2}$  este:  
 A. -4;      B. -2;      C. -1;      D.  $-\sqrt{3}$ .
- 5 p.** 4 Pentru un spectacol s-au pus în vânzare 216 bilete, unele cu 20 lei biletul, altele cu 15 lei biletul, încasându-se în total 3935 lei. Numărul biletelor de 20 lei vândute a fost:  
 A. 140;      B. 141;      C. 139;      D. 138.
- 5 p.** 5 Un trapez dreptunghic are laturile neparalele de 12 cm, respectiv 13 cm, iar baza mică are lungimea 7 cm. Perimetrul trapezului este:  
 A. 44 cm;      B. 40 cm;  
 C. 42 cm;      D. 46 cm.
- 5 p.** 6 În triunghiul  $ABC$ ,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB = 8$  cm,  $BC = 10$  cm. Tangenta unghiului  $\angle ABC$  este:  
 A. 0,7;      B. 0,75;      C. 1,(3);      D. 1,25.
- 5 p.** 7 Fie  $ABC$  un triunghi cu aria  $100 \text{ cm}^2$ ,  $G$  centrul său de greutate, iar  $AG \cap BC = \{D\}$ ,  $BG \cap AC = \{E\}$ . Aria triunghiului  $ADE$  este:  
 A.  $50 \text{ cm}^2$ ;      B.  $45 \text{ cm}^2$ ;  
 C.  $35 \text{ cm}^2$ ;      D.  $25 \text{ cm}^2$ .
- 5 p.** 8 Pe cercul  $C(O, r)$ ,  $r = 3$  cm, se consideră punctele  $A$ ,  $B$ , astfel încât  $\widehat{AB} = 60^\circ$ . Lungimea arcului mare  $\widehat{AB}$  este:  
 A.  $5\pi$  cm;      B.  $4\pi$  cm;      C.  $3\pi$  cm.      D.  $6\pi$  cm.



## Subiectul al II-lea

Scrieți rezolvările complete.

- 10 p.** **1** Suma a două numere este 39, iar diferența dintre dublul unuia și triplul celuilalt este 18.  
a) Aflați numerele.  
b) Calculați media geometrică a celor două numere.
- 5 p.** **2** Arătați că numărul  $a = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \cdot \sqrt{3} + \frac{9}{\sqrt{27}}$  este număr natural.
- 10 p.** **3** Între mulțimile  $A = \{-2, 0, 2\}$  și  $B = \{-3, 1, 5\}$  se stabilește dependență funcțională  $x \rightarrow y$ ,  $y = -2 \cdot x + 1$ ,  $x \in A$ . Reprezentați printr-un tabel de valori dependența funcțională descrisă.
- 10 p.** **4**  $ABCD$  este un dreptunghi,  $E$  este mijlocul laturii  $BC$ , iar  $AE$  intersectează dreptele  $CD$  și  $BD$  în punctele  $F$ , respectiv  $P$ . Se știe că  $AB = 12$  cm și  $\angle EAB = 30^\circ$ .  
a) Demonstrați că  $ABFC$  este paralelogram.  
b) Calculați lungimile segmentelor  $AF$  și  $PE$ .



## TEST INICIAL 2

### Subiectul I

Încercuiți răspunsul corect. Doar un răspuns este corect.

- 5 p.** **1** Rezultatul calculului  $\sqrt{32} - 4\sqrt{50} + 7\sqrt{8}$ , este:  
A.  $-3\sqrt{2}$ ; B.  $-2\sqrt{2}$ ; C.  $-\sqrt{2}$ ; D.  $\sqrt{2}$ .
- 5 p.** **2** Numărul elementelor iraționale din mulțimea  $\{\sqrt{5}, \sqrt{9}, \sqrt{2}, \sqrt{81}, \sqrt{361}\}$  este:  
A. 5; B. 4; C. 3; D. 2.
- 5 p.** **3** Într-un sistem de axe ortogonale sunt reprezentate punctele  $A(-3; 2)$ ,  $B(1; 5)$ . Lungimea segmentului  $AB$  este:  
A. 4 u.m.; B. 3 u.m.; C. 5 u.m.; D. 6 u.m.
- 5 p.** **4** Media geometrică a numerelor  $5\sqrt{5}$  și  $9\sqrt{5}$  este:  
A. 15; B. 14; C. 13; D. 16.
- 5 p.** **5** Un trapez isoscel are un unghi de  $134^\circ$ . Unghiul opus acestuia are măsura:  
A.  $47^\circ$ ; B.  $46^\circ$ ; C.  $45^\circ$ ; D.  $134^\circ$ .
- 5 p.** **6** În dreptunghiul  $ABCD$ ,  $AB = 6$  cm și  $\angle ABD = 60^\circ$ . Aria dreptunghiului este:  
A.  $30\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>; B.  $32\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>; C.  $36\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>; D.  $18\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.
- 5 p.** **7** În paralelogramul  $ABCD$ ,  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  $AC = 10$  cm,  $BO = 4$  cm,  $BC = 3$  cm. Perimetrul triunghiul  $AOD$  este:  
A. 12 cm; B. 15 cm; C. 16 cm; D. 10 cm.
- 5 p.** **8** Lungimea unui cerc este  $20\pi$  cm, iar o coardă a sa are lungimea 12 cm. Distanța de la centrul cercului la coardă este:  
A. 10 cm; B. 6 cm; C. 12 cm; D. 8 cm.

## Subiectul al II-lea

Scrieți rezolvările complete.

5 p.

- 1 Fie numerele  $a = -\frac{3}{\sqrt{3}} + 1$  și  $b = -\sqrt{27} + \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$ .

Demonstrați că numărul  $c = -2 \cdot a + b$  este număr întreg.

- 2 A două limbă modernă studiată de elevii unei clase este, la alegere, limba franceză, limba germană sau limba spaniolă. Folosind diagrama alăturată, determinați:

10 p.

- 10 p.

- 3  $ABCD$  este trapez,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle B = 135^\circ$ ,  $AB = 15$  cm,  $CD = 25$  cm.

5 p.

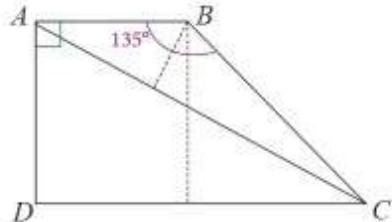
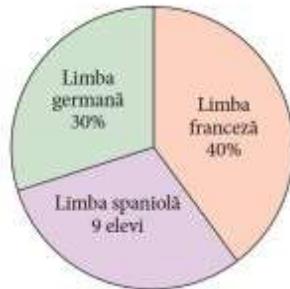
- a) Demonstrați că  $AD = 10$  cm.

5 p.

- b) Calculați aria trapezului.

5 p.

- c) Calculați distanța de la punctul  $B$  la dreapta  $AC$ .



# 1

# INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

## 1.1. Mulțimi

### A. BREVIAR TEORETIC

#### Mulțimi de numere

Mulțimea numerelor *naturale*:  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Mulțimea numerelor *intregi*:  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Mulțimea numerelor raționale:  $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$

Reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale este *mulțimea numerelor reale*, notată cu  $\mathbb{R}$ .

#### Relații între mulțimi

Două mulțimi care au aceleași elemente se numesc *mulțimi egale*.

Mulțimea  $A$  este inclusă în mulțimea  $B$  dacă orice element al mulțimii  $A$  este și element al mulțimii  $B$ .

Scriem  $A \subset B$ . Mulțimea  $A$  se va numi *submulțime* sau *parte* a mulțimii  $B$ .

*Propoziții:*

1. *Mulțimea vidă* este submulțime a oricărei mulțimi:

$$\emptyset \subset A \text{ oricare ar fi mulțimea } A.$$

2. *Mulțimea  $A$*  este o submulțime a mulțimii  $A$ , oricare ar fi mulțimea  $A$ :

$$A \subset A \text{ oricare ar fi mulțimea } A.$$

3. *Mulțimile  $A$  și  $B$  sunt egale* dacă și numai dacă fiecare dintre ele este submulțime a celeilalte:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ și } B \subset A.$$

#### Operații cu mulțimi

1. *Reuniunea* mulțimilor  $A$  și  $B$  este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre ele:  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ .

2. *Intersecția* mulțimilor  $A$  și  $B$  este mulțimea formată din elementele comune celor două mulțimi:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$ . Dacă  $A \cap B = \emptyset$ , atunci  $A$  și  $B$  se numesc mulțimi *disjuncte*.

3. *Diferența* mulțimilor  $A$  și  $B$  este mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii  $A$  și nu aparțin mulțimii  $B$ :  $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$ .

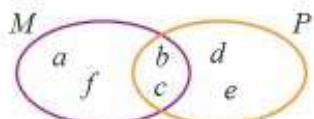
## B. ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

I. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

- 1** Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < 3x \leq 18\}$  este:  
**A)  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ;** **B)  $A = \{3, 4, 5, 6\}$ ;**  
**C)  $A = \{3, 4, 5\}$ ;** **D)  $A = \{4, 5, 6\}$ .**
- 2** Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 21 \leq x^2 < 64\}$  este:  
**A)  $B = \{5, 6, 7, 8\}$ ;** **B)  $B = \{5, 6, 7\}$ ;**  
**C)  $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ;** **D)  $B = \{4, 5, 6\}$ .**
- 3** Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 37 < 2^x < 257\}$  este:  
**A)  $C = \{5, 6, 7, 8\}$ ;** **B)  $C = \{6, 7, 8, 9\}$ ;**  
**C)  $C = \{6, 7, 8\}$ ;** **D)  $C = \{4, 5, 6\}$ .**
- 4** Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea  $E = \{\overline{ab} \in \mathbb{N} \mid a:3 \text{ și } b:5\}$  este:  
**A)  $E = \{30, 35, 60, 65, 90, 95\}$ ;**  
**B)  $E = \{30, 60, 90\}$ ;**  
**C)  $E = \{35, 65, 95\}$ ;**  
**D)  $E = \{15, 30, 35, 60, 65, 90, 95\}$ .**
- 5** Scrisă prin proprietatea caracteristică elementelor sale, mulțimea  $A = \{0, 3, 6, 9, \dots, 51\}$  este:  
**A)  $A = \{3k \mid 0 \leq k \leq 17\}$ ;**  
**B)  $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ;**  
**C)  $A = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ;**  
**D)  $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N} \text{ și } k \leq 17\}$ .**
- 6** Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea  $D = \{3x - 1 \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 3 \leq x < 6\}$  este:  
**A)  $D = \{8, 11, 14, 17\}$ ;** **B)  $D = \{8, 11, 14\}$ ;**  
**C)  $D = \{11, 14, 17\}$ ;** **D)  $D = \{3, 4, 5\}$ .**
- 7** Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea  $F = \{\overline{ab} \in \mathbb{N} \mid a = 4b\}$  este:  
**A)  $F = \{41, 64, 82\}$ ;** **B)  $F = \{41, 84\}$ ;**  
**C)  $F = \{21, 48, 63, 84\}$ ;** **D)  $F = \{41, 82\}$ .**
- 8** Scrisă prin proprietatea caracteristică elementelor sale, mulțimea  $B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$  este:  
**A)  $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 3\}$ ;** **B)  $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 3\}$ ;**  
**C)  $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \geq 3\}$ ;** **D)  $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| > 3\}$ .**
- 9** Scrisă prin proprietatea caracteristică elementelor sale, mulțimea  $C = \{3, 9, 27, \dots, 243\}$  este:  
**A)  $C = \{3x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 5\}$ ;**  
**B)  $C = \{3^x \mid 0 < x \leq 5\}$ ;**  
**C)  $C = \{3^x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x < 5\}$ ;**  
**D)  $C = \{3^x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x \leq 5\}$ .**
- 10** Scrisă prin proprietatea caracteristică elementelor sale, mulțimea  $D = \{15, 17, 19, \dots, 49\}$  este:  
**A)  $D = \{2k + 1 \mid 7 \leq k \leq 24\}$ ;**  
**B)  $D = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N} \text{ și } 7 \leq k \leq 24\}$ ;**  
**C)  $D = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N} \text{ și } 8 \leq k \leq 24\}$ ;**  
**D)  $D = \{15 + 2k \mid k \in \mathbb{N} \text{ și } 0 \leq k \leq 17\}$ .**
- 11** Pentru mulțimile  $M$  și  $P$ , date în diagrama alăturată, completați simbolul **✓** în căsuță corespunzătoare valorii de adevăr a fiecărei dintre propozițiile următoare:

Propoziția	Adevărată	Falsă
$p_1: a \in M \cap P$		
$p_3: M \cap P = \{b, c\}$		
$p_5: \{e, f\} \subset M \cup P$		

Propoziția	Adevărată	Falsă
$p_2: b \notin M \cap P$		
$p_4: f \in M \setminus P$		
$p_6: \text{card}(P \setminus M) = 3$		



## II. Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

- 1** Între elementul  $a$  și mulțimea  $M = \{a, d, e\}$  are loc relația  $a \dots M$ .
- 2** Între mulțimile  $A = \{-1, 1\}$  și  $B = \{-1, 0, 1, 2\}$  are loc relația  $A \dots B$ .
- 3** Dacă  $M \cup N = M \cap N$ , atunci mulțimile  $M$  și  $N$  sunt ... .
- 4** Dacă  $M \cap N = M$ , atunci între mulțimile  $M$  și  $N$  are loc relația  $M \dots N$ .
- 5** Dacă orice element al mulțimii  $B$  este și element al mulțimii  $A$ , atunci  $B$  este ... a mulțimii  $A$ .
- 6** Mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 5\}$  are ... submulțimi nevide.
- 7** Dacă  $M = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{3}{x-1} \in \mathbb{N} \right\}$  și  $P = \left\{ y \in \mathbb{N} \mid \overline{1x3}:3 \right\}$ , atunci  $\text{card}(M \cap P) = \dots$

## III. Stabilitiți asocierile corecte

- 1** Asociați numărului care identifică o mulțime din coloana **A**, litera care identifică rezultatul corespunzător, scris în coloana **B**.

