I Algebră

1. Numere naturale

Breviar de teorie

Mulțimi. Operații cu mulțimi.

- Prin *mulțime* înțelegem un grup format din obiecte distincte. Mulțimile se notează cu litere mari A, B, C, iar mulțimea care nu are niciun element se numește *mulțimea vidă* și se notează $\varnothing$.
- Dacă un element x se găsește printre elementele mulțimii A, spunem că x *aparține* mulțimii A (scriem $x \in A$). În caz contrar, spunem că x *nu aparține* mulțimii A (scriem $x \notin A$).
- Operații cu mulțimi

  $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$, numită *reuniunea* mulțimilor A și B;

  $A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$, numită *intersecția* mulțimilor A și B;

  $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$, numită *diferența* mulțimilor A și B;

  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, numită *diferența simetrică* a mulțimilor A și B;

  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ și $y \in B\}$, numită *produsul cartezian* al mulțimilor A și B.

Puterea unui număr natural

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$, unde a reprezintă *baza* puterii, iar n reprezintă *exponentul* puterii, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- $a^0 = 1$, pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$, iar a^2 și a^3 se numesc *pătratul*, respectiv *cubul* numărului natural a.
- Formule de calcul cu puteri:

  1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; 2) $a^n : a^m = a^{n-m}$;

  3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$; 4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, unde $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Teorema împărțirii cu rest

Oricare ar fi numerele naturale a și b, $b \neq 0$, există numerele naturale unice c și r, numite *câtul* și *restul* împărțirii, astfel încât $a = b \cdot c + r$, $0 \leq r < b$.

Divizibilitatea numerelor naturale

- Spunem că numărul $a \in \mathbb{N}$ *se divide* cu numărul $b \in \mathbb{N}^*$ dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$.
  Notăm $a \vdots b$ (a este divizibil cu b) sau $b \mid a$ (b îl divide pe a).
- Criterii de divizibilitate:
  - un număr natural este divizibil cu 2 dacă ultima sa cifră este cifră pară;
  - un număr natural este divizibil cu 5 dacă ultima sa cifră este 0 sau 5;
  - un numar natural este divizibil cu 10 dacă ultima sa cifră este 0;
  - un număr natural este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale luate ca simple unități este un număr care se divide cu 3;
  - un număr natural este divizibil cu 9 dacă suma cifrelor sale luate ca simple unități este un număr care se divide cu 9.
- Un număr natural diferit de 1, se numește *prim* dacă are exact 2 divizori, pe 1 și pe el însuși. Un număr natural care nu este prim se numește *număr compus*.

Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) și cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) a două sau mai multe numere naturale

- Pentru a calcula *cel mai mare divizor comun* (c.m.m.d.c.) a două sau mai multe numere naturale, le descompunem în produse de puteri cu baza numere prime și apoi efectuăm produsul factorilor comuni luați o singură dată la puterea cea mai mică.
- Pentru a calcula *cel mai mic multiplu comun* (c.m.m.m.c) a două sau mai multe numere naturale, le descompunem în produse de puteri cu baza numere prime și apoi efectuăm produsul factorilor comuni și necomuni luați o singură dată la puterea cea mai mare.
- C.m.m.d.c. al numerelor a și b se mai notează (a, b), c.m.m.m.c. al numerelor a și b se mai notează $[a, b]$ și este adevărată relația: $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$, pentru orice numere naturale a și b.
- Dacă c.m.m.d.c. al numerelor a și b este 1, atunci spunem că numerele a și b sunt *numere prime între ele* și scriem $(a, b) = 1$.
- Criteriu de divizibilitate:
  Dacă $a, p, q \in \mathbb{N}^*$ și dacă $a \vdots p$, $a \vdots q$, iar $(p, q) = 1$, atunci $a \vdots pq$. Astfel spus: dacă un număr natural este divizibil cu două numere naturale prime între ele, atunci el este divizibil și cu produsul acestora.

Mulțimi. Operații cu mulțimi

1. Fie mulțimea $A = \{x, y, z, t, u\}$.

a) Să se scrie toate submulțimile mulțimii A care conțin exact 4 elemente.

b) Să se scrie toate submulțimile cu 3 elemente ale mulțimii A care conțin elementul x.

c) Să se verifice dacă numărul submulțimilor cu 3 elemente este egal cu numărul submulțimilor cu 2 elemente ale mulțimii A.

2. Să se calculeze $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ și $A \Delta B$ pentru următoarele perechi de mulțimi nevide:

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$;

b) $A = \{x, y, z, t, u\}$; $B = \{y, z\}$;

c) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{4\}$.

