

Dorin Lint

Maranda Lint

Alina Carmen Birta

Sorin Doru Noaghi

Evaluare Națională

Matematică



LITERA

Cuvânt-înainte

Lucrarea *Evaluare Națională 2021 - Matematică* a apărut ca răspuns la nevoia de îndrumare a elevilor de clasă a VIII-a în scopul pregătirii examenului de Evaluare Națională, **din perspectiva metodologiei actualizate la noile programe școlare**. Lucrarea constituie, de asemenea, un instrument util profesorilor și părinților care sprijină elevii în acest demers.

Structura lucrării este **determinată de schimbarea programei de evaluare națională**, pornind de la competențele generale/specifice care urmează a fi evaluate și de la tipurile de itemi sugerați de modelul de test oferit de Ministerul Educației și Cercetării.

Lucrarea cuprinde trei părți, care, parcurse în totalitate, asigură actualizarea, sistematizarea, apoi transferul tuturor elementelor de conținut spre competențe temeinice.

Prima parte prezintă sinteza tuturor conținuturilor studiate în clasele V-VIII și prevăzute de programa de Evaluare Națională. Toate conținuturile programei sunt sistematizate într-un mod practic și inedit, făcând apel la un limbaj verbalizat, accesibil, cu trimitere spre cotidian, fără a face abuz de notații și formule de memorat.

Un aspect inedit îl constituie alăturarea **indexului** la partea de geometrie, ca instrument de lucru pentru fiecare elev. Acesta a fost conceput așa încât să fie util ori de câte ori elevul are dificultăți în a-și aminti **o noțiune, o proprietate, o relație** sau atunci când caută elemente care l-ar putea ajuta să identifice **tehnicile de rezolvare**.

Partea a II-a urmărește cu strictețe fiecare temă prevăzută de programa de evaluare, din perspectiva competențelor generale/specifice, și conține **activități de învățare** prezentate sub formă de itemi obiectivi, subiectivi, urmând tipurile de itemi sugerate de modelul de test oferit de Ministerul Educației și Cercetării. Activitățile de învățare sunt însoțite adesea de **suport intuitiv**, prezentat într-o formă limpede și atractivă.

Partea a III-a are rolul de a antrena elevii atât **din perspectiva specialității** (matematică), cât și **din perspectiva unui comportament sigur și echilibrat în timpul examinării**, aspecte menite să asigure un randament foarte bun și un rezultat favorabil fiecăruia.

Pregătirea elevilor prin testele cuprinse în această parte, vizează:

- Menținerea concentrării atenției asupra unui subiect pentru o perioadă de timp determinată: 60 de minute pentru miniteste (lucrarea conține **10 miniteste**) și 120 de minute pentru testele finale (lucrarea conține **40 de teste finale**).
- Identificarea itemilor obiectivi, rezolvarea lor și completarea răspunsurilor pe formularul cu subiecte.

- Rezolvarea completă a itemilor subiectivi și redactarea corectă și completă a soluțiilor. Pentru miniteste și pentru primele 25 de teste tip Evaluare Națională, aceste rezolvări se scriu pe caiete.

Testele 26–40 cuprind spații de lucru cu o formă similară modelului din foaia de examen.

- ✓ Pentru **Subiectul I** și pentru **Subiectul al II-lea**, acest spațiu va fi folosit de către elevi ca ciornă, **încercuind**, respectiv **completând** apoi răspunsul corect.
- ✓ Pentru **Subiectul al III-lea**, cu probleme de rezolvat (itemi subiectivi), spațiul de lucru va fi folosit, la fiecare dintre cele două subpuncte, pentru **redactarea soluției complete**.
- Încadrarea în timpul de lucru prevăzut, gestionarea eficientă a acestui timp.
- Autoevaluarea activității și a punctajului obținut, identificarea instrumentelor de autoreglare.

Minitestele fac trecerea de la rezolvarea cerințelor, una câte una, eventual și de același tip, către cerințe încadrate într-o structură anume și care trebuie finalizate într-o anumită perioadă de timp.

Testele finale respectă structura modelului de test prezentat de Ministerul Educației și Cercetării, atât din punctul de vedere al tipurilor de itemi și al punctajului acordat, cât și din punctul de vedere al timpului alocat finalizării testului.

Suntem convinși că parcurgerea integrală a lucrării asigură dezvoltarea atenției și a gândirii, realizarea competențelor specifice la standard ridicat, aspecte care conferă siguranță și curaj în abordarea oricărui subiect de evaluare și care vor avea drept consecință un randament foarte bun la examen.

Autorii

Partea I

Sinteza conținuturilor teoretice studiate în clasele V-VIII

I. MULȚIMI. NUMERE

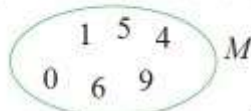
1.1. Mulțimi

- O **mulțime** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte (elementele mulțimii), considerată ca entitate.
- Dacă A este o mulțime și x este un element al său, vom spune că x **aparține** mulțimii A și vom scrie $x \in A$. Dacă x nu este element al mulțimii A , vom scrie $x \notin A$.

- O mulțime poate fi definită (descrisă, dată, scrisă) astfel:

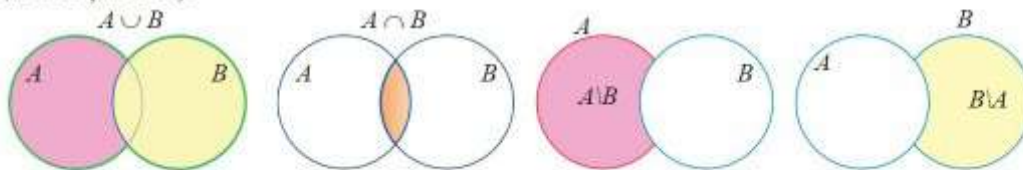
1) enumerând elementele mulțimii $M = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$

2) prin diagrame Venn–Euler



3) enunțând o proprietate comună a elementelor mulțimii $M = \{x \mid x \text{ poate fi ultima cifră a unui pătrat perfect}\}$

- Mulțimea care nu are niciun element se notează cu simbolul \emptyset și se numește **mulțimea vidă**.
- O mulțime care are un număr finit de elemente, se numește **mulțime finită**, iar numărul elementelor sale se numește **cardinalul mulțimii**.
- O **mulțime numerică** este o mulțime ale cărei elemente sunt numere.
- Două mulțimi care au aceleași elemente se numesc **mulțimi egale**.
Dacă mulțimile A și B sunt egale, scriem $A = B$. Dacă mulțimile A și B nu sunt egale, scriem $A \neq B$.
- Mulțimea A **este inclusă** în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B .
Dacă mulțimea A este inclusă în mulțimea B , scriem $A \subset B$.
Dacă mulțimea A **nu este inclusă** în mulțimea B , scriem $A \not\subset B$.
- Dacă $A \subset B$, atunci mulțimea A se numește **submulțime** a mulțimii B , sau **parte** a mulțimii B .
Mulțimea vidă, notată \emptyset , este submulțime a oricărei mulțimi, adică: $\emptyset \subset A$ oricare ar fi mulțimea A .
- **Reuniunea** mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre ele:
 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.
- **Intersecția** mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele comune celor două mulțimi:
 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.
- Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci A și B se numesc mulțimi **disjuncte**.
- **Diferența** mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B :
 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.