A	B
1. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$	a) $\{0, 2, 4, 6\}$
2. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 6\}$	b) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
3. $\{x \in \mathbb{N} \mid x : 6 \text{ și } x < 20\}$	c) $\{0, 2, 4\}$
4. $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 6 \text{ și } x \text{ este număr par}\}$	d) $\{1, 2, 3, 6\}$
	e) $\{0, 1, 2, 3, 6\}$
	f) $\{0, 6, 12, 18\}$

- 2** Se consideră mulțimile  $M = \{-2, 0, 1, 3\}$  și  $P = \{y \mid y = 2x^2 - 1, x \in M\}$ . Asociați fiecărui număr, scris în coloana **A**, care identifică un element  $x$ , al mulțimii  $M$ , litera, scrisă în coloana **B**, care identifică elementul  $y$  al mulțimii  $P$ , corespunzător valorii  $x$ .

A	B
1. -2	a) -1    b) 17
2. 0	c) 7    d) 1
3. 1	e) -0,5    f) -2
4. 3	

## IV. Scrieți rezolvările complete.

- 1** Se consideră mulțimile  $A = \{-1, 2, 3\}$  și  $B = \{-2, 0, 2\}$ . Determinați elementele următoarelor mulțimi:
- a)  $A \cup B$ ;      b)  $A \cap B$ ;      c)  $A \setminus B$ ;
- d)  $B \setminus A$ ;      e)  $A \times B$ ;      f)  $B \times A$ .

- 2** Se consideră mulțimea  $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 17\}$ . Scrieți, prin enumerarea elementelor, următoarele mulțimi:  
 $A = \{x \in M \mid x \text{ este număr prim}\}$ ;  
 $B = \{x \in M \mid x \text{ este divizor propriu al lui } 10\}$ ;  
 $C = \{x \in M \mid x \text{ este număr impar}\}$ ;  
 $D = \{x \in M \mid x \text{ este divizor impropriu al lui } 6\}$ ;
- 3** Scrieți următoarele mulțimi, precizând o proprietate caracteristică a elementelor.
- a) mulțimea numerelor naturale impare, divizibile cu 5, mai mici decât 57;

- b) mulțimea numerelor naturale, pătrate perfecte, cuprinse între 31 și 83;  
c) mulțimea numerelor naturale, cuburi perfecte, cuprinse între 23 și 216;  
d) mulțimea numerelor naturale de două cifre care dau restul 7 prin împărțire la 27.

- 4** Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:  
 $p_1: 3 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\}$ ;  $p_2: \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^* = \{0\}$ ;  
 $p_3: 4 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$ ;  $p_4: \{2, 3\} \subset \{1, 2, 5\}$ ;  
 $p_5: \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$ ;  
 $p_6: \emptyset \subset \{0\}$ .
- 5** Pentru fiecare din situațiile următoare, determinați toate valorile lui  $x$  pentru care afirmația este adevărată.
- a)  $\{x\} \subset \{1, 3\}$       b)  $\{1, 3, x\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$
- c)  $\{2, x, 3\} \subset \{1, 2, 3, 5\}$

**6** Determinați elementele următoarelor mulțimi:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{12}{x} \in \mathbb{N} \right\};$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{10}{x} \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{18}{2x-1} \in \mathbb{N} \right\};$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{18}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$E = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{18}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$F = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{18}{2x-1} \in \mathbb{N} \right\}.$$

**7** Fie mulțimea

$$M = \left\{ -2; 1, (3); \sqrt{5}; \frac{\sqrt{9}}{3}; \sqrt{\frac{1}{4}}; \frac{15}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{45}}; 0 \right\}.$$

Scrieți elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\}; B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\};$$

$$C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}\}; D = \{x \in M \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

**8** Precizați valoarea de adevăr a fiecărei dintre propozițiile:

$$p_1: -2 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\};$$

$$p_2: \sqrt{3} \in \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2, (3)\};$$

$$p_3: 136 \in \{x \mid x = n^2 \text{ și } n \in \mathbb{N}\};$$

$$p_4: 324 \notin \{x \mid x = n^2, n \in \mathbb{N}\};$$

$$p_5: -\sqrt{5} \in \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\};$$

$$p_6: 5 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}.$$

**9** Se consideră mulțimile:  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ;

$$X = \{x \mid x = 5a - 2 \text{ și } a \in A\};$$

$$Y = \{y \mid y = 3^a \text{ și } a \in A\};$$

$$Z = \{z \mid z = a^3 \text{ și } a \in A\}.$$

a) Scrieți mulțimile date, enumerând elementele acestora.

b) Calculați:  $A \cup X; Y \cap Z; X \setminus Z; Z \setminus X$ .

**10** Se consideră mulțimile  $A = \{3n + 5 \mid n \in \mathbb{N}\}$  și  $B = \{2n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

a) Scrieți trei elemente ale mulțimii  $A$  și trei elemente ale mulțimii  $B$ .

b) Demonstrați că  $23 \in A \cap B$ .

**11** Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite.

$$\text{a)} M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 1000\};$$

$$\text{b)} N = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1000\};$$

$$\text{c)} P = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1000\};$$

$$\text{d)} Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x - 7 \geq 11\};$$

$$\text{e)} R = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 1000\};$$

$$\text{f)} S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3^x > 1000\}.$$

**12** Se consideră mulțimile

$$A = \left\{ \frac{2n+1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 5 \right\} \text{ și}$$

$$B = \left\{ \frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*, n \leq 5 \right\}.$$

a) Scrieți mulțimile  $A$  și  $B$ , enumerând elementele acestora.

b) Determinați cardinalul mulțimii  $A$  și cardinalul mulțimii  $B$ .

c) Calculați intersecția mulțimilor  $A$  și  $B$ .

**13** Enumerați elementele, apoi determinați cardinalul fiecărei dintre mulțimile următoare.

$$\text{a)} A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\};$$

$$\text{b)} B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\};$$

$$\text{c)} C = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{4} \text{ este fracție subunitară}\};$$

$$\text{d)} D = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{4}{x} \text{ este fracție supraunitară}\}.$$

**14** Știind că  $D_n$  reprezintă mulțimea divizorilor naturali ai numărului  $n$ , calculați:

$$\text{a)} D_9 \cup D_{12} \quad \text{b)} D_9 \cap D_{12}$$

$$\text{c)} D_9 \setminus D_{12} \quad \text{d)} D_{12} \setminus D_9$$

**15** Știind că  $M_n$  reprezintă mulțimea multiplilor naturali ai numărului  $n$ , calculați:

$$\text{a)} M_9 \cap M_3 \quad \text{b)} M_9 \cap M_{12}$$

**16** Se consideră mulțimile  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 6\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < 2x + 1 < 9\}$ .

a) Scrieți submulțimile mulțimii  $A$ .

b) Efectuați calculele:  $A \cup B; A \cap B; A \setminus B; B \setminus A; A \times B; B \times A$ .

**17** Determinați elementele mulțimilor:

- a)  $A = \{x \mid \overline{32x}; 2\}$ ;
- b)  $B = \{x \mid \overline{1x5}; 3\}$ ;
- c)  $C = \{x \mid \overline{74x}; 5\}$ ;
- d)  $D = \{x \mid \overline{36xx}; 9\}$ ;
- e)  $E = \{x \mid \overline{472x}; 6\}$ ;
- f)  $F = \{x \mid \overline{568x}; 4\}$ .

**18** Determinați cardinalul fiecărei dintre mulțimile:  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 \leq x^2 < 75\}$ ;  
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x^3 < 125\}$ .

**19** Se consideră mulțimile

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{x+7}{x+1} \in \mathbb{N} \right\},$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{x+6}{x} \in \mathbb{N} \right\} \text{ și}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{x-1} \in \mathbb{N} \right\}.$$

- a) Scrieți mulțimile  $A$ ,  $B$  și  $C$ , prin enumerarea elementelor.
- b) Folosind rezultatele obținute la subpunctul a), calculați  $A \cup B$ ;  $B \setminus A$ ;  $A \times C$ ;  $C \times B$ ;  $A \cap B \cap C$ .

**20** Se consideră mulțimea  $M = \{a, b\}$ . Scrieți:

- a) două mulțimi, având intersecția egală cu mulțimea  $M$ ;
- b) trei mulțimi, având intersecția egală cu mulțimea  $M$ .

**21** Determinați mulțimile  $A$  și  $B$  care îndeplinesc, simultan, condițiile:

- a)  $A \cap B = \{2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\}$ ;
- b)  $A \cup B = \{-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ;
- c)  $A \setminus B = \{\sqrt{2}\}$ .

**22** Se consideră mulțimea

$$A = \left\{ -\sqrt{4}; 0; -1; \frac{1}{2}; 2; 3 \right\}.$$

a) Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:  $A \cap \mathbb{N}^*$ ,  $A \cap \mathbb{Z}$ ,  $A \setminus \mathbb{Z}^*$ ,  $A \setminus \mathbb{N}$ .

b) Calculați  $\mathbb{Z} \cap B$ , unde  $B = \{x \in A \mid x < 2\}$ .

c) Pentru  $C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 2\}$ , calculați  $A \cap C$ .

**23** Fie mulțimile  $M = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{5}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$  și

$$P = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x+3| = 1\}.$$

a) Arătați că  $-1$  este element comun mulțimilor  $M$  și  $P$ .

b) Calculați suma elementelor mulțimii  $M$ .

c) Scrieți elementele mulțimii  $M \times P$ .

**24** Determinați mulțimile  $A$  și  $B$ , știind că îndeplinesc simultan condițiile:

- a)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;
- b)  $A \cap B = \emptyset$ ;
- c) Dacă  $x \in A$ , atunci  $(x-1) \in B$ ;
- d)  $\text{card } A > 2$ .

### C. TEST DE EVALUARE/AUTOEVALUARE

#### Subiectul I

Încercuiți răspunsul corect. Doar un răspuns este corect.

**5 p.**

- 1 Scrisă prin enumerarea elementelor sale, mulțimea  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq 3^x \leq 243\}$  este:

- A) {2, 3, 4}      B) {3, 4, 5}      C) {1, 2, 3, 4}      D) {2, 3, 4, 5}.

**5 p.**

- 2 Fie mulțimea  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n+1, n \leq 25\}$ . Cardinalul mulțimii  $M$  este:

- A) 51      B) 26      C) 52      D) 25.

**5 p.**

- 3 Numărul tuturor submulțimilor mulțimii  $M = \{-3, \sqrt{5}, 7\}$  este:

- A) 3      B) 6      C) 8      D) 9.