3. Să se determine mulțimile nevide A și B, știind că:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cap B = \{3, 4\}$; $A \setminus B = \{1\}$;

b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $A \cap B = \{1, 2, 3\}$; $B \setminus A = \{7, 8\}$.

c) $A \cap B = \{x, y\}$; $A \setminus B = \{t, z\}$; $B \setminus A = \{u\}$;

d) $A \subset B$; $B \setminus A = \{1, 2, 3\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Puterea unui număr natural

4. Să se efectueze:

a) $2^2 + 8 : 2 + 5^0(1 + 2^3)$;

b) $2^2 \cdot (4 - 1) + (5 - 2) \cdot 3^3 - (2^2 + 3^2)^0$;

c) $3 + 2[2^3 - (3 + 5) : 2^2]$;

d) $(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \cdot 3^2 - (6^2 + 8^2)$.

5. Să se efectueze:

a) $5^{22} : 5^{19} : 5$;

b) $7^{11} : 7^9 : 7$;

c) $(3^4)^{25} : (3^{33})^3$;

d) $(4^{n+1} \cdot 4^{n+2})^2 : 4^{4n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

e) $(2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^3) : (2^2 \cdot 3^5)$;

f) $(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2)^3 : (2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3)^2$.

6. Să se compare următoarele perechi de numere:

a) $(3^4)^5$ și $(3^7)^3$;

b) 2^{1000} și 16^{250};

c) $(27)^{30}$ și 3^{89};

d) $(3^2 \cdot 5^3)^7$ și $(3^3 \cdot 5^5)^5$;

e) 2^{120} și 3^{72};

f) 3^{90} și 5^{60}.

7. Să se arate că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:

a) $2 + 6^{2015}$;

b) $5^{300} + 6^{300} + 1^{300}$;

c) $2^{2002} + 3^{2002}$;

d) $9^n + 4^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Mulțimi. Operații cu mulțimi

1. Fie mulțimea $A = \{x, y, z, t, u\}$.

a) Să se scrie toate submulțimile mulțimii A care conțin exact 4 elemente.

b) Să se scrie toate submulțimile cu 3 elemente ale mulțimii A care conțin elementul x.

c) Să se verifice dacă numărul submulțimilor cu 3 elemente este egal cu numărul submulțimilor cu 2 elemente ale mulțimii A.

2. Să se calculeze $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ și $A \Delta B$ pentru următoarele perechi de mulțimi nevide:

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$;

b) $A = \{x, y, z, t, u\}$; $B = \{y, z\}$;

c) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{4\}$.

3. Să se determine mulțimile nevide A și B, știind că:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cap B = \{3, 4\}$; $A \setminus B = \{1\}$;

b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $A \cap B = \{1, 2, 3\}$; $B \setminus A = \{7, 8\}$.

c) $A \cap B = \{x, y\}$; $A \setminus B = \{t, z\}$; $B \setminus A = \{u\}$;

d) $A \subset B$; $B \setminus A = \{1, 2, 3\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Puterea unui număr natural

4. Să se efectueze:

a) $2^2 + 8 : 2 + 5^0(1 + 2^3)$;

b) $2^2 \cdot (4 - 1) + (5 - 2) \cdot 3^3 - (2^2 + 3^2)^0$;

c) $3 + 2[2^3 - (3 + 5) : 2^2]$;

d) $(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \cdot 3^2 - (6^2 + 8^2)$.

5. Să se efectueze:

a) $5^{22} : 5^{19} : 5$;

b) $7^{11} : 7^9 : 7$;

c) $(3^4)^{25} : (3^{33})^3$;

d) $(4^{n+1} \cdot 4^{n+2})^2 : 4^{4n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

e) $(2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^3) : (2^2 \cdot 3^5)$;

f) $(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2)^3 : (2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3)^2$.

6. Să se compare următoarele perechi de numere:

a) $(3^4)^5$ și $(3^7)^3$;

b) 2^{1000} și 16^{250};

c) $(27)^{30}$ și 3^{89};

d) $(3^2 \cdot 5^3)^7$ și $(3^3 \cdot 5^5)^5$;

e) 2^{120} și 3^{72};

f) 3^{90} și 5^{60}.

7. Să se arate că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:

a) $2 + 6^{2015}$;

b) $5^{300} + 6^{300} + 1^{300}$;

c) $2^{2002} + 3^{2002}$;

d) $9^n + 4^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

cutie, iar dacă ar da fiecărui copil întâlnit câte 5 creioane, ar mai rămâne 3 creioane în cutie.

a) Verificați dacă în cutie pot fi exact 118 creioane.

b) Determinați câte creioane pot fi în acea cutie, dacă nu sunt mai mult de 350 de creioane, dar nici mai puțin de 305 creioane.