▪ Mulțimi de numere

- Mulțimea numerelor **naturale**: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- Mulțimea numerelor **întregi**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
- Mulțimea numerelor **raționale**: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
- Mulțimea numerelor raționale reunită cu mulțimea numerelor iraționale este **mulțimea numerelor reale**, notată cu \mathbb{R} .
- Notăția $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este utilizată pentru mulțimea numerelor iraționale.

- Pentru a și b numere reale cu $a < b$, se definesc următoarele mulțimi de numere, numite **intervale**.

INTERVALE MĂRGINITE		INTERVALE NEMĂRGINITE	
Intervalul	Reprezentarea geometrică	Intervalul	Reprezentarea geometrică
interval deschis $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } a < x < b\}$		interval deschis nemărginit la dreapta $(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x > a\}$	
interval închis $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } a \leq x \leq b\}$		interval închis la stânga, nemărginit la dreapta $[a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq a\}$	
interval semideschis $(a, b]$ $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } a < x \leq b\}$		interval deschis, nemărginit la stânga $(-\infty, a)$ $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x < a\}$	
interval semideschis $[a, b)$ $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } a \leq x < b\}$		interval închis la dreapta, nemărginit la stânga $(-\infty, a]$ $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x \leq a\}$	
Oricare ar fi $a > 0$, au loc echivalențele: 1) $x \in \mathbb{R}$ și $ x < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ și $ x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$		Oricare ar fi $a > 0$, au loc echivalențele: 1) $x \in \mathbb{R}$ și $ x > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a)$ sau $x \in (a, \infty)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ și $ x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a]$ sau $x \in [a, \infty)$	

- Pentru două intervale I_1 și I_2 avem: $I_1 \cup I_2 = \{x \mid x \in I_1 \text{ sau } x \in I_2\}$ $I_1 \cap I_2 = \{x \mid x \in I_1 \text{ și } x \in I_2\}$

1.2. Mulțimea numerelor naturale

- Șirul numerelor naturale: $0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ este infinit (nu există un cel mai mare număr natural).
- Doi termeni care urmează unul după altul: n și $n+1$ se numesc **numere consecutive**.
Numerele consecutive pot fi scrise atât crescător ($n, n+1, n+2, \dots$), cât și descrescător ($m, m-1, m-2, \dots$).
Fiind date numerele n și $n+1$, n se numește **predecesorul** lui $n+1$, iar $n+1$ se numește **succesorul** lui n .
- **Axa numerelor** este o dreaptă pe care fixăm un punct O , numit **origine**, alegem un segment, numit **unitate de măsură** și stabilim un **sens de parcurgere a drepteii**, de regulă, de la stânga spre dreapta.
Oricărui punct de pe axă îi corespunde un singur număr, numit **coordonata** punctului.
Punctului O îi corespunde numărul 0 .
- **Aproximarea prin lipsă** la zeci (sute, mii etc.) a unui număr natural este cel mai mare număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.), mai mic decât numărul dat.
Aproximarea prin adaos la zeci (sute, mii etc.) a unui număr natural este cel mai mic număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.), mai mare decât numărul dat.
Estimarea este o evaluare a unei cantități, având date incomplete sau insuficiente. Spre deosebire de aproximare, la care cunoaștem mărimea maximă a erorii, în cazul estimării nu avem această posibilitate.

- **Adunarea** $a + b = c$ **Scăderea** $a - b = c$
-

Proprietăți:

- Adunarea este comutativă: $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele naturale a și b .
- Adunarea este asociativă: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a, b și c .
- Zero (0) este element neutru în raport cu adunarea: $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi numărul natural a .
Au loc proprietățile: $a - 0 = a$, oricare ar fi numărul natural a ; $a - b - c = a - (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a, b și c .

▪ **Înmulțirea** $a \cdot b = c$


Proprietăți:

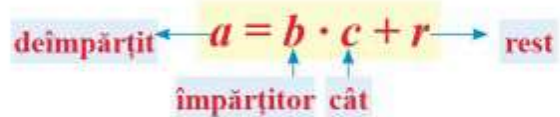
- a) Înmulțirea este comutativă: $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele naturale a și b .
 b) Înmulțirea este asociativă: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi numerele naturale a , b și c .
 c) Înmulțirea este distributivă față de adunare sau scădere:
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi numerele naturale a , b și c .
 d) Unu (1) este element neutru în raport cu înmulțirea: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, oricare ar fi numărul natural a .

▪ **Împărțirea** la 0 nu este posibilă.

Pentru numerele naturale a și b , b nenul, există numerele naturale c și r unic determinate, astfel încât:

$$a = b \cdot c + r \quad \text{și} \quad 0 \leq r < b.$$

Numărul c este *câtul* și numărul r este restul împărțirii lui a la b .



▪ **Puterea a n-a** a numărului natural a este: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, a și n numere naturale, $n \neq 0$ și $n \neq 1$.

a se numește *baza* puterii, iar n se numește *exponentul* puterii.

Prin convenție: $a^1 = a$; $a^0 = 1$, pentru orice $a \neq 0$; $0^n = 0$, oricare ar fi $n \neq 0$; 0^0 nu are sens.

Dacă a este un număr natural, a^2 se numește *pătratul* numărului a , iar a^3 se numește *cubul* numărului a .

▪ **Operații cu puteri**

Oricare ar fi numerele naturale a , m , n , $a \neq 0$ avem:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ dacă } m \geq n.$$

Oricare ar fi numerele naturale a , b , n , $a \neq 0$, $b \neq 0$ avem: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $(a : b)^n = a^n : b^n$.

▪ **Compararea puterilor**

Pentru numerele naturale nenule a , m , n , cu $a \geq 2$, are loc: $a^m \leq a^n$ dacă și numai dacă $m \leq n$.

Pentru numerele naturale nenule a , b , n , are loc: $a^n \leq b^n$ dacă și numai dacă $a \leq b$.

▪ **Scrierea numerelor naturale în baza 10**

În mod uzual, folosim scrierea numerelor naturale în baza 10 (în sistemul zecimal de numerație).