- 5 p.** **4** Suma numerelor raționale, elemente ale mulțimii  $A = \left\{ \frac{1}{3}; 0; \sqrt{4}; -\sqrt{\frac{1}{9}}; \sqrt{3}; -\sqrt{7}; -1 \right\}$ , este:  
 A)  $2\frac{1}{3}$       B) 1      C) 0      D)  $1\frac{1}{3}$ .
- 5 p.** **5** Pentru  $A = \{-2, 1, 3\}$  și  $B = \{1, 3, 7\}$ , mulțimea  $A \cup B$  este:  
 A)  $\{-2, 1, 3\}$       B)  $\{1, 3, 7\}$       C)  $\{-2, 1, 3, 7\}$       D)  $\{1, 3\}$ .
- 5 p.** **6** Dacă  $A = \{a, b, c\}$  și  $B = \{a, b, d\}$ , atunci mulțimea  $A \cap B$  este:  
 A)  $\{a, c\}$       B)  $\{a, b\}$       C)  $\{c, d\}$       D)  $\{a, d\}$ .
- 5 p.** **7** Mulțimea  $A$  are 7 elemente, mulțimea  $B$  are 18 elemente, iar cardinalul mulțimii  $A \cup B$  este 20. Atunci, numărul elementelor mulțimii  $A \cap B$  este:  
 A) 7      B) 18      C) 5      D) 25.
- 5 p.** **8** Dacă  $A = \{-2, 1, 3, 4\}$ ,  $B = \{-2, 5, a\}$  și  $A \cap B = \{-2, 3\}$ , atunci valoarea numărului real  $a$  este:  
 A) 4      B) 1      C) 5      D) 3.

### Subiectul al II-lea

Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

- 5 p.** **1** Dacă  $x \in \mathbb{N}$  și  $3x - 1 \in \{-7, 2, 8\}$ , atunci  $x \in \{ \dots \}$ .
- 5 p.** **2** Elementele mulțimii  $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este restul împărțirii unui număr natural la } 5\}$  sunt: ... .
- 5 p.** **3** Dacă  $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x-1}{x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$  și  $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x-1}{x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$ , atunci  $B \setminus A = \{ \dots \}$ .
- 5 p.** **4** Mulțimea  $B = \{23, 24, 25, \dots, 137\}$  conține ... multipli ai numărului 3.

### Subiectul al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

- 1** Se consideră mulțimile  
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = n + n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$  și  $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$ .  
 a) Aflați mulțimile  $A$ ,  $B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .  
 b) Deduceți că mulțimile  $A$  și  $B$  sunt disjuncte.
- 2** Fie mulțimile  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| = 1\}$  și  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 2,5 \text{ și } |2 - x| < 3\}$ .  
 a) Scrieți mulțimile  $C$  și  $D$ , enumerând elementele acestora.  
 b) Determinați mulțimea  $C \times D$ .
- 3** Se consideră mulțimile  $E = \{1, 5, 9, 13, 17, \dots\}$ ,  $F = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ .  
 a) Scrieți mulțimea  $E$  cu ajutorul unei proprietăți comune a elementelor acesteia.  
 b) Calculați suma elementelor mulțimii  $E \cap F$ , care au cel mult două cifre.

## 1.2. Intervale de numere reale

### A. BREVIAR TEORETIC

Axa numerelor este o dreaptă  $d$  oarecare, pe care stabilim *sensul pozitiv, originea și unitatea de măsură*. Fiecare punct de pe această dreaptă îi corespunde un număr real și fiecare număr real îi corespunde un punct pe dreapta  $d$ . În acest fel, dreapta  $d$  se identifică cu mulțimea numerelor reale și vom spune că *dreapta  $d$  este reprezentarea geometrică a mulțimii numerelor reale*.

INTERVALE MĂRGINITE		INTERVALE NEMĂRGINITE	
Intervalul	Reprezentarea geometrică	Intervalul	Reprezentarea geometrică
interval deschis $(a, b)$ $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } a < x < b\}$		Interval deschis nemărginit la dreapta $(a, \infty)$ $(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x > a\}$	
interval închis $[a, b]$ $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } a \leq x \leq b\}$		Interval inchis la stânga, nemărginit la dreapta $[a, \infty)$ $[a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq a\}$	
interval semideschis $(a, b]$ $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } a < x \leq b\}$		interval deschis, nemărginit la stânga $(-\infty, a)$ $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x < a\}$	
interval semideschis $[a, b)$ $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } a \leq x < b\}$		interval inchis la dreapta, nemărginit la stânga $(-\infty, a]$ $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x \leq a\}$	
Oricare ar fi $a > 0$ , au loc echivalențele: 1) $x \in \mathbb{R} \text{ și }  x  < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$ 2) $x \in \mathbb{R} \text{ și }  x  \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$		Oricare ar fi $a > 0$ , au loc echivalențele: 1) $x \in \mathbb{R} \text{ și }  x  > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ 2) $x \in \mathbb{R} \text{ și }  x  \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$	

### Operații cu intervale de numere reale

Intervalele de numere reale sunt submulțimi ale mulțimii numerelor reale. În consecință, între intervale de numere reale se definesc aceleași operații ca între mulțimi.

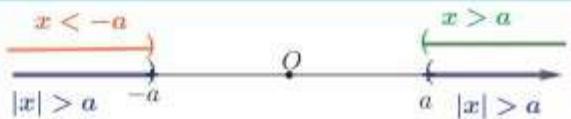
Reprezentarea pe axă a intervalor este foarte utilă pentru efectuarea operațiilor.

*Exemple:*

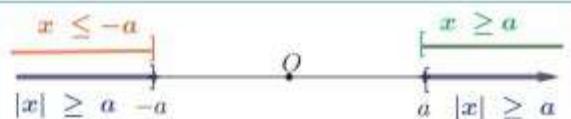
Oricare ar fi numărul real  $a > 0$ , au loc egalitățile:

1. $\{x \in \mathbb{R} \text{ și }  x  < a\} = (-\infty; a) \cap (-a, \infty) = (-a; a)$	
2. $\{x \in \mathbb{R} \text{ și }  x  \leq a\} = (-\infty; a] \cap [-a, \infty) = [-a, a]$	

3.  $\{x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$



4.  $\{x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a, \infty)$



*Observații:* 1.  $\{x \in \mathbb{R} \text{ și } |x| \geq 0\} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

2. Reuniunea, intersecția, diferența a două intervale nu au ca rezultat neapărat un interval.

## B. ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

I. Stabilii varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

1 Cel mai mic număr întreg care aparține intervalului  $I = (-5, 3]$  este:

- A) 3;    B) -5;    C) -4;    D) -5.

2 Cel mai mic număr întreg care nu aparține intervalului  $I = \left(-\infty, \frac{11}{3}\right]$  este:

- A) -1;    B) 0;    C) 3;    D) 4.

3 Cel mai mare număr întreg care aparține intervalului  $I = \left[-5, -\frac{5}{2}\right]$  este:

- A) -2;    B) -3;    C) 0;    D) 1.

4 Cel mai mare număr întreg care nu aparține intervalului  $I = \left[-2\sqrt{3}, +\infty\right)$  este:

- A) 0;    B) -3;    C) -2;    D) -4.

5 Mulțimea  $M = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| \leq 3\}$ , scrisă sub formă de interval, este:

- A)  $[-3, 3]$ ; B)  $[-4, 2]$ ; C)  $[-4, 2)$ ; D)  $(-4, 2]$ .

6 Intervalul  $I = \left(0; \frac{1}{3}\right)$ , scris ca mulțime definită prin proprietatea comună a elementelor sale, este:

A)  $I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{1}{3}\right\};$

B)  $I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{3}\right\};$

C)  $I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|2x - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{3}\right\};$

D)  $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 0, (3)| < 0, (3)\}.$

7 Scrisă sub formă de interval, mulțimea

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq \frac{x-3}{2} < 3\right\}$$

- A)  $[-1, 9)$ ;    B)  $[-4, 6)$ ;    C)  $[-2, 3)$ ;    D)  $[-7, 3)$ .

8 Mulțimea  $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{x}{3} > -\frac{\sqrt{2}}{6}\right\}$  se scrie sub formă de interval, astfel:

A)  $(-\infty, \sqrt{2})$ ;    B)  $\left(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$

C)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ ;    D)  $\left(-3, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right).$

9 Cardinalul mulțimii  $C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 5\}$  este:

- A) 5;    B) 10;    C) 8;    D) 9.

10 Numerele întregi  $a$  și  $b$  pentru care

$$(a, b) \cap \mathbb{N} = \{5\}$$

- A)  $a = 5; b = 6$ ;    B)  $a = b = 5$ ;    C)  $a = 4; b = 5$ ;    D)  $a = 4; b = 6$ .

11 Completati A, dacă propoziția este adevărată sau F, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	Propoziția
$p_1: 2 \in (-\infty, 2)$	$p_2: 5 \notin (-5, 5)$
$p_3: -0, (3) \in (-1, 1]$	$p_4: \sqrt{3} \in (-\infty, 2)$
$p_5: (2, 3) \subset [2, 3]$	$p_6: \mathbb{Z} \subset (-\infty, \infty)$

## 4.2. Corpuri geometrice

### A. BREVIAR TEORETIC

#### Piramida: reprezentare, elemente caracteristice

*Definiția 1.* Piramida este corpul geometric mărginit de o suprafață poligonală convexă plană cu  $n$  laturi,  $n \geq 3$  și de  $n$  suprafete triunghiulare cu vârful comun, având bazele pe căte o latură a bazei.

O piramidă este determinată de suprafața poligonală convexă, numită *bază* a piramidei și de punctul exterior planului bazei, numit *vârf* al piramidei.

*Convenții.* 1. Pentru simplificarea limbajului, vom spune că baza este un poligon convex, iar fețele laterale sunt triunghiuri.

2. Atunci când numim o piramidă, începem cu litera corespunzătoare vârfului, apoi literele care numesc baza. În funcție de numărul laturilor bazei, o piramidă poate fi *triunghiulară, patrulateră, pentagonală, hexagonală*, etc.

Piramida triunghiulară este mărginită de *patru suprafete* triunghiulare și se numește **TETRAEDRU**.

Într-un tetraedru, oricare dintre cele patru fețe, poate fi considerată *bază*.

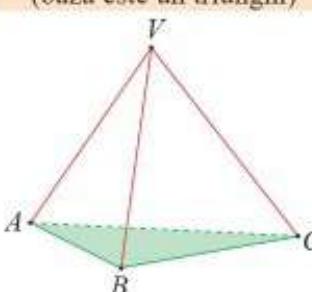
O clasă specială de piramide este cea a *piramidelor regulate*.

*Definiția 2.* O piramidă care are baza un poligon regulat, iar muchiile laterale sunt congruente, se numește *piramidă regulată*.

Fețele laterale ale oricărei piramide regulate sunt *triunghiuri isoscele congruente*.

*Definiția 3.* Un tetraedru care are toate cele patru fețe triunghiuri echilaterale se numește *tetraedru regulat*.

*Consecință:* Un tetraedru care are toate muchiile congruente este un tetraedru regulat.