2. Numere întregi

Breviar de teorie

Modulul unui număr întreg

• $|x| = \begin{cases} -x, \text{ dacă } x < 0 \\ x, \text{ dacă } x \geq 0 \end{cases}$; $|x-a| = \begin{cases} -x+a, \text{ dacă } x < a \\ x-a, \text{ dacă } x \geq a \end{cases}$.

• Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, avem:

1) $|x| \geq 0$, iar $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $|-x| = |x|$;

3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; 4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, cu $y \neq 0$.

• Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$|x| = n \Leftrightarrow x = n$ sau $x = -n$;

$|x| \leq n \Leftrightarrow -n \leq x \leq n$;

$|x| \geq n \Leftrightarrow x \leq -n$ sau $x \geq n$.

Divizibilitatea numerelor întregi

• Se spune că numărul $a \in \mathbb{Z}$ este *divizibil* cu numărul $b \in \mathbb{Z}^*$ (se scrie $a \vdots b$ sau $b \mid a$), dacă există numărul $c \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a = bc$.

• Relația de divizibilitate este:

- *reflexivă*, adică $a \mid a$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}^*$;
- *antisimetrică*, adică din $a \mid b$ și $b \mid a \Rightarrow a = b$ sau $a = -b$;
- *tranzitivă*, adică din $a \mid b$ și $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

• Alte proprietăți:

- $d \mid a$ și $d \mid b \Rightarrow d \mid a + b$;
- $d \mid a$ și $d \mid b \Rightarrow d \mid a - b$;
- $d \mid a \Rightarrow d \mid k \cdot a$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}^*$;
- $d \mid a$ și $d \mid b \Rightarrow d \mid ka$ și $d \mid mb \Rightarrow d \mid ka \pm mb$, pentru orice $k, m \in \mathbb{Z}^*$.

Calcul cu numere întregi

1. Să se calculeze:

a) $-3 + (-2) \cdot (-5) + 6 : (-3)$;
b) $(2 - 3)(3 - 5) + (-3) \cdot 2$;
c) $-1 + [6 + (2 - 1) \cdot (-3)] : (-1)$;
d) $[-4 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-3)] : (-5)$.

2. Să se calculeze:

a) $(-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2$;
b) $2 \cdot (-1)^{2000} + 3 \cdot (-1)^{2001}$;
c) $(-2)^3 \cdot (-2)^1 + (-10)^0$;
d) $\dfrac{(-3)^{2016} + 3^{2016}}{(-3)^{2015} - 3^{2015}}$.

3. Să se calculeze:

a) $(-5)^{80} \cdot (-5)^{20} : (-5)^{98}$;
b) $(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot \ldots \cdot (-1)^{200}$;
c) $\dfrac{(-2) \cdot (-2)^2 \cdot \ldots \cdot (-2)^{100}}{2^{5050}}$;
d) $\left[(-3)^{n+1} : (-3)^n\right]^{2n+1} : 9^n$.

4. Comparați numerele întregi x și y:

a) $x = (-7)^{100}$ și $y = -7^{100}$;
b) $x = (-2)^{101}$ și $y = -2^{101}$;
c) $x = (-8)^{32}$ și $y = (-16)^{24}$;
d) $x = (-2)^{85}$ și $y = (-3)^{51}$.

Modulul unui număr întreg

5. Să se determine numărul $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât:

a) $|x| = 5$;
b) $|x| = -5$;
c) $|2x + 1| = 7$;
d) $|x + 2| = 0$;
e) $|3x + 1| = 8$;
f) $|x| = x$.

6. Să se calculeze $A \cap B$ în următoarele cazuri:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 2\}$;
b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \leq |x| \leq 7\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 6\}$.

7. Să se verifice următoarele egalități:

a) $|2^{100} - 3^{60}| = 2^{100} - 3^{60}$;
b) $|2^{93} - 3^{62}| = 3^{62} - 2^{93}$;
c) $|5^{3n} - 2^{7n}| + |-5^{3n}| = 2^{7n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Să se determine numerele $x, y \in \mathbb{Z}$ din următoarele egalități:

a) $|x + 1| + |y + 2| = 0$;
b) $|x + 2| + |y - 1| = 0$;
c) $|x| + |y - 3| = 1$;
d) $|2x - 1| + |2y + 6| = 1$.