Orice număr natural se poate scrie ca sumă de produse în care un factor este de forma 10^n , cu n număr natural, iar celălalt factor este unul dintre numerele: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Exemplu: Numărul natural $n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$ se notează $\overline{abcd}_{(10)}$ sau \overline{abcd}

▪ **Scrierea numerelor naturale în baza 2**

Orice număr natural se poate scrie ca sumă de produse în care un factor este de forma 2^n , cu n număr natural, iar celălalt factor este 0 sau 1.

Exemplu: numărul $m = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d \cdot 2^0$, unde unde $a, b, c, d \in \{0; 1\}$ reprezintă descompunerea în baza 2 a numărului m și scriem $m = \overline{abcd}_{(2)}$.

Un număr scris în baza 10 se poate scrie în baza 2, și invers, un număr scris în baza 2 se poate scrie în baza 10.

Egalitatea $\overline{abcd}_{(2)} = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d \cdot 2^0$ permite trecerea aceluiași număr natural din baza 2 în baza 10 și invers.

Exemplu: a) $110_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6_{(10)}$.
 b) $6 = 6_{(10)} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 110_{(2)}$

Pentru a găsi cifrele numărului, în baza 2, trebuie să-l descompunem după puterile lui 2, cu factorii 0 sau 1. În acest scop, efectuăm împărțiri succesive la 2 și identificăm cifrele care reprezintă resturile obținute.

Exemplu:

$$21 = 2 \cdot 10 + 1$$

$$10 = 2 \cdot 5 + 0$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

Scriem resturile, în ordinea inversă găsirii și obținem numărul în baza 2.

$$21_{(10)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 10101_{(2)}$$

1.3. Divizibilitate

- Fie a și b două numere naturale.

Spunem că a este divizibil cu b dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Notăm $a : b$ și citim „ a este divizibil cu b ” sau notăm $b | a$ și citim „ b divide a ”.

Spunem că b este un **divizor** al lui a sau că a este un **multiplu** al lui b .

Dacă avem $a \neq b \cdot c$, pentru orice număr natural c , atunci spunem că „ a nu este divizibil cu b ” sau că „ b nu divide a ”. Sau putem spune că „ a nu este un multiplu al lui b ” și că „ b nu este un divizor al lui a ”.

Notăm: $a \nmid b$, respectiv, $b \nmid a$.

- Dacă $a = b \cdot c$, atunci b și c sunt divizori ai lui a , iar a este multiplu al lui b , dar și al lui c .

- Pentru orice număr natural a avem:

$$1 | a \quad 1 \text{ este divizorul oricărui număr natural.}$$

$$a | a \quad \text{Orice număr natural are ca divizor pe numărul însuși.}$$

- Pentru orice număr natural $a \neq 0$ avem:

$$a | 0 \quad 0 \text{ este multiplul oricărui număr natural.}$$

$$a | a \quad \text{Orice număr natural este divizor al lui însuși.}$$

- Orice multiplu al unui număr natural a are forma $n \cdot a$, cu n număr natural.

- **Criterii de divizibilitate**

- Un număr natural este **divizibil cu 2** dacă ultima sa cifră este 0, 2, 4, 6 sau 8.
Dacă ultima cifră a unui număr natural este 1, 3, 5, 7 sau 9, atunci numărul nu este divizibil cu 2.
- Un număr natural este **divizibil cu 5** dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.
Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este nici 0, nici 5, atunci numărul nu este divizibil cu 5.
- Un număr natural este **divizibil cu 10** dacă ultima sa cifră este 0.
Dacă ultima cifră a unui număr natural nu este 0, atunci numărul nu este divizibil cu 10.
- Un număr natural este **divizibil cu 10^n** dacă ultimele sale n cifre sunt zerouri.
- Un număr natural este **divizibil cu 3** dacă suma cifrelor sale se divide cu 3.
- Un număr natural este **divizibil cu 9** dacă suma cifrelor sale se divide cu 9.

- Numim **divizori proprii** ai unui număr natural n toți divizorii diferiți de 1 și de n .

Divizorii 1 și n se numesc **divizori improprii** ai lui n .

- Numărul natural n mai mare decât 1 este **număr prim** dacă are doar divizori improprii.

Dacă n are cel puțin un divizor propriu, atunci este **număr compus**.

- **Cel mai mare divizor comun** al numerelor naturale a și b (prescurtat c.m.m.d.c.), notat cu (a, b) se află astfel:

- se descompun numerele în factori primi;
- se iau toți factorii primi comuni, o singură dată, la puterea cea mai mică, și se înmulțesc între ei.

- **Cel mai mic multiplu comun** al numerelor naturale a și b (prescurtat c.m.m.m.c.), notat cu $[a, b]$ se află astfel:

- se descompun numerele în factori primi;
- se iau toți factorii primi, comuni și necomuni, o singură dată, la puterea cea mai mare, și se înmulțesc între ei.

- **Proprietăți ale divizibilității** în \mathbb{N} :

$$a | a, \text{ unde } a \in \mathbb{N};$$

$$a | b \text{ și } a | c \Rightarrow a | (b \pm c), \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{N};$$

$$a | b \text{ și } b | c \Rightarrow a | c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{N};$$

$$a | bc \text{ și } (a, b) = 1 \Rightarrow a | c, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

1.4. Mulțimea numerelor întregi

- Șirul numerelor întregi: $\dots, -(n+1), -n, -(n-1), \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ este infinit (nu există un cel mai mic, nici un cel mai mare număr întreg).

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}; \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ – mulțimea numerelor întregi pozitive}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1\} \text{ – mulțimea numerelor întregi negative}$$

$$\mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$$

- **Opusul numărului întreg** x este numărul întreg notat $-x$, care are ca reprezentare pe axa numerelor simetricul față de origine al punctului care-l reprezintă pe x .
- **Modulul** sau **valoarea absolută** a unui număr întreg x este distanța de la originea axei de coordonate la punctul de reprezentare pe axă, a numărului x .

Operații cu numere întregi

- **Adunarea** numerelor întregi se efectuează ținând cont de următoarele reguli:
 - a) Dacă termenii au același semn, atunci suma lor are semnul comun, iar modulul sumei este egal cu suma modulelor termenilor.
 - b) Dacă termenii au semne diferite, atunci suma lor are semnul termenului care are modulul mai mare, iar modulul sumei este diferența modulelor.

Adunarea numerelor întregi păstrează proprietățile adunării numerelor naturale, la care se adaugă:

$$\text{Fiecare număr întreg admite un opus, număr întreg: } a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

- **Diferența** numerelor întregi a și b este suma dintre numărul a și opusul numărului b .

$$a - b = a + (-b)$$

- **Înmulțirea**

Produsul a două numere întregi nenule este un număr întreg care este egal cu:

- produsul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul $+$, dacă cele două numere întregi au același semn;
- produsul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul $-$, dacă cele două numere întregi au semne diferite;
- produsul oricărui număr întreg cu 0 și produsul lui 0 cu orice număr întreg este egal cu 0.