Piramidă triunghiulară (baza este un triunghi)	Elemente	Numărul elementelor
	<i>Vârful piramidei:</i> $V$	Numărul fețelor $f = 1 + 3 = 4$
	<i>Baza:</i> suprafață triunghiulară $ABC$	Numărul total al muchiilor $m = 3 + 3 = 6$
	<i>Vârfurile bazei:</i> $A, B, C$	Numărul total al vârfurilor $v = 3 + 1 = 4$
	<i>Muchiile bazei:</i> segmentele $AB, BC, AC$	
	<i>Muchiile laterale:</i> $VA, VB, VC$	
	<i>Fețele laterale:</i> suprafețele triunghiulare $VAB, VBC, VCA$ .	<i>Observație.</i> $f + v = m + 2$

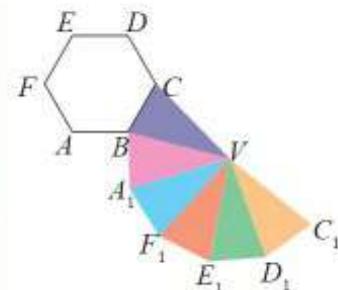
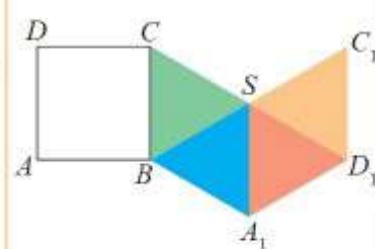
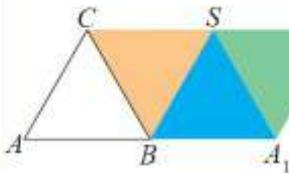
Piramidă patrulateră (baza este patrulater)	Elemente	Numărul elementelor						
	<p>Vârful piramidei: <math>V</math></p> <p>Baza: suprafața patrulateră <math>ABCD</math></p> <p>Vârfurile bazei: <math>A, B, C, D</math></p> <p>Muchiile bazei: segmentele <math>AB, BC, CD, DA</math></p> <p>Muchiile laterale: <math>VA, VB, VC, VD</math></p> <p>Fețele laterale: suprafețele triunghiulare <math>VAB, VBC, VCD, VDA</math>.</p>	<table border="1"> <tr> <td>Numărul fețelor</td><td><math>f = 1 + 4 = 5</math></td></tr> <tr> <td>Numărul total al muchiilor</td><td><math>m = 4 + 4 = 8</math></td></tr> <tr> <td>Numărul total al vârfurilor</td><td><math>v = 4 + 1 = 5</math></td></tr> </table>	Numărul fețelor	$f = 1 + 4 = 5$	Numărul total al muchiilor	$m = 4 + 4 = 8$	Numărul total al vârfurilor	$v = 4 + 1 = 5$
Numărul fețelor	$f = 1 + 4 = 5$							
Numărul total al muchiilor	$m = 4 + 4 = 8$							
Numărul total al vârfurilor	$v = 4 + 1 = 5$							
<i>Observație.</i> $f + v = m + 2$								
Piramidă hexagonală (baza este hexagon)	Elemente	Numărul elementelor						
	<p>Vârful piramidei: <math>V</math></p> <p>Baza: suprafața poligonală <math>A_1A_2A_3A_4A_5A_6</math></p> <p>Vârfurile bazei: <math>A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6</math></p> <p>Muchiile bazei: segmentele <math>A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1</math></p> <p>Muchiile laterale: <math>VA_1, VA_2, VA_3, VA_4, VA_5, VA_6</math></p> <p>Fețele laterale: suprafețele triunghiulare <math>VA_1A_2, VA_2A_3, VA_3A_4, VA_4A_5, VA_5A_6, VA_6A_1</math>.</p>	<table border="1"> <tr> <td>Numărul fețelor</td><td><math>f = 1 + 6 = 7</math></td></tr> <tr> <td>Numărul total al muchiilor</td><td><math>m = 6 + 5 = 12</math></td></tr> <tr> <td>Numărul total al vârfurilor</td><td><math>v = 6 + 1 = 7</math></td></tr> </table>	Numărul fețelor	$f = 1 + 6 = 7$	Numărul total al muchiilor	$m = 6 + 5 = 12$	Numărul total al vârfurilor	$v = 6 + 1 = 7$
Numărul fețelor	$f = 1 + 6 = 7$							
Numărul total al muchiilor	$m = 6 + 5 = 12$							
Numărul total al vârfurilor	$v = 6 + 1 = 7$							
<i>Observație.</i> $f + v = m + 2$								

### Desfășurarea piramidei

Desfășurarea unei *piramide regulate* constă în alăturarea unui *poligon regulat cu  $n$  laturi*, baza piramidei și a  $n$  *triunghiuri isoscele*, fețele laterale ale piramidei, având bazele congruente cu latura bazei.

	Piramida triunghiulară	Piramida patrulateră	Piramida hexagonală
Rabatire în jurul muchiilor bazei			

Rostogolire pe planul unei fețe și rabatarea bazei



### Prisma dreaptă: reprezentare, elemente caracteristice, desfășurare

*Definiția 2.* Prisma este un poliedru mărginit de două baze, suprafețe poligonale convexe congruente, cu  $n$  laturi,  $n \geq 3$ , situate în plane diferite, și de  $n$  fețe laterale, ale căror laturi determină paralelograme. Elementele unei prisme sunt: *bazele, muchiile bazelor, fețele laterale, muchiile laterale, vârfurile*, la care se adaugă *diagonalele*, atunci când numărul muchiilor laterale este mai mare sau egal cu patru. Un vârf al unei baze și un vârf al celeilalte baze, care nu aparțin aceleiași fețe laterale, determină o *diagonală a prismei*.

Prismele care au toate *fețele laterale suprafete dreptunghiulare* se numesc prisme drepte.

Prin urmare, vom întâlni prismă *triunghiulară dreaptă*, prisma *patrulateră dreaptă*, prisma *pentagonală dreaptă*, prisma *hexagonală dreaptă* etc.

Dintre prismele drepte, o clasă specială este aceea a prismelor regulate.

*Definiție.* O prisma dreaptă, a cărui bază este o suprafață poligonală delimitată de un *poligon regulat* se numește *prismă regulată*.

*Convenții.*

- Pentru simplificarea limbajului, vom spune că bazele sunt poligoane convexe congruente, iar fețele laterale sunt dreptunghiuri.
- Atunci când numim o prismă, scriem mai întâi literele corespunzătoare bazei situate în planul caietului, apoi literele care numesc cealaltă bază, respectând corespondența vârfurilor.

Între prismele patrulateră drepte, *paralelipipedul drept* are un rol important, evidențiind aici și cazurile particolare: *paralelipipedul dreptunghic* și *cubul*. O caracterizare succintă a acestora se regăsește în tabelul următor.

*Definiții echivalente*

<i>Paralelipipedul drept</i>	<i>Paralelipipedul dreptunghic</i>	<i>Cubul</i>
<ol style="list-style-type: none"> <li>Baza este paralelogram</li> <li>Fețele laterale sunt dreptunghiuri</li> </ol> <p>Prisma patrulateră dreaptă cu baza paralelogram</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Baza este dreptunghi</li> <li>Fețele laterale sunt dreptunghiuri</li> </ol> <p>a) Prisma patrulateră dreaptă cu baza dreptunghi b) Paralelipipedul drept, cu baza dreptunghi c) Prisma care are toate fețele dreptunghiuri</p>	Toate fețele sunt pătrate.
		<p>a) Prisma patrulateră regulată cu fețele laterale pătrate b) Prisma patrulateră regulată având muchia bazei congruentă cu muchia laterală c) Prisma cu toate fețele pătrate d) Paralelipipedul dreptunghic cu toate muchiile congruente</p>

**Definiția 2.** Prisma este un poliedru mărginit de două baze, suprafete poligonale convexe congruente, cu  $n$  laturi,  $n \geq 3$ , situate în plane diferite, și de  $n$  fețe laterale, ale căror laturi determină paralelograme.

Desfășurarea unei prisme drepte este o configurație geometrică plană obținută prin alăturarea dreptunghiurilor care reprezintă fețele laterale și a poligoanelor care reprezintă bazele.

Suprafața laterală a prismei poate fi reprezentată printr-un dreptunghi cu lungimea egală cu perimetrul bazei și lățimea egală cu înălțimea prismei.

Tipul prismei	Prisma triunghiulară regulată	Prisma patrulateră regulată	Cubul	Prisma hexagonală regulată
Reprezentarea bazei prismei				
Desfășurarea				

**Definiție.** Corpul geometric obținut prin rotația completă a unei suprafețe dreptunghiulare în jurul uneia dintre laturile sale se numește *cilindru circular drept*.

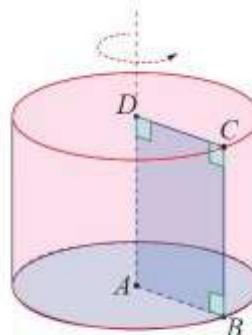
Elementele cilindrului circular drept sunt: două *baze*, discuri congruente, situate în plane diferite, *centrele bazelor*, *raza bazelor*, *generatoarea*. Discul de centru  $A$  și rază  $AB$ , respectiv discul de centru  $D$  și rază  $DC$  sunt *bazele* cilindrului.

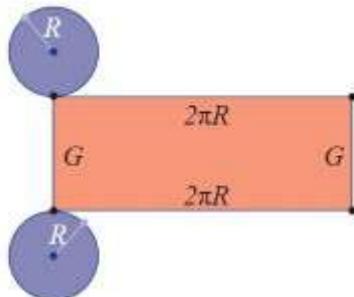
Segmentul  $CB$  și orice alt segment  $PQ$ , cu  $P \in C(A, AB)$  și  $Q \in C(D, DC)$  astfel încât  $PQ \parallel BC$ , sunt *generatoare* ale cilindrului.

Vom spune că cilindru circular drept este un *corp de rotație*.

*Axa de rotație* a unui cilindru circular drept este dreapta determinată de centrele bazelor.

Axa de rotație a cilindrului circular drept este *axă de simetrie* a acestuia.





*Desfăşurarea cilindrului* este formată dintr-o suprafaţă dreptunghiulară şi două discuri congruente cu baza cilindrului.

Lungimea bazei dreptunghiului este egală cu lungimea cercului de la baza cilindrului, iar înălţimea dreptunghiului este generatoarea cilindrului.

### Conul circular drept: reprezentare, elemente caracteristice, desfăşurare

**Definiţie.** Corpul geometric obţinut prin rotaţia completă a unei suprafeţe triunghiulare, mărginite de un triunghi dreptunghic în jurul uneia dintre catetele sale se numeşte *con circular drept*.

Conul circular drept este un *corp de rotaţie*.

*Axa de rotaţie* a conului circular drept este dreapta determinată de vârful conului şi centrul bazei.

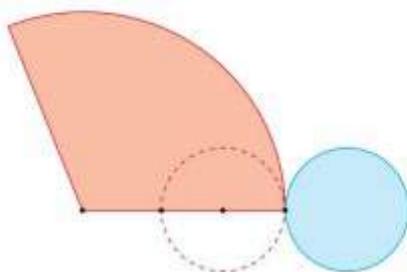
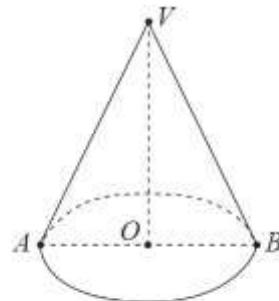
Punctul  $V$  este vârful conului.

Discul de centru  $O$  şi rază  $OA$  este baza conului.

Segmentele  $OA$  şi  $OB$  sunt raze ale bazei conului şi se notează, de regulă, cu  $R$ .

Segmentele  $VA$  şi  $VB$  sunt generatoare ale conului şi se notează, de regulă, cu  $G$ .

*Axa de rotaţie*  $VO$  este *axă de simetrie* pentru conul circular drept.



Desfăşurarea conului circular drept este formată dintr-un disc congruent cu baza conului şi un sector de cerc de rază  $G$  şi având lungimea egală cu lungimea cercului bază a conului.

## B. ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

**I. Stabiliti varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.**

- |  |   |
|--|---|
| <b>1</b> Numărul fețelor unui tetraedru este:<br>A) 3;      B) 4;      C) 5;      D) 6;  | <b>3</b> Numărul vârfurilor unei prisme patrulatere este:<br>A) 16;      B) 5;      C) 6;      D) 8.  |
| <b>2</b> Într-o piramidă regulată, toate muchiile laterale sunt:<br>A) de lungimi diferite;    B) paralele;<br>C) congruente;            D) coplanare. | <b>4</b> Desfăşurarea, în plan, a suprafeţei laterale a unui cilindru circular drept este o suprafaţă:<br>A) triunghiulară;      B) dreptunghiulară;<br>C) pentagonală;          D) hexagonală. |

### C. TEST DE EVALUARE/AUTOEVALUARE

#### Subiectul I

*Încercuiți răspunsul corect. Doar un răspuns este corect.*

- 1 Pe perpendiculara în vârful  $A$  pe planul hexagonului regulat  $ABCDEF$ , se consideră punctul  $P$  astfel încât  $AP = AB = 10$  cm. Atunci:

- 5 p. a) A)  $PB \perp BC$ ; B)  $PC \perp CD$ ;  
C)  $PD \perp DE$ ; D)  $PE \perp EF$ .
- 5 p. b) Distanța de la punctul  $P$  la dreapta  $CE$  este:  
A)  $5\sqrt{2}$  cm; B)  $5\sqrt{3}$  cm;  
C)  $5\sqrt{7}$  cm; D)  $5\sqrt{13}$  cm.
- 5 p. c) Tangenta unghiului  $\angle PDC$  este egală cu:  
A) 3; B) 2; C)  $\sqrt{2}$ ; D)  $\sqrt{5}$ .
- 5 p. d) Distanța de la punctul  $A$  la planul  $(BFP)$  este:  
A)  $5\sqrt{2}$  cm; B)  $3\sqrt{5}$  cm; C)  $2\sqrt{5}$  cm;  
D)  $5\sqrt{3}$  cm.