Înmulțirea numerelor întregi păstrează proprietățile înmulțirii numerelor naturale.

- **Împărțirea**

Dacă a și b sunt numere întregi, iar a este multiplu al lui b , $b \neq 0$, atunci rezultatul împărțirii $a : b$ este tot număr întreg, care este egal cu:

- câtul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul $+$, dacă cele două numere au același semn;
- câtul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul $-$, dacă cele două numere au semne diferite.

Are loc proprietatea:

$$a : 1 = a, \text{ oricare ar fi numărul natural } a$$

- **Puterea unui număr întreg**

Fie a un număr întreg și n un număr natural nenul.

Dacă $a \geq 0$, atunci a^n este număr natural.

Dacă $a < 0$, atunci avem următoarele cazuri:

$$\text{a) } n \text{ par} \Rightarrow a^n \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{b) } n \text{ impar} \Rightarrow a^n \in \mathbb{Z}_-$$

3. ORGANIZAREA DATELOR. PROBABILITĂȚI ȘI ELEMENTE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ

3.1. Rapoarte și proporții. Probabilități

- Dacă a și b sunt două numere reale, cu $b \neq 0$, atunci $\frac{a}{b}$ se numește *raportul* numerelor a și b , sau simplu, *raport*. Valoarea raportului este rezultatul împărțirii $a : b$.

Egalitatea a două rapoarte se numește *proporție*. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Numerele a, b, c, d sunt *termenii* proporției.

Numerele a și d se numesc *extremi*, iar numerele b și c se numesc *mezi*.

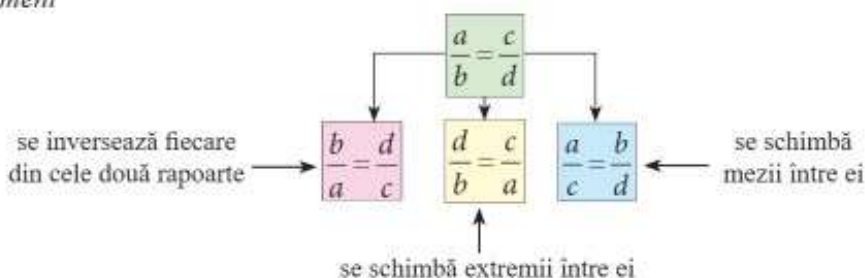
- **Proprietatea fundamentală a proporțiilor.** Numerele reale nenule a, b, c, d formează proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dacă și numai dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

Dacă unul dintre termenii unei proporții este necunoscut, atunci se poate afla astfel:

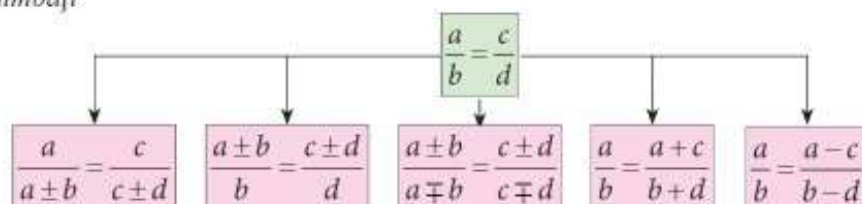
$$\frac{x}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{d} \qquad \frac{a}{x} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{x}{d} \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{b} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

- Fiind dată o proporție $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se pot obține alte proporții, numite *proporții derivate*.

a) cu aceiași termeni



b) cu termeni schimbați



- **Șir de rapoarte egale.** Mai multe rapoarte care au aceeași valoare se numește *șir de rapoarte egale*.

Un șir de n rapoarte egale are proprietatea: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} = k$

- **Mărimi direct proporționale.** Două mărimi sunt *direct proporționale* dacă atunci când valoarea uneia dintre ele crește sau descrește de un număr de ori, cealaltă crește, respectiv descrește, de același număr de ori.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ și $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ sunt *direct proporționale* dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$

- **Mărimi invers proporționale.** Două mărimi sunt *invers proporționale* dacă atunci când valoarea uneia dintre ele crește sau descrește de un număr de ori, cealaltă descrește, respectiv crește, de același număr de ori.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ și $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ sunt *invers proporționale* dacă $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \dots = a_n \cdot b_n = k$

- **Regula de trei simplă** permite determinarea unei valori a unei mărimi folosind proporționalitatea cu o altă mărime. Dacă valorii a a primei mărimi îi corespunde valoarea b a celei de-a doua, ne propunem să aflăm valoarea celei de-a doua mărimi care corespunde valorii c a primei mărimi.

mărimi direct proporționale

$$\begin{array}{l} a \dots\dots\dots b \\ c \dots\dots\dots x \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a} \end{array}$$

mărimi invers proporționale

$$\begin{array}{l} a \dots\dots\dots b \\ c \dots\dots\dots x \\ a \cdot b = c \cdot x \Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c} \end{array}$$

- Pentru o experiență aleatoare, probabilitatea de realizare a unui eveniment A este raportul dintre numărul m al cazurilor favorabile evenimentului și numărul n al tuturor cazurilor posibile ale unei probe (repetare a experienței).

Probabilitatea realizării evenimentului A se calculează după formula: $p(A) = \frac{m}{n}$.

Observație: $0 \leq p(A) \leq 1$

3.2. Organizarea datelor și elemente de statistică matematică

Mulțimea tuturor *unităților* (de orice natură), asupra cărora se realizează un studiu statistic, se numește *populație statistică*.

Trăsătura comună a tuturor unităților unei populații statistice, care variază ca nivel de la o unitate la alta, se numește *caracteristică* sau *variabilă statistică*.

Numărul aparițiilor unei valori a variabilei în setul său de date se numește *frecvență absolută* a acelei valori a variabilei (caracteristicii).

Valorile variabilelor numerice pot fi ordonate.