- 2  $ABCD$  este un dreptunghi cu dimensiunile  $AB = 4\sqrt{3}$  cm,  $BC = 12$  cm și  $EA \perp (ABC)$ ,  $EA = 8$  cm.

- 5 p. a) Măsura unghiului  $\angle EDC$  este:  
A)  $30^\circ$ ; B)  $45^\circ$ ;  
C)  $60^\circ$ ; D)  $90^\circ$ .
- 5 p. b) Calculând distanța de la punctul  $E$  la dreapta  $BC$  se obține:  
A)  $4\sqrt{7}$  cm; B)  $4\sqrt{3}$  cm;  
C)  $4\sqrt{5}$  cm; D) 4 cm.
- 5 p. c) Distanța de la punctul  $E$  la dreapta  $BD$  este:  
A) 8 cm; B) 9 cm; C) 10 cm;  
D) 12 cm.
- 5 p. d) Calculând distanța de la punctul  $A$  la planul  $(EBD)$  se obține:  
A) 4 cm; B) 3,6 cm; C) 5,6 cm;  
D) 4,8 cm.

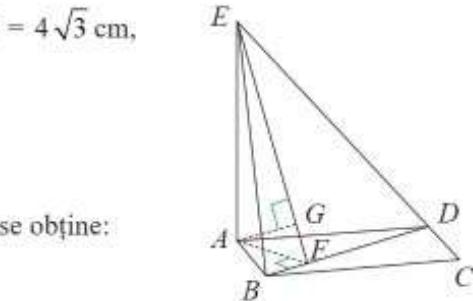
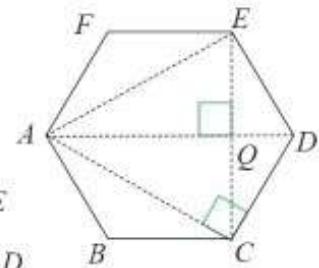
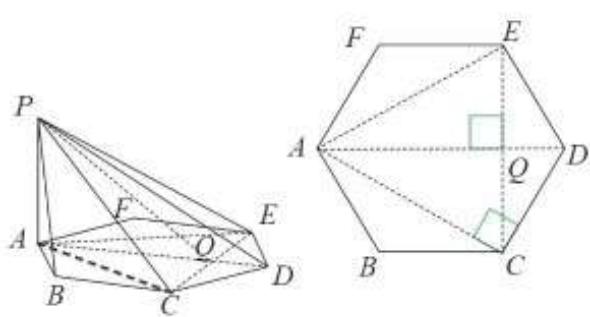
#### Subiectul al II-lea

*Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.*

Triunghiul dreptunghic isoscel  $ABC$ , are ipotenuza  $BC$  în planul  $\alpha$  și vârful  $A$  exterior acestui plan.

Se știe că  $pr_{\alpha} A = A'$ ,  $A' \notin BC$ ,  $\angle BA'C = 120^\circ$  și  $A'B = 12$  cm. Atunci:

- 5 p. 1 Lungimea înălțimii  $A'M$  a triunghiului  $A'BC$  este ... .
- 5 p. 2 Distanța de la punctul  $A$  la planul  $\alpha$  este ... .



**5 p.** | **3** Lungimea înălțimii din  $A$  a triunghiului  $ABC$  este ....

**5 p.** | **4** Distanța de la punctul  $A'$  la planul  $(ABC)$  este ....

### Subiectul al III-lea

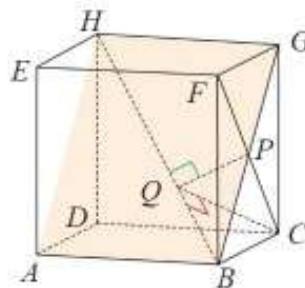
Scrieți rezolvările complete.

- 2** Fie cubul  $ABCDEFGH$  și  $BG \cap CF = \{P\}$ .

Demonstrați că:

**5 p.** a)  $CP \perp (ABG)$ .

**5 p.** b) dacă  $PQ \perp BH$ ,  $Q \in BH$ , atunci  $CQ \perp BH$



- 3** Pe planul patratului  $ABCD$  cu  $AB = 12$  cm, se construiesc drepte perpendiculare în  $A$  și  $B$ , pe care se iau, de aceeași parte a planului  $(ABC)$ , segmentele congruente  $AA'$  respectiv  $BB'$ , iar  $AC \cap BD = \{O\}$ .

**5 p.** a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

**5 p.** b) Demonstrați că  $A'O \perp BD$  și  $B'O \perp AC$ .

**5 p.** c) Demonstrați că  $AC \perp (BB'D)$ .

**5 p.** d) Calculați  $d(A', (ABC))$ , știind că triunghiul  $A'OB'$  este echilateral.

## Teste finale

### TEST FINAL 1

#### Subiectul I

Încercuiți răspunsul corect. Doar un răspuns este corect.

(30 de puncte)

- 5 p. 1 Scrisă ca interval, mulțimea  $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 \leq 5\}$  este:  
A.  $(0; 2)$       B.  $(-\infty; 6)$       C.  $(2; 6)$       D.  $(-\infty; 2)$ .
- 5 p. 2 Adunând numerele iraționale din mulțimea  $\{-1,2; -\sqrt{2}; \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}; 1-(\sqrt{2})^2\}$  se obține:  
A. 1;      B. 2;      C.  $\sqrt{2}$ ;      D.  $1+\sqrt{2}$ .
- 5 p. 3 Mulțimea  $[2; 5) \cap (\sqrt{3}, 2\sqrt{6})$  este:  
A.  $(\sqrt{3}; 5)$ ;      B.  $[2; 2\sqrt{6})$ ;      C.  $(2; 2\sqrt{6})$ ;      D.  $(\sqrt{3}; 5]$ .
- 5 p. 4 Un pătrat are perimetrul  $(4 \cdot x + 8)$  cm,  $x > 0$ . Aria pătratului, exprimată în  $\text{cm}^2$ , este:  
A.  $16 \cdot x + 32$ ;      B.  $x^2 + 64$ ;      C.  $x^2 + 4 \cdot x + 4$ ;      D.  $x^2 + 4$ .
- 5 p. 5 Descompusă în factori, expresia  $(x - 5)^2 - 2(x - 5)$  devine:  
A.  $(x - 4)(x - 2)$ ;      B.  $(x - 4)(x + 2)$ ;      C.  $(x - 4)(x - 6)$ ;      D.  $x(x - 4)$ .
- 5 p. 6 Tabelul frecvențelor seriei statistice „Nota la test” este redat mai jos.

Nota la test	4	5	6	7	8	9	10
Frecvență	2	3	4	4	8	5	2

Media setului de date numerice Nota la test este:

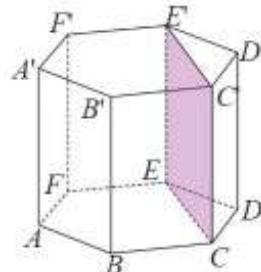
- A. 2;      B. 3;      C. 4;      D. 1.

#### Subiectul al II-lea

Încercuiți răspunsul corect. Doar un răspuns este corect.

(30 de puncte)

- 5 p. 1 ABCDEFA'B'C'D'E'F' este o prismă hexagonală regulată. O muchie a prismei, paralelă cu planul (CEE'), este:  
A. AF;      B. EF;  
C. A'B';      D. DD'.
- 5 p. 2 ABCDEFGH este un cub. Dacă suma lungimilor muchiilor cubului, care conțin punctul A, este 3,6 cm, atunci muchia cubului are lungimea:  
A. 1,8 cm;      B. 0,6 cm;      C. 1,2 cm;      D. 2,4 cm.

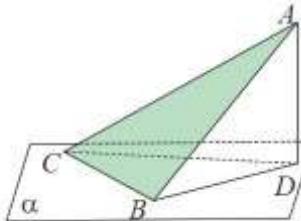


- 5 p.** **3** Prisma triunghiulară regulată  $ABC A'B'C'$  are toate muchiile de lungime 8 cm. Distanța de la punctul  $C$  la dreapta  $A'B'$  este:

A.  $4\sqrt{2}$  cm;      B.  $4\sqrt{7}$  cm;      C.  $4\sqrt{3}$  cm;      D.  $4\sqrt{5}$  cm.

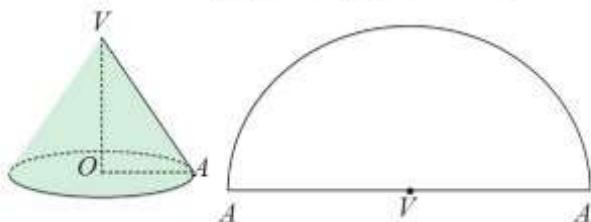
- 5 p.** **4** Proiecția triunghiului echilateral  $ABC$ ,  $AB = 6$  cm, pe un plan  $\alpha$ , este triunghiul  $DBC$ ,  $BD = 3\sqrt{3}$  cm. Unghiul format de dreapta  $AB$  cu planul  $\alpha$  are măsura:

A.  $30^\circ$ ;      B.  $45^\circ$ ;      C.  $60^\circ$ ;      D.  $75^\circ$ .



- 5 p.** **5** Desfășurarea suprafeței laterale a unui con este mărginită de un semicerc cu diametrul 20 cm. Înălțimea conului este:

A.  $3\sqrt{3}$  cm;      B.  $5\sqrt{3}$  cm;      C.  $4\sqrt{3}$  cm;      D.  $6\sqrt{3}$  cm.



- 5 p.** **6** O sferă cu volumul  $4,5\pi \text{ cm}^3$  are aria:

A.  $4\pi \text{ cm}^2$ ;      B.  $6\pi \text{ cm}^2$ ;      C.  $9\pi \text{ cm}^2$ ;      D.  $12\pi \text{ cm}^2$ .

### Subiectul al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 1** Fie numărul  $a = 1 + \sqrt{500} : (-5\sqrt{5}) : (-\sqrt{2}) - \sqrt{8}$ .

**2 p.** a) Arătați că  $a < 0$ .

b) Calculați numărul  $b = a^2 + \sqrt{(1 - 2\sqrt{2})^2}$ .

- 2** Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (a - 2)x + 2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

a) Determinați  $a \in \mathbb{R}$ , știind că  $A(-2; 4)$  aparține reprezentării geometrice a graficului funcției  $f$ .

b) Pentru  $a = 1$ , reprezentați grafic funcția  $f$  într-un sistem de axe perpendiculare.

**3**

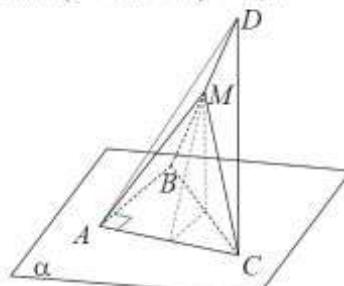
a) Arătați că  $x \cdot y - 5 \cdot x + 4 \cdot y - 20 = (x + 4) \cdot (y - 5)$ , oricare ar fi numerele reale  $x, y$ .

b) Determinați numerele naturale  $x$  și  $y$  pentru care are loc egalitatea  $x \cdot y - 5 \cdot x + 4 \cdot y = 13$ .

- 4** Pe perpendiculara în punctul  $C$  pe planul triunghiului  $ABC$ ,  $AB = AC = 8$  cm,  $\angle A = 90^\circ$ , se ia punctul  $D$  astfel încât  $CD = 8\sqrt{3}$  cm, iar  $M$  este mijlocul segmentului  $BD$ .

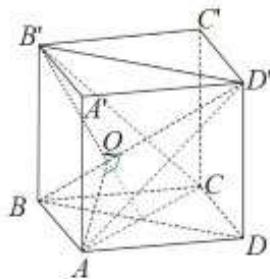
a) Calculați distanța de la punctul  $D$  la dreapta  $AB$ .

b) Determinați măsura unghiului format de planele  $(AMC)$  și  $(ABC)$ .



**5**  $ABCDA'B'CD'$  este un cub,  $Q = pr_{BD} A$ .

- 2 p.** a) Demonstrați că  $D'Q = 2 \cdot BQ$ .  
**3 p.** b) Pentru  $AQ = 2\sqrt{6}$  cm, calculați volumul cubului.



**6** Înălțimea unui con circular drept este 12 cm, iar volumul său este  $100\pi$  cm<sup>3</sup>.

- 3 p.** a) Aflați raza bazei conului.  
**2 p.** b) Calculați aria unei sfere care are volumul  $\frac{5}{3}$  din volumul conului.