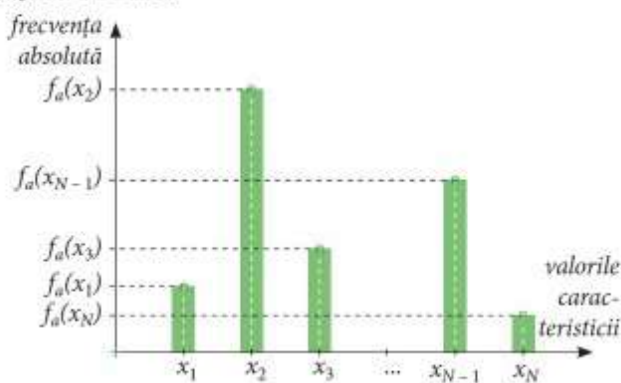
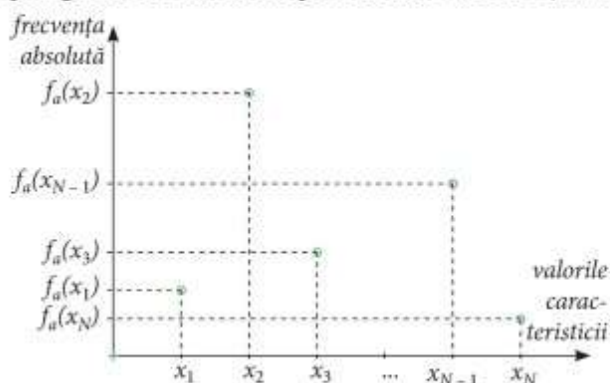
Organizarea datelor sub forma unor grafice sau diagrame permite o interpretare mai ușoară a acestora. Spre deosebire de tabelele de date, diagramele oferă și o reprezentare geometrică, ceea ce permite o mai bună înțelegere a acestor date.

Observație. Poligonul frecvențelor ne ajută să comparăm *frecvențele* (numărul aparițiilor unei valori) a două valori diferite, să observăm care dintre aceste valori are *ponderea* mai mare, să estimăm *media* valorilor.

Reprezentarea geometrică a seriilor statistice (tabelului frecvențelor absolute)

Dacă setul de date X are valorile $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$, iar frecvențele lor absolute sunt $\{f_a(x_1), f_a(x_2), f_a(x_3), \dots, f_a(x_N)\} \subset \mathbb{N}$, atunci reprezentăm punctele de coordonate: $(x_i, f_a(x_i))$, $1 \leq i \leq N$.

Pentru a putea face mai ușor comparații între frecvențele a două valori ale setului de date, vom construi dreptunghiuri colorate în dreptul fiecărei valori, obținând *graficul cu bare*.



Tabelele de date și reprezentările grafice ale acestora oferă informații clare privind *distribuția* sau *repartiția* statistică a unei variabile.

Partea a II-a

Recapitularea și sistematizarea cunoștințelor, prin activități de învățare

1. MULȚIMI. NUMERE

1.1. Mulțimi

I Încercuieți litera corespunzătoare răspunsului corect.

1 Se consideră mulțimile $A = \{1; -5; a; m\}$, și $B = \{a; m; 0\}$.

1.1. Numărul submulțimilor numerice ale mulțimii A este:

- a) 2; b) 4;
c) 3; d) 0.

1.2. Are loc egalitatea $A = \{-5; a; m; 1\}$

- a) Adevărat b) Fals

1.3. Pentru mulțimile A și B , considerăm propozițiile:

$$p_1: A \subset B;$$

$$p_2: B \subset A;$$

$$p_3: \emptyset \subset A;$$

$$p_4: B \not\subset A.$$

Numărul propozițiilor adevărate este:

- a) 1; b) 2;
c) 3; d) 4.

2 Se consideră mulțimea M , formată cu toate cifrele impare, mai mari ca 2.

2.1. Prin enumerarea elementelor sale, mulțimea M este:

- a) $M = \{2; 3; 5\}$; b) $\{1; 3; 5; 7; 9\}$;
c) $\{3; 5; 7; 9\}$; d) $\{1\}$.

2.2. Este adevărată afirmația:

- a) $3 \in M$; b) $1 \in M$;
c) $9 \notin M$; d) $M \supset N$.

2.3. Are loc relația: $\{2; 3; 5\} \subset M$.

- a) Adevărat; b) Fals.

2.4. Are loc relația: $\{3; 5\} \subset M$.

- a) Adevărat; b) Fals.

3 Dacă toate elementele mulțimii A sunt și elemente ale mulțimii B , atunci:

- a) $B \subset A$; b) $A \not\subset B$;
c) $A \subset B$; d) $B = A$.

4 Pentru mulțimile A și B , enunțul:

$B \subset A$ și $A \subset B$ dacă și numai dacă $A = B$, este

- a) Adevărat; b) Fals.

5 Fie mulțimea: $P = \{0; 5; 10; 15; 20; \dots; 95\}$.

5.1. Numărul elementelor mulțimii P este:

- a) 18; b) 19;
c) 20; d) 91.

5.2. Suma elementelor mulțimii P este:

- a) 900; b) 950;
c) 1000; d) 925.

5.3. Media aritmetică a elementelor mulțimii este:

- a) 48; b) 47,5;
c) 49,5; d) 50.

6 Considerăm mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\} \text{ și}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 2\}.$$

6.1. Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea A este:

- a) $\{-2, -1, 1, 2\}$; b) $\{0, 1, 2\}$;
c) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; d) $\{-2, 2\}$.

6.2. Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea B este:

- a) $\{-2, -1, 1, 2\}$; b) $\{2\}$;
c) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; d) $\{-2, 2\}$.

7 Fie mulțimile $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $B = \{-2, 2\}$.

7.1. Mulțimea $A \cap B$ este:

- a) $\{-2, 2\}$; b) $\{2\}$;
c) $\{-1, 1\}$; d) \emptyset .

7.2. Mulțimea $A \cup B$ este:

- a) $\{-2, 2\}$; b) $\{2\}$;
c) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; d) $\{-1, 0, 1\}$.

7.3. Mulțimea $B - A$ este:

- a) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; b) $\{-2, 2\}$;
c) \emptyset ; d) $\{-1, 0, 1\}$.

8 Scrisă ca interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$ este:

- a) $(-2, 2)$; b) $[-2, 2]$;
c) $(-3, 3)$; d) $[-3, 3]$.

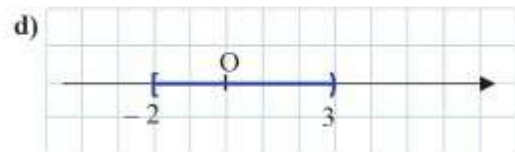
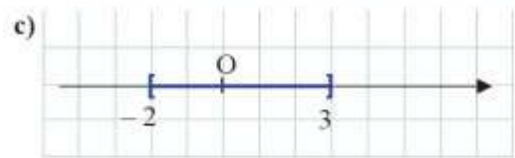
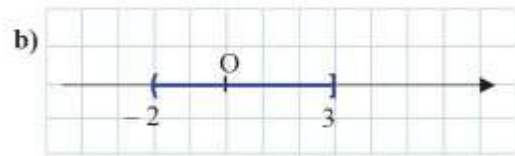
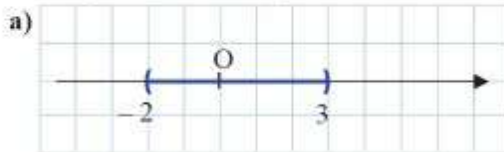
9) Mulțimea $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < 5\}$ este un interval.

- a) Adevărat;
b) Fals.

10) Mulțimea $(-3, 3) \cap \mathbb{Q}$ este finită.

- a) Adevărat;
b) Fals

11) Reprezentat pe axa numerelor, intervalul $[-2; 3)$ este segmentul din imaginea:



II Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate

1) Notăm cu D_n mulțimea divizorilor naturali ai numărului natural n și cu M_n mulțimea multiplilor naturali ai numărului natural n . Atunci:

- a) Cardinalul mulțimii D_{15} este
b) Cardinalul mulțimii

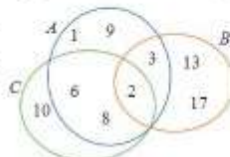
$M = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } (x+1) \in D_8\}$ este

c) Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea

$A = \{x \mid x \in M_{10} \text{ și } x \in D_{50}\}$ este:

d) Mulțimea $B = \{x \mid x \in M_5 \text{ și } 9 < x < 20\}$ conține ... numere impare.

2) Mulțimile A, B, C sunt redată, prin diagrame, în imaginea alăturată.



a) Scrise prin enumerarea elementelor, sunt

$A = \{.....\}$,

$B = \{.....\}$,

$C = \{.....\}$.

b) Efectuând operațiile cu mulțimi, obținem:

b₁) $A \cup B =$

b₂) $B \cup C =$

b₃) $A \cup C =$

b₄) $A \cup B \cup C =$

b₅) $A \cap B =$

b₆) $A \cap C =$

b₇) $B \cap C =$

b₈) $A \cap B \cap C =$

b₉) $A \setminus B =$

b₁₀) $C \setminus A =$

b₁₁) $A \setminus (B \cup C) =$

b₁₂) $A \setminus (B \cap C) =$

c) Dintre mulțimile A, B, C , conține doar numere pare mulțimea

d) Dintre mulțimile A, B, C , conține doar numere prime mulțimea

4.3. Corpuri geometrice

A PARALELISM ȘI PERPENDICULARITATE

I Încercuțiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

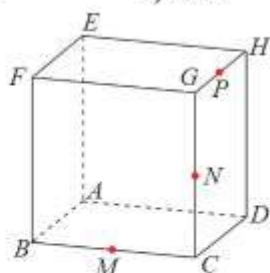
1. În cubul $ABCDEFGH$, M , N , P sunt mijloacele muchiilor BC , CG , respectiv GH .

1.1. $(BCG) \parallel (ADH)$.

- a) Adevărat; b) Fals.

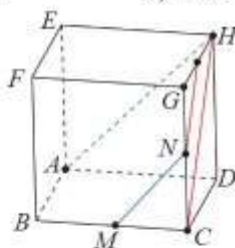
1.2. $(ABF) \parallel (DMP)$.

- a) Adevărat; b) Fals.



1.3. $(MNP) \parallel (ACH)$.

- a) Adevărat; b) Fals.



1.4. $(ABC) \perp (DEH)$.

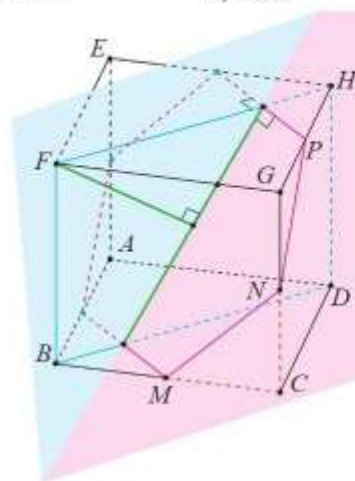
- a) Adevărat; b) Fals.

1.5. $(DNP) \perp (ACG)$.

- a) Adevărat; b) Fals.

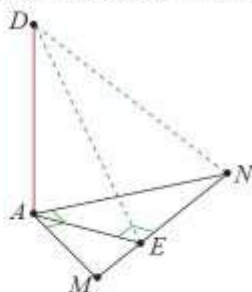
1.6. $(MNP) \perp (BDH)$.

- a) Adevărat; b) Fals.



II Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

1. Fie AMN un triunghi în care $\sphericalangle MAN = 90^\circ$, $AM = a$ cm, $MN = a\sqrt{3}$ cm, iar AE este înălțime. Pe perpendiculara în A pe planul triunghiului se ia punctul D , astfel încât $AD = a\sqrt{2}$ cm.



1.1. $AN = \dots$ cm

1.2. $ME = \dots$ cm

1.3. $d(D, MN) = \dots$ cm

1.4. $d(N, (ADM)) = \dots$ cm

1.5. $d(M, (ADE)) = \dots$ cm

1.6. $\sphericalangle(AM, (ADN)) = \dots^\circ$

1.7. $\sphericalangle(DN, (AMN)) = \dots^\circ$

1.8. $\sphericalangle(DN, (ADM)) = \dots^\circ$

1.9. $\sphericalangle((DMN), (AMN)) = \dots^\circ$

1.10. $\sphericalangle((ADM), (ADN)) = \dots^\circ$

Partea a III-a

Teste de evaluare/autoevaluare

TESTE DE ANTRENAMENT

La fiecare test se acordă 10 puncte din oficiu

MINITEST 1

SUBIECTUL I

Încercuieți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(20 de puncte)

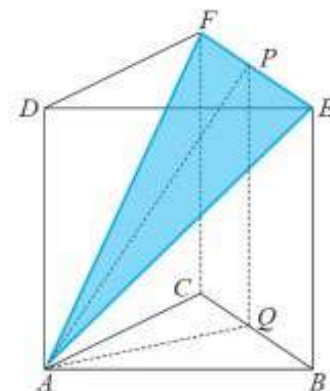
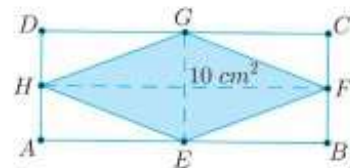
- 5p 1. Rezultatul calculului $(1^1 + 2^2 + 3^3) : 4$ este:
a) 12 b) 4 c) 6 d) 8
- 5p 2. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 5, 6 și 15 este:
a) 25 b) 15 c) 30 d) 60
- 5p 3. Sorin scrie un număr de forma $\overline{4ab}$, în baza zece. Probabilitatea ca numărul scris să fie pătrat perfect este:
a) $\frac{3}{100}$ b) $\frac{3}{50}$ c) $\frac{7}{25}$ d) $\frac{1}{100}$
- 5p 4. Dintr-o clasă de 30 elevi, 50% joacă fotbal, 40% joacă baschet, iar 10% joacă fotbal și baschet. Numărul elevilor care nu joacă nici fotbal, nici baschet este:
a) 9 b) 6 c) 3 d) 4

SUBIECTUL al II-lea

Încercuieți litera corespunzătoare răspunsului corect.