## TEST FINAL 2

### Subiectul 1

*Încercuiți răspunsul corect. Doar un răspuns este corect.*

(30 de puncte)

- 5 p.** **1** Dacă  $a = 2 - 3\sqrt{2}$  și  $b = 4 + 6\sqrt{2}$ , atunci  $a \cdot b + 5^2$  este:  
 A. 0;      B. -1;      C. -2;      D. -3.
- 5 p.** **2** Descompunerea în factori a expresiei  $E(x) = (2x+3)^2 - (x+3)^2$  este:  
 A.  $(2x+3)(x+3)$ ;      B.  $x(x+3)$ ;      C.  $3x(x+2)$ ;      D.  $x(x+2)$ .
- 5 p.** **3** Mulțimea soluțiilor ecuației  $\frac{x-11}{2} + \frac{2x-22}{3} = 0$  este:  
 A.  $S = \{1\}$ ;      B.  $S = \{11\}$ ;      C.  $S = \{-1\}$ ;      D.  $S = \{-11\}$ .
- 5 p.** **4** Fie mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{R} | \frac{1}{2} < \frac{3}{x+1} < 1,3\}$ . Intersecția  $A \cap \mathbb{N}$  este mulțimea:  
 A.  $\{0, 1, 2, 3\}$ ;      B.  $\{1, 2, 3\}$ ;      C.  $\{2, 3, 4\}$ ;      D.  $\{1, 2, 3, 4\}$ .
- 5 p.** **5** După raționalizarea numitorului, fracția  $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$  devine:  
 A.  $2\sqrt{2} - 3$ ;      B.  $\sqrt{2} - 3$ ;      C.  $\sqrt{2} + 3$ ;      D.  $3 - \sqrt{2}$ .
- 5 p.** **6** Tabloul de valori al funcției  $f : A \rightarrow \{-5, -2, 1, 7\}$  este redat mai jos.

$x$	$a$	$b$	$c$	$d$
$f(x) = 3x - 2$	-5	-2	1	7

Domeniul de definiție al funcției este:

- A.  $\{-1, 0, 1, 2\}$ ;      B.  $\{-1, 0, 1, 3\}$ ;      C.  $\{-2, -1, 0, 3\}$ ;      D.  $\{-2, 0, 1, 3\}$ .

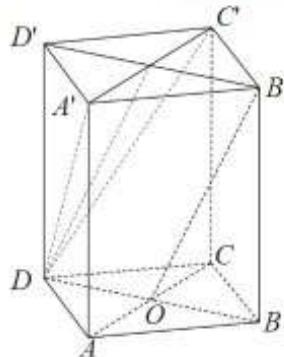
## Subiectul al II-lea

*Încercuiți răspunsul corect. Doar un răspuns este corect.*

(30 de puncte)

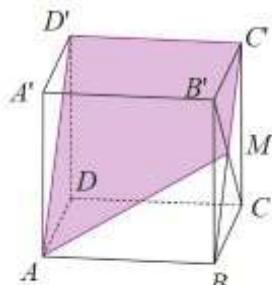
5 p.

- 1  $ABCD A'B'C'D'$  este o prismă patrulateră regulată,  $AB = 12$  cm,  $AA' = 12\sqrt{2}$  cm și  $O$  este centrul bazei  $ABCD$ . Dreapta  $OB'$  este paralelă cu planul:
- A.  $(ADD')$ ;      B.  $(BCC')$ ;  
C.  $(DA'C')$ ;      D.  $(CDD')$ .



5 p.

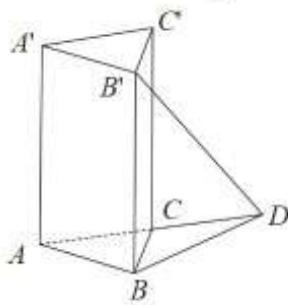
- 2 Cubul  $ABCD A'B'C'D'$  are muchia 4 cm, iar punctul  $M$  este intersecția dreptelor  $B'C$  și  $BC$ . Aria patrulaterului  $AD'CM$  este:
- A.  $8\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>;      B.  $16\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>;  
C.  $12\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>;      D.  $20\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>.



5 p.

- 3 Se prelungescă muchia  $AC$  a prismei triunghiulare regulate  $ABC A'B'C'$  cu segmentul  $CD = BC$ . Dacă  $AB = 6$  cm și  $AA' = 3\sqrt{13}$  cm, atunci lungimea segmentului  $B'D$  este:

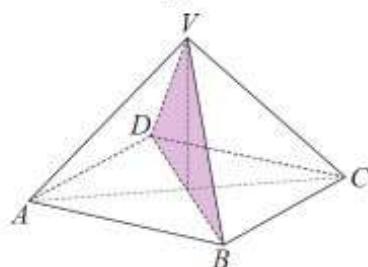
- A. 15 cm;      B.  $4\sqrt{10}$  cm;  
C. 16 cm;      D.  $4\sqrt{5}$  cm.



5 p.

- 4 Fie  $VABCD$  o piramidă cu baza  $ABCD$ , care are toate muchiile congruente, de lungime 10 cm. Măsura unghiului dintre dreapta  $VA$  și planul  $(VBD)$  este:

- A.  $30^\circ$ ;      B.  $45^\circ$ ;  
C.  $60^\circ$ ;      D.  $75^\circ$ .



5 p.

- 5 Un vas are forma unui cilindru circular drept. Diametrul bazei cilindrului este 20 cm, iar înălțimea acestuia este  $\frac{50}{\pi}$  cm.

Capacitatea vasului, exprimată în litri, este:

- A. 3 l;      B. 3,5 l;      C. 4 l;      D. 5 l.

5 p.

- 6 Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 10 cm respectiv 8 cm, iar apotema trunchiului este  $\sqrt{10}$  cm. Trunchiul de piramidă are volumul:

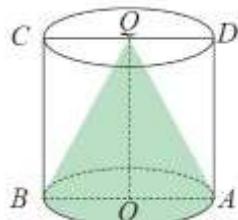
- A.  $240$  cm<sup>3</sup>;      B.  $242$  cm<sup>3</sup>;      C.  $244$  cm<sup>3</sup>;      D.  $248$  cm<sup>3</sup>.

### Subiectul al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 1** Numerele naturale  $a, b, c$  sunt direct proporționale cu numerele 3, 5, respectiv 7 și  $|a - b| = 4$ .
- 2 p.** a) Arătați că  $a = 6$ .
- 3 p.** b) Determinați cel mai mic număr natural  $n$  pentru care  $\frac{a \cdot b \cdot c}{n}$  este cubul unui număr natural.
- 2** Numerele 75, 184 și 257 se împart la același număr natural  $n$  și se obțin resturile 3, 4 respectiv 5.
- 2 p.** a) Stabiliți dacă  $n$  poate lua valoarea 6.
- 3 p.** b) Aflați toate valorile pe care le poate lua împărțitorul.
- 3** Se consideră expresia  $E(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x+1} \cdot \frac{2x-2}{4x+4}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .
- 2 p.** a) Demonstrați că  $E(x) = -\frac{1}{x}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .
- 3 p.** b) Determinați valorile întregi ale numărului  $m$  pentru care  $2 \cdot E(m)$  este număr întreg.
- 4**
- 2 p.** a) Arătați că oricare ar fi numerele reale  $a, b, c$  are loc egalitatea:  
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2a \cdot b + 2b \cdot c + 2c \cdot a.$$
- 3 p.** b) Suma lungimilor tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este 76 cm, iar diagonala paralelipipedului are lungimea 13 cm. Calculați aria totală a paralelipipedului.
- 5**  $VABCD$  este o piramidă patrulateră regulată cu baza  $ABCD$ ,  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  $AO = 6$  cm,  $VO = 8$  cm.
- 2 p.** a) Demonstrați că apotema piramidei are lungimea mai mare decât 9 cm.
- 3 p.** b) Calculați aria laterală a piramidei.
- 6** Fie un cilindru circular drept cu raza bazei  $R$  și generatoarea  $g$ . Se știe că  $2 \cdot R + g = 20$  cm și că aria laterală a cilindrului este  $100\pi$  cm<sup>2</sup>.
- 3 p.** a) Calculați  $R$  și  $g$ .
- 2 p.** b) Calculați volumul conului circular drept care are ca bază una din bazele cilindrului și vârful în centrul bazei opuse.



# Răspunsuri

## Teste inițiale

### Test 1

**I.** 1. (A); 2. (D); 3. (B); 4. (C); 5. (A); 6. (B); 7. (D); 8. (A).

**II.** 1. a) Din  $a + b = 39$  și  $2 \cdot a - 3 \cdot b = 18 \Rightarrow a = 27, b = 12$ ; b)  $m_s = 18$ . 2.  $a = 2 \in \mathbb{N}$ .

3.	x	-2	0	2
	y	5	1	-3

4. a)  $AB \parallel CF$  și  $AB = CF$ ; b) În  $\triangle ABE$ ,  $\angle ABE = 90^\circ$ ,  $\angle EAB = 30^\circ$ ,  $AB = 12$  cm.  $\tan \angle EAB = \frac{BE}{AB} \Rightarrow BE = 4\sqrt{3}$  cm,  $AE = 8\sqrt{3}$  și  $AF = 16\sqrt{3}$  cm.  $AD \parallel BE \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle EPB$ .  $PE = AE : 3 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$  cm.

### Test 2

**I.** 1. (B); 2. (D); 3. (C); 4. (A); 5. (B); 6. (C); 7. (A); 8. (D).

**II.** 1.  $a = -\sqrt{3} + 1$ ,  $b = -2\sqrt{3} + 1$ ,  $c = -1 \in \mathbb{Z}$ . 2. a) Cei 9 elevi care studiază limba spaniolă reprezintă 30% din numărul elevilor. Studiază limba franceză 12 elevi; b) În clasă sunt 30 elevi. 3. a) Fie  $BE \perp CD$ ,  $E \in CD$ . Rezultă  $DE = 15$  cm,  $EC = 10$  cm și din  $\triangle BCE$ ,  $BE = AD = 10$  cm; b)  $\mathcal{A}_{ABCD} = 200$  cm<sup>2</sup>; c) Fie  $BF \perp AC$ ,  $F \in AC$

și  $CG \perp AB$ ,  $G \in AB$ . Din  $AC \cdot BF = AB \cdot CG \Rightarrow CG = d(B, AC) = BF = \frac{30}{\sqrt{29}}$  cm.

### 1.1. Multimi

**I.** 1. B); 2. B); 3. C); 4. A); 5. D); 6. B); 7. D); 8. B); 9. D); 10. D). 11.  $p_1$ : F;  $p_2$ : F;  $p_3$ : A;  $p_4$ : A;  $p_5$ : A;  $p_6$ : F.

**II.** 1.  $\in$ ; 2.  $\subset$ ; 3. egale 4.  $\subset$ ; 5. submulțime; 6. 255; 7. 1.

**III.** 1. 1.  $\rightarrow$  b); 2.  $\rightarrow$  d); 3.  $\rightarrow$  f); 4.  $\rightarrow$  c); 2. 1.  $\rightarrow$  c); 2.  $\rightarrow$  a); 3.  $\rightarrow$  d); 4.  $\rightarrow$  b).

**IV.** 1. a)  $A \cup B = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$ ; b)  $A \cap B = \{2\}$ ; c)  $A \setminus B = \{-1, 3\}$ ; d)  $B \setminus A = \{-2, 0\}$ ;

e)  $A \times B = \{(-1, -2), (-1, 0), (-1, 2), (2, -2), (2, 0), (2, 2), (3, -2), (3, 0), (3, 2)\}$ ;

f)  $B \times A = \{(-2, -1), (-2, 2), (-2, 3), (0, -1), (0, 2), (0, 3), (2, -1), (2, 2), (2, 3)\}$ .

2.  $A = \{2, 3, 5, 11, 17\}$ ;  $B = \{2, 5\}$ ;  $C = \{1, 3, 5, 9, 11, 17\}$ ;  $D = \{1, 6\}$ .

3. a) {5, 15, 25, 35, 45, 55}; b) {36, 49, 64, 81}; c) {27, 64, 125}; d) {34, 61, 88}.

4.  $p_1$ : A;  $p_2$ : A;  $p_3$ : F;  $p_4$ : F;  $p_5$ : A;  $p_6$ : A. 5. a)  $x = 1$  sau  $x = 3$ ; b)  $x = 2$  sau  $x = 4$ ; c)  $x = 1$  sau  $x = 5$ .