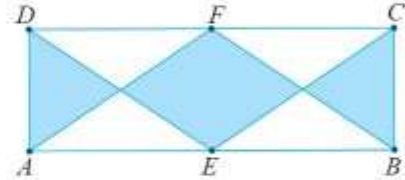
(20 de puncte)

- 5p 1. Linia mijlocie a unui triunghi echilateral este 2 cm. Perimetrul triunghiului este
a) 16 cm b) 18 cm c) 12 cm d) 9 cm
- 5p 2. Mijloacele laturilor unui dreptunghi sunt vârfurile unui patrulater cu aria de 10 cm^2 . Aria dreptunghiului este:
a) 40 cm^2 b) 30 cm^2 c) 25 cm^2 d) 20 cm^2
- 5p 3. Paralelipipedul dreptunghic cu dimensiunile 6 cm, 8 cm, 24 cm are diagonala de lungime:
a) 30 cm b) 28 cm c) 26 cm d) 36 cm
- 5p 4. Prisma triunghiulară regulată $ABCDEF$ are toate muchiile congruente. Tangenta unghiului format de planele (AEF) și (BCE) este:
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$



SUBIECTUL al III-lea*Scrieți rezolvările complete.***(50 de puncte)**

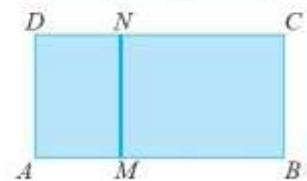
1. Fie expresia $E(x) = (2x + 3)^2 + (2x - 1)^2 - (2x + 3)(2x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 10p a) Efectuați toate calculele posibile.
- 10p b) Pentru $n \in \mathbb{N}$, determinați restul împărțirii numărului $E(n)$ la 8.
2. În desenul alăturat, $ABCD$ este un dreptunghi și E, F sunt mijloacele laturilor AB , respectiv CD . Suprafața colorată are aria de 6 cm^2 .
- 5p a) Calculați aria dreptunghiului.
- 10p b) Dacă $AB = 3 \cdot BC$, aflați sinusul unghiului AFB .
3. Avem 345 cubulețe cu muchia de 1 cm.
- 5p a) Determinați numărul cubulețelor pe care la folosim pentru a construi un cub cu muchia cât mai mare posibil.
- 10p b) Determinați numărul cubulețelor de care este nevoie pentru a construi un cub cu muchia 9 cm.

**MINITEST 2****SUBIECTUL I***Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.***(20 de puncte)**

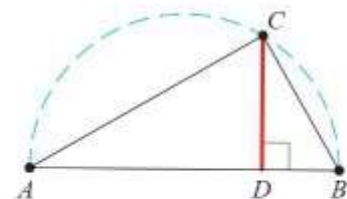
- 5p 1. Numărul real x care verifică egalitatea $x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ este:
- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{1}{6}$
- 5p 2. Prețul unui bilet de tren cu reducere 20% este 15 lei. Prețul biletului fără reducere este:
- a) 18 lei b) 18,50 lei c) 18,75 lei d) 19 lei
- 5p 3. Scrisă ca interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{2x-1}{3} < 3\}$ este:
- a) $(-2, 4)$ b) $(-1, 4)$ c) $(-2, 5)$ d) $(-1, 5)$
- 5p 4. Descompunerea în factori a expresiei $4x - x^3$, este:
- a) $x(2-x)(2+x)$ b) $(2-x)(2+x)$ c) $x(x-2)(x+2)$ d) $x(2-x^2)$

SUBIECTUL al II-lea*Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.***(20 de puncte)**

- 5p 1. În desenul alăturat este reprezentat un teren dreptunghiular $ABCD$ și gardul despărțitor MN . Se știe că $AM = DN = 20 \text{ m}$ și $\mathcal{A}_{\triangle MND} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{ABCD} = 600 \text{ m}^2$. Perimetrul dreptunghiului este:
- a) 120 m b) 240 m c) 180 m d) 160 m



- 5p 2. Triunghiul dreptunghic ABC este înscris semicercul \widehat{AB} , $AB = 16$ cm și $\widehat{AC} = 2 \cdot \widehat{BC}$. Distanța de la punctul C la dreapta AB este:
- a) $6\sqrt{3}$ cm b) $8\sqrt{3}$ cm c) $2\sqrt{3}$ cm d) $4\sqrt{3}$ cm



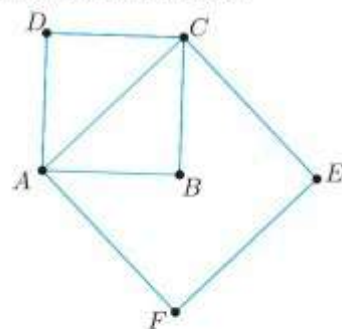
- 5p 3. Un cub are diagonala $\sqrt{300}$ cm. Volumul cubului este egal cu:
- a) 300 cm³ b) 3000 cm³ c) 1000 cm³ d) 100 cm³
- 5p 4. O piramidă triunghiulară regulată are aria laterală $36\sqrt{3}$ cm² și aria totală $48\sqrt{3}$ cm². Muchia bazei este:
- a) $4\sqrt{3}$ cm b) $3\sqrt{3}$ cm c) $2\sqrt{3}$ cm d) $\sqrt{3}$ cm

SUBIECTUL al III-lea

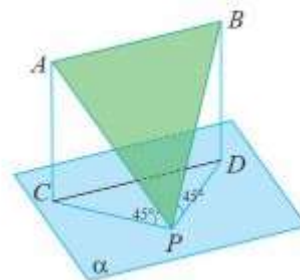
Scieți rezolvările complete.

(50 de puncte)

1. Într-o sală de teatru sunt 30 rânduri, unele cu 28 locuri pe rând, altele cu 32 locuri pe rând.
- 5p a) Aflați numărul de rânduri cu 28 de locuri, știind că dacă la o reprezentație participă 920 spectatori, toate locurile sunt ocupate.
- 10p b) Aflați numărul maxim de persoane care intră în sală, dacă numărul rândurilor cu 32 locuri este dublul celor cu 28 locuri, iar între orice două persoane de pe fiecare rând este un loc liber.
2. În desenul alăturat, $ABCD$ și $ACEF$ sunt pătrate situate în același plan.
- 5p a) Demonstrați că punctele A , B și E sunt coliniare.
- 10p b) Știind că $BF = 4$ cm, calculați lungimea segmentului AC .