6.  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ;  $B = \{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$ ;  $(2x-1) \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ ;  $\frac{18}{2x-1} \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow (2x-1) \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ . Cum  $2x-1$  este număr impar  $\Rightarrow$  avem posibilele situații:  $2x-1 = 1 \Rightarrow x = 1$ ;

$2x-1 = 3 \Rightarrow x = 2$ ;  $2x-1 = 9 \Rightarrow x = 5$ . De aici:  $C = \{1, 2, 5\}$ .

$\frac{18}{2x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (2x-1) \in \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ .

Cum  $2x-1$  este număr impar  $\Rightarrow 2x-1 = -9 \Rightarrow x = -4 \notin \mathbb{N}$ ;  $2x-1 = -3 \Rightarrow x = -1 \notin \mathbb{N}$ ;

$2x-1 = -1 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{N}$ ;  $2x-1 = 1 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{N}$ ;  $2x-1 = 3 \Rightarrow x = 2 \in \mathbb{N}$ ;  $2x-1 = 9 \Rightarrow x = 5 \in \mathbb{N}$ ,

$D = \{0, 1, 2, 5\}$  și  $E = \{-4, -1, 0, 1, 2, 5\}$ , iar  $F = C$ .

7.  $A = \left\{ \frac{\sqrt{9}}{3}; \frac{15}{3}; 0 \right\}$ ;  $B = \left\{ -2; \frac{\sqrt{9}}{3}; \frac{15}{3}; 0 \right\}$ ;  $C = \left\{ -2; 1; (3); \frac{\sqrt{9}}{3}; \sqrt{\frac{1}{4}}; \frac{15}{3}; \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{45}}; 0 \right\}$ ;  $D = \left\{ \sqrt{5}; \frac{\pi}{3} \right\}$ .

8.  $p_1$ : A;  $p_2$ : A;  $p_3$ : F;  $p_4$ : F;  $p_5$ : A;  $p_6$ : A. 9. a)  $X = \{-2; 3; 8; 13\}$ ;  $Y = \{1; 3; 9; 27\}$ ;  $Z = \{0; 1; 8; 27\}$ .

b)  $A \cup X = \{-2; 0; 1; 2; 3; 8; 13\}$ ;  $Y \cap Z = \{1; 27\}$ ;  $X \setminus Z = \{-2; 3; 13\}$ ;  $Z \setminus X = \{0; 1; 27\}$

10. a) exemplu de elemente din  $A$ : 5, 8, 11; exemplu de elemente din  $B$ : 3, 5, 7;

b)  $23 = 3 \cdot 6 + 5 \Rightarrow 23 \in A$  (1);  $23 = 2 \cdot 10 + 3 \Rightarrow 23 \in B$  (2). Din (1) și (2)  $\Rightarrow 23 \in A \cap B$ .

11. a)  $M$  finită; b)  $N$  infinită; c)  $P$  finită; d)  $Q$  infinită; e)  $R$  infinită; f)  $S$  infinită.

12. a)  $n \in \mathbb{N}$  și  $n \leq 5 \Rightarrow A = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}\right\}$  și  $B = \left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}\right\}$ . b)  $\text{card } A = 6$ ;  $\text{card } B = 5$ ;

c)  $A \cap B = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ . 13. a)  $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $\text{card } A = 7$ ; b)  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $\text{card } B = 7$ ;

c)  $C = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\text{card } C = 4$ ; d)  $D = \{1, 2, 3\}$ ,  $\text{card } D = 3$ . 14. a)  $D_9 \cup D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$ ;

b)  $D_9 \cap D_{12} = \{1, 3\}$ ; c)  $D_9 \setminus D_{12} = \{9\}$ ; d)  $D_{12} \setminus D_9 = \{2, 4, 6, 12\}$ . 15. a)  $M_9 \sqcap M_3 = M_9$  b)  $M_9 \cap M_{12} = M_{36}$

16. a)  $A_1 = \emptyset$ ;  $A_2 = \{3\}$ ;  $A_3 = \{4\}$ ;  $A_4 = \{5\}$ ;  $A_5 = \{3, 4\}$ ;  $A_6 = \{3, 5\}$ ;  $A_7 = \{4, 5\}$ ;  $A_8 = \{3, 4, 5\}$ .

b)  $B = \{2; 3\}$ . Avem:  $A \cup B = \{2; 3; 4; 5\}$ ;  $A \cap B = \{3\}$ ;  $A \setminus B = \{4; 5\}$ ;  $B \setminus A = \{2\}$ ;

$A \times B = \{(3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3)\}$ ;  $B \times A = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ .

17. a)  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ; b)  $B = \{0, 3, 6, 9\}$ ; c)  $C = \{0, 5\}$ ; d)  $D = \{0, 9\}$ ;

e)  $\overline{472x} : 2 \Leftrightarrow (x \in \{0, 2, 4, 6, 8\}) \quad \Rightarrow E = \{2, 8\}$ ;  
 $\overline{472x} : 3 \Leftrightarrow (4+7+2+x) : 3 \Leftrightarrow (13+x) : 3 \Leftrightarrow x \in \{2, 5, 8\}$

f)  $\overline{568x} : 4 \Leftrightarrow \overline{8x} : 4 \Leftrightarrow F = \{0, 4, 8\}$ . 18.  $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $\text{card } A = 6$ ;  $B = \{2; 3; 4\}$ ,  $\text{card } B = 3$ .

19. a)  $\frac{x+7}{x+1} = \frac{x+1+6}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{6}{x+1} = 1 + \frac{6}{x+1}; \left(1 + \frac{6}{x+1}\right) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{6}{x+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x+1) \in D_6 \Leftrightarrow$

$x \in \{0; 1; 2; 5\} \Leftrightarrow A = \{0; 1; 2; 5\}; \frac{x+6}{x} = 1 + \frac{6}{x}; \left(1 + \frac{6}{x}\right) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{6}{x} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow B = \{1; 2; 3; 6\}$

$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}; \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow C = \{2\}$

b)  $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 5; 6\}$ ;  $B \setminus A = \{3, 6\}$ ;  $A \times C = \{(0; 2), (1; 2), (2; 2), (5; 2)\}$ ;  $C \times B = \{(2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 6)\}$ ;  
 $A \cap B \cap C = \{2\}$ .

20. a)  $A = \{m, a, b\}$ ,  $B = \{n, a, b\}$ ,  $m \neq n$ ; b)  $A = \{m, a, b\}$ ,  $B = \{n, a, b\}$ ,  $C = \{p, a, b\}$ ,  $m \neq n \neq p \neq m$ .

21.  $A = \{\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\}$ ;  $B = \{-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\}$ . 22. a)  $A \cap \mathbb{N}^* = \{2; 3\}$ ,  $A \cap \mathbb{Z} = \{-\sqrt{4}; 0; -1; 2; 3\}$ ,

$A \setminus \mathbb{Z}^* = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ;  $A \setminus \mathbb{N} = \left\{-\sqrt{4}; -1; \frac{1}{2}\right\}$ . b)  $B = \{-\sqrt{4}; 0; -1; \frac{1}{2}\}$ ,  $\mathbb{Z} \cap B = \{-\sqrt{4}; 0; -1\}$ ; c)  $C = \{-1; 1\}$ ,

$A \setminus C = \{-\sqrt{4}; 0; \frac{1}{2}; 2; 3\}$ .

23. a)  $\frac{5}{2x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x+1) | 2 \Rightarrow (2x+1) \in \{-5; -1; 1; 5\} \Leftrightarrow M = \{-3; -1; 0; 2\}$ .

$|2x+3| = 1 \Leftrightarrow (2x+3 = 1 \text{ sau } 2x+3 = -1)$  P =  $\{-1; -2\} \Rightarrow M \cap P = \{-1\}$

b)  $-2$ ; c)  $M \times P = \{(-3; -1), (-3; -2), (-1; -1), (-1; -2), (0; -1), (0; -2), (2; -1), (2; -2)\}$

24.  $A = \{2, 4, 6\}$ ;  $B = \{1, 3, 5\}$ .

### C. Test de evaluare/autoevaluare

**Subiectul I.** 1. D)  $\{2, 3, 4, 5\}$ . 2. B) 26. 3. C) 8. 4. B) 1. 5. C)  $\{-2, 1, 3, 7\}$ . 6. B)  $\{a, b\}$ . 7. C) 5. 8. D) 3.

**Subiectul al II-lea.** 1.  $x \in \{-2, 1, 3\}$ . 2. 0, 1, 2, 3, 4. 3.  $\{-4, -2\}$ . 4. 38.

**Subiectul al III-lea.** 1. a)  $A = \{0, 2, 6, 12\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ;  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 12\}$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \setminus B = A$ ,  $B \setminus A = B$ . b) Cum  $A$  conține doar numere pare, iar  $B$  conține doar numere impare, rezultă ca  $A$  și  $B$  sunt disjuncte.

2. a)  $C = \{0, 2\}$  și  $D = \{0, 1, 2\}$ ; b)  $C \times D = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$ . 3. a)  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 4k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}\}$ ; b)  $E \cap F = \{1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2\}$  și  $1 + 9 + 25 + 49 + 81 = 165$ .

## 1.2. Intervale de numere reale

- I.** 1. C); 2. D); 3. A); 4. D); 5. B); 6. D); 7. A)  $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 0, (3)| < 0, (3)\}$ ; 8. b)  $\left(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; 9. c) 8.
- II.** 1. d)  $a = 4; b = 6$ ; 11.  $p_1: F; p_2: A; p_3: A; p_4: A; p_5: A; p_6: A$ .  
**III.** 1. [5,  $\infty$ ); 2. a)  $A \cup B = (-\infty, 5]$ ; b)  $A \cap B = (-2, 1]$ ; c)  $A \setminus B = (-\infty, -2]$ ; d)  $B \setminus A = (1, 5)$ .
3. a)  $(1, 2)$ ; b)  $(1, 2)$ ; c)  $[0, 2)$ ; d)  $[0, 1)$ . 4. a)  $A = [0, \infty)$ ; b)  $B = (-\infty, 0]$ ; c)  $C = [-3, 3]$ ; d)  $D = [1, 2)$ .
5. a) 4; b)  $-3$ ; c)  $0,5$ ; d)  $-\sqrt{2}$ . 6. a) 3; b) 6. 7. a)  $A = [1; 2]$ ; b)  $B = \left[-3, -\frac{1}{3}\right]$ ; c)  $C = [-4; 8]$ ; d)  $D = (-\infty, -3] \cup [0, \infty)$ .
- III.** 1. 1.  $\rightarrow f$ ; 2.  $\rightarrow d$ ; 3.  $\rightarrow b$ ; 4.  $\rightarrow a$ . 2. 1.  $\rightarrow b$ ; 2.  $\rightarrow c$ ; 3.  $\rightarrow d$ ; 4.  $\rightarrow a$ .
- IV.** 2. a) F; b) F; c) A; d) A; e) A; f) F. 3. Sunt intervale:  $A, B, D, E$ . Sunt reununi de intervale disjuncte:  $C, F$ . Nu sunt intervale:  $G, H, I$ . 4.  $p_1: F; p_2: F; p_3: F; p_4: A; p_5: F; p_6: F; p_7: F; p_8: A; p_9: A$  ( $a = b \in \mathbb{Z}$ ).  $p_{10}: F; p_{11}: A$ .
5. a)  $A = (-3, 2]$ ;  $B = (-1, 4)$ ; b)  $A \cup B = (-3, 4)$ ;  $A \cap B = (-1, 2]$ ;  $A \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ;  $B \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$ .
6.  $-1$ . 7. a)  $a = 2, b = 4$ ; b)  $a = 2,9, b = 3,1$ ; c)  $a = b = 3$ ; d)  $a = -2, b = 1$ ; e)  $a = -1, b = 0$ .
8. a)  $I \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ ; b)  $I \setminus \mathbb{Z} = (-3, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) = [-3, 2] \setminus \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ ;  
 c)  $I \cap \mathbb{N} = \{0, 1\}$ ; d)  $I \setminus \mathbb{N} = [-3, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$ . 9. a)  $A \cup B = \mathbb{R}$ ; b)  $A \cap B = [-2; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2]$ ;  
 c)  $A \setminus B = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ ; d)  $B \setminus A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .
10. a)  $A = (-2; 2)$ ,  $B = (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$ ;  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \setminus B = A$ ;  $A \cup B = (-\infty; -3) \cup (-2; 2) \cup (5; +\infty)$ ;  
 $B \setminus A = B$ ,  $A \cap \mathbb{N} = \{0, 1\}$ ;  $A \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\}$ ;  $B \cap \mathbb{N} = \{6, 7, 8, \dots\}$ ;  $B \cap \mathbb{Z} = \{\dots, -6, -5, -4, 6, 7, 8, \dots\}$ .  
 b)  $A = (-2; 4]$ ,  $B = [-1; 3)$ ;  $A \cup B = A$ ;  $A \cap B = B$ ;  $A \setminus B = (-2, -1) \cup [3, 4]$ ;  $B \setminus A = \emptyset$ ;  $A \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ;  
 $A \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ;  $B \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2\}$ ;  $B \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2\}$ .  
 c)  $A = \left(-\frac{16}{3}, 2\right)$ ,  $B = [-2, -1]$ ,  $A \cup B = A$ ,  $A \cap B = B$ ,  $A \setminus B = \left(-\frac{16}{3}, -2\right) \cup (-1, -2)$ ,  $B \setminus A = \emptyset$ ,  
 $A \cap \mathbb{N} = \{0, 1\}$ ,  $A \cap \mathbb{Z} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ ,  $B \cap \mathbb{N} = \emptyset$ ,  $B \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1\}$ ; d)  $A = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ ,  $B = \emptyset$ ;  $A \cup B = A$ ;  
 $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \setminus B = A$ ,  $B \setminus A = B$ ,  $A \cap \mathbb{N} = \{0\}$ ,  $A \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ ,  $B \cap \mathbb{N} = \emptyset$ ,  $B \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ .  
 e)  $A = \emptyset$ ,  $B = [-3, 4)$ ,  $A \cup B = B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \setminus B = A$ ,  $B \setminus A = B$ ,  $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$ ,  $A \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ ,  
 $B \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . f)  $A = [-3, 3]$ ,  $B = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ,  $A \cup B = \mathbb{R}$ ,  
 $A \cap B = (-3, -1) \cup (1, 3)$ ,  $A \setminus B = [-1, 1]$ ,  $B \setminus A = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ ,  $A \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $A \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  
 $B \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ,  $B \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$ ; g)  $A = [-2, 3], B = \emptyset$ ,  $A \cup B = A$ ,  $A \cap B = B$ ,  $A \setminus B = A$ ,  $B \setminus A = B$ ,  
 $A \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $A \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $B \cap \mathbb{N} = \emptyset$ ,  $B \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ .
11.  $A \cup B = [-3, 5)$ ,  $A \cap B = (-1, 4)$ ,  $A \setminus B = [-3, -1]$ ,  $B \setminus A = [4, 5)$ ,  $A \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
12.  $A \cup B = [-4, 4)$ ,  $A \cap B = (-2, 3)$ ,  $A \setminus B = [-4, -2]$ ,  $B \setminus A = [3, 4)$ ,  $A \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2\}$ ,  $B \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ .
13. a)  $-1$ ; b)  $-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}$ ; c)  $-2; -1$ . 14. b) segment. 15. a) 4; b) 3. c) nu.
16. a)  $\emptyset$ ; b)  $\{2\}$ ; c)  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ; d)  $\emptyset$ ; e)  $\emptyset$ ; f)  $(-\sqrt{5}; \sqrt{3})$ . 17. a)  $A = (-2, 3]$ ,  $B = (-4, 1]$ .  
 b)  $A \cup B = (-4, 3]$ ,  $A \cap B = (-2, 1]$ ,  $A \setminus B = (1, 3]$ ,  $A \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ .
18. a) Dacă  $a \leq b \Rightarrow a + a \leq a + b \Rightarrow 2a \leq a + b \Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2}$  (1). Analog  $\frac{a+b}{2} \leq b$  (2). Din (1) și (2) rezultă  
 $\Rightarrow \frac{a+b}{2} \in [a, b]$ . b) Din  $0 < a < b$ , atunci  $0 < a \cdot a < a \cdot b \Rightarrow a^2 < ab$  (1); Din  $0 < a \cdot b < b \cdot b \Rightarrow a \cdot b < b^2$  (2)  
 Din (1), (2)  $\Rightarrow a \cdot b < (a^2, b^2)$ . 19. a)  $M = [-5\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$ , b)  $-5\sqrt{3} = -\sqrt{75} < -\sqrt{72} = -6\sqrt{2} \Rightarrow -5\sqrt{3} \in M$ .
20. a) F; b) F; c) A. 21. a)  $-4$ ; b)  $-9$ ; c)  $0$ ; d)  $0$ . 22.  $M = \{-2, -1, 1\}$ . Submulțimi:  $\emptyset, \{-2\}, \{-1\}, \{1\}, \{-2, -1\}, \{-2, 1\}, \{-1, 1\}, \{-2, -1, 1\}$ . 23. a)  $2\sqrt{5} = \sqrt{20} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3} < \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ ;  
 b)  $3\sqrt{3} = \sqrt{27} < \sqrt{28} = 2\sqrt{7} < \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ; c)  $4\sqrt{2} = \sqrt{32} < \sqrt{50} = 5\sqrt{2} < \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ ;

- d)  $6\sqrt{2} = \sqrt{72} < \sqrt{75} = 5\sqrt{3} < \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ . **24.** a)  $B = \{\sqrt{16}\}$   $C = \{\sqrt{16}, -\sqrt{9}\}$ ,  
 $D = \left\{\sqrt{16}, -\frac{3}{4}, 2, (3), -0, 1(2), -\sqrt{9}, \sqrt{6\frac{1}{4}}\right\}$ ,  $E = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ ; b)  $[\sqrt{16}, \sqrt{16}] = [4, 4] = \{4\}$ ;  $[-\sqrt{9}, \sqrt{16}] = [-3, 4]$ ;  $[-\sqrt{9}, \sqrt{16}] = [-3, 4]$ ;  $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ . **25.** a)  $B = \{2\}$ ;  $C = \{2; -1; -\sqrt{4}\}$   $D = \left\{2; -1; \frac{3}{2}; -\frac{2}{7}; 3, (2); -0, 1(2); -\sqrt{4}; \sqrt{2\frac{1}{4}}\right\}$ ;  $E = \{\sqrt{3}; -\sqrt{7}\}$ ; b)  $[-\sqrt{7}; 3, (2)]$ . **26.** a)  $(4^9, 16^5) = (2^{18}, 2^{20}) \Rightarrow 2^{19} \in (4^9, 16^5)$ ; b)  $(9^{13}, 81^7) = (3^{26}, 3^{28}) \Rightarrow 3^{27} \in (9^{13}, 81^7)$ ; c)  $625^4 = 5^{16}$ ;  $(125^5, 5^{17}) = (5^{15}, 5^{17}) \Rightarrow 625^4 \in (125^5, 5^{17})$ ; d)  $8^{11} = 2^{33}$ ;  $(16^8, 4^{17}) = (2^{32}, 2^{34}) \Rightarrow 8^{11} \in (16^8, 4^{17})$ . **27.** a)  $2^{13} \cdot 5^{10} = 2^3 \cdot 2^{10} \cdot 5^{10} = 2^3 \cdot 10^{10} = 8 \cdot 10^{10}$ . Cum  $8 \cdot 10^{10} \in (10^{10}, 10^{11})$ , rezultă  $n = 10$ . b)  $2^{15} \cdot 5^{16} = 10^{15} \cdot 5$ . Cum  $10^{15} \cdot 5 \in (10^{15}, 10^{16})$ , rezultă  $n = 15$ . **28.** a)  $\sqrt{(x+5)^2} + \sqrt{(x-3)^2} = |x+5| + |x-3|$ . Pentru  $x \in [-5, 3]$ ,  $\sqrt{(x+5)^2} + \sqrt{(x-3)^2} = x+5-x+3=8$ . b)  $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-5)^2} = |x+3| + |x-5|$ . Pentru  $x \in [-3, 5]$ ,  $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-5)^2} = x+3-x+5=8$ . **29.**  $2\frac{3}{11} \cdot \left(\frac{6}{1 \cdot 4} + \frac{6}{4 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{6}{97 \cdot 100}\right) = \frac{25}{11} \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{97 \cdot 100}\right) = \frac{25}{11} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100}\right) = \frac{25}{11} \cdot 2 \cdot \frac{99}{100} = \frac{9}{2} = 4,5 \in (4; 5)$ . **30.** a) 12; b) -20; c) -6; d) -10.

### C. Test de evaluare/autoevaluare

**Subiectul I.** 1. B) -2. 2. C)  $[0, 2]$ . 3. B)  $[-1, 2]$ . 4. D) 7. 5. A)  $\{(-2; 1), (-1; 1), (1; 1)\}$ .

6. C)  $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ . 7. B)  $\{1, 2\}$ . 8. B)  $(-\infty, 0)$ .

**Subiectul al II-lea.** 1. 2. 2.  $[-1, \infty)$ . 3. R. 4. A)  $(-\infty, -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$ .

**Subiectul al III-lea.**

1. a)  $A = [-2; 4]$  și  $B = (-3, 5]$ ; b)  $A \cup B = B$ ;  $A \cap B = A$ ;  $A \setminus B = \emptyset$ ;  $B \setminus A = (-3, -2) \cup (4, 5)$ .

2. a)  $\left|\frac{2x-1}{3}\right| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{2x-1}{3} \leq 2 \Leftrightarrow -6 \leq 2x-1 \leq 6 \Leftrightarrow -5 \leq 2x \leq 7 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2} \Rightarrow M = \left[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ .

b)  $M \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $M \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $M \setminus \mathbb{N} = \left[-\frac{5}{2}; 0\right) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2, 3) \cup \left(3; \frac{7}{2}\right)$ .

3. a) -2 respectiv 4; b) 3 respectiv -3.

### 1.3. Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ( $<$ , $>$ , $\geq$ ), unde $a, b \in \mathbb{R}$

**I.** 1. D); 2. C); 3. C); 4. D); 5. A); 6. A); 7. C); 8. A); 9. B); 10. B); 11. A).

**II.** 1.  $(-\infty, 2)$ ; 2.  $(2, +\infty)$ ; 3.  $(-\infty, 1)$ ; 4. a)  $(-3, 3)$ ; b)  $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$ ; c)  $\{0; 1; 2\}$ ; 5.  $\sqrt{6}; 2\sqrt{3}$ ;

6.  $M = [12, \infty)$ ; 7.  $S = \{0; 1; 2\}$ ; 8.  $(-\infty; \sqrt{2}]$ ; 9.  $\{-1; -2\}$ ; 10.  $S = \{0; 1; 2\}$ ; 11. Card  $(A \cap B) = 2$ .

**III.** 1. 1.  $\rightarrow$  g); 2.  $\rightarrow$  c); 3.  $\rightarrow$  d); 4.  $\rightarrow$  f); 5.  $\rightarrow$  b). 2. 1.  $\rightarrow$  d); 2.  $\rightarrow$  f); 3.  $\rightarrow$  a); 4.  $\rightarrow$  e); 5.  $\rightarrow$  c).

**IV.** 1. a) da; b) nu; c) nu; d) nu. 2. a)  $S = [0, +\infty)$ ; b)  $S = \left[\frac{5}{6}; \infty\right)$ ; c)  $S = (-\infty, 2)$ ; d)  $S = \left(-\infty, -\frac{4}{11}\right)$ .

3. a)  $S = \{0; 1; 2; 3\}$ ; b)  $S = \{6; 7; 8; 9; \dots, n, n+1, \dots\}$ ; c)  $S = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ ; d)  $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ;

e)  $S = \mathbb{N}$ ; f)  $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ ; 4. a)  $S = \{-2; -1; 0; 1; 2; \dots, n, n+1, \dots\}$ ;

b)  $S = \{\dots, -(n+1), -n, \dots, -2, -1, 0\} = \mathbb{Z}$ ; c) și d)  $S = \{-1; 0; 1; \dots, n, n+1, \dots\}$ . 5. a)  $S = [-19, +\infty)$ ;

b)  $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ ; c)  $S = (-\infty, -1)$ ; d)  $S = [3\sqrt{3}, \infty)$ . 6. a)  $S = [-4; 10]$ ; b)  $S = (-\infty, -4) \cup (10; \infty)$ ; c)  $S = \{-1\}$ ;

d)  $S = [-4; 2]$ . 7. a)  $S = (-\infty, 3)$ ; b)  $S = (-\infty, 2]$ ; c)  $S = (3, \infty)$ ; d)  $S = (-\infty; -2\sqrt{2})$ . 8.  $A = [-3, 5] \cap \mathbb{Z} = \{-3; -2; \dots, 5\}$ ;