3. Triunghiul echilateral PAB cu latura 4 cm, are vârful P în planul α , iar dreptele PA și PB formează cu planul α , unghiuri cu măsura de 45° .
- 10p a) Demonstrați că $AB \parallel \alpha$.
- 10p b) Dacă $C = pr_\alpha A$ și $D = pr_\alpha B$, aflați aria triunghiului CDP .



MINITEST 3

SUBIECTUL I

Încercuieți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(20 de puncte)

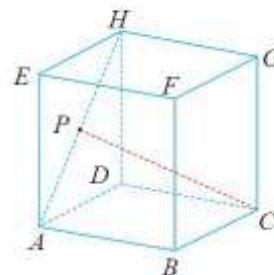
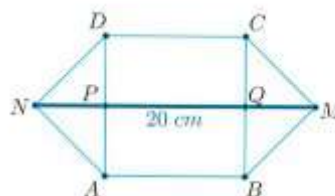
- 5p 1. Calculând $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8}}\right) : \frac{3}{\sqrt{18}}$, se obține:
- a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) 1 d) $2\sqrt{2}$
- 5p 2. Suma cifrelor numărului 10111213 ... 1819, este:
- a) 55 b) 105 c) 145 d) 155
- 5p 3. Adrian a plătit suma de 215 Euro cu 52 monede, unele de 2 Euro, altele de 5 Euro. Numărul monedelor de 2 Euro a fost:
- a) 14 b) 12 c) 10 d) 15
- 5p 4. Punctul $A(-3; 1)$ aparține reprezentării grafice a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{a \cdot x}{2} - 2$. Numărul a este:
- a) 1 b) 0 c) -2 d) -1

SUBIECTUL al II-lea

Încercuieți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(20 de puncte)

- 5p 1. Un trapez are înălțimea 10 cm și linia mijlocie de 9 cm. Aria trapezului este:
- a) 45 cm^2 b) 90 cm^2 c) 180 cm^2 d) 135 cm^2
- 5p 2. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele BCM și ADN , $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90^\circ$. Dacă $MN = 20 \text{ cm}$, atunci latura pătratului are:
- a) 15 cm b) 10 cm c) 12 cm d) 8 cm
- 5p 3. Fie $ABCDEFGH$ un cub și P centrul feței $ADHE$. Măsura unghiului $\sphericalangle(CP, AH)$ este:
- a) 45° b) 60° c) 90° d) 30°



- 5p 4. Un tub în formă de cilindru circular drept are lungimea 1,24 m și aria secțiunii axiale 1488 cm^2 . Diametrul tubului este:
- a) 8 cm b) 6 cm c) 10 cm d) 12 cm

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

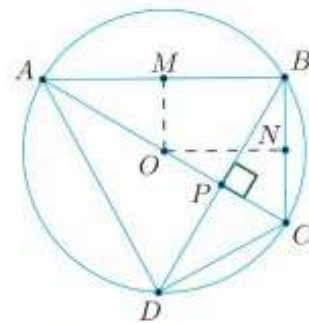
(50 de puncte)

1. Se consideră fracția $F(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x(x^2 - 1) - 3x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

- 10p a) Simplificați fracția $F(x)$.
 10p b) Determinați numerele reale a , pentru care $F(a) = 2$.

2. Punctele A, B, C aparțin cercului $\mathcal{C}(O, r)$, $B \in \widehat{AC}$,
 $\widehat{AB} + \widehat{BC} = 180^\circ$. Distanțele de la punctul O la coardele
 AB și AC sunt 3 cm, respectiv 4 cm.

- 10p a) Aflați raza cercului.
 5p b) Știind că dreapta care conține înălțimea din B a
 triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul în
 punctul D , calculați perimetrul patrulaterului $ABCD$.



3. Acoperișul unei case de vacanță are forma unei piramide patrulater regulate. Înălțimea acoperișului
 este de 3 m, iar o grindă a acoperișului (muchia laterală a piramidei) este de $3\sqrt{7}$ m.

- 10p a) Calculați măsura unghiului format de fețele laterale ale acoperișului cu baza acestuia.
 5p b) Aflați câți m^3 de aer se află în interiorul acoperișului.

MINITEST 4

SUBIECTUL I

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(20 de puncte)

- 5p 1. Media aritmetică a numerelor 6; $7 - 2\sqrt{3}$ și $\sqrt{12} - 1$, este:
 a) 4 b) 3 c) 3,3 d) 3,7
- 5p 2. Trei muncitori termină o lucrare în 8 zile. Patru muncitori ar termina aceeași lucrare în:
 a) 4 zile b) 6 zile c) 5 zile d) 10 zile
- 5p 3. La un turneu de șah participă 8 concurenți și fiecare joacă cu fiecare dintre ceilalți concurenți câte
 două partide. La acest turneu, numărul total de partide a fost:
 a) 40 b) 32 c) 48 d) 56
- 5p 4. Perechea de numere naturale $(a; b)$ pentru care are loc egalitatea $\frac{a+1}{3} = \frac{5}{b+13}$ este:
 a) (1; 15) b) (3; 5) c) (0; 2) d) (5; 3)

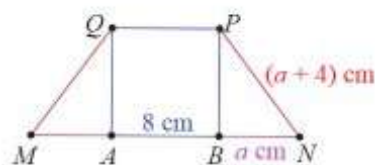
SUBIECTUL al II-lea

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(20 de puncte)

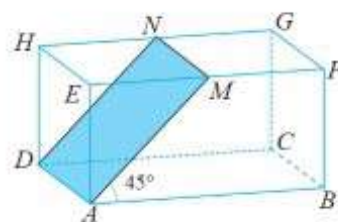
- 5p 1. Fie triunghiul ABC cu $AB = 12$ cm, $BC = 16$ cm, $CA = 20$ cm și BM este mediană a sa.
 Tangenta unghiului ABM este:
 a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{3}$

- 5p 2. Se prelungeste latura AB a patratului $ABPQ$ cu segmentele $AM = BN$. Dacă $AB = 8$ cm, $BN = a$ cm, $NP = (a + 4)$ cm, atunci perimetrul patrulaterului $MNPQ$ este:
- a) 48 cm b) 52 cm c) 72 cm d) 64 cm



- 5p 3. Un trunchi de piramidă regulată are muchiile bazelor 8 cm și 6 cm și înălțimea 4 cm. Înălțimea piramidei din care provine trunchiul este:
- a) 24 cm b) 12 cm c) 16 cm d) 18 cm

- 5p 4. $ABCDEFGH$ este un paralelipiped dreptunghic, $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm și M este mijlocul muchiei EF . Planele (ADM) și (ABC) formează un unghi diedru cu măsura 45° . Calculând aria totală a paralelipipedului se obține:
- a) 216 cm^2 b) 324 cm^2 c) 240 cm^2 d) 208 cm^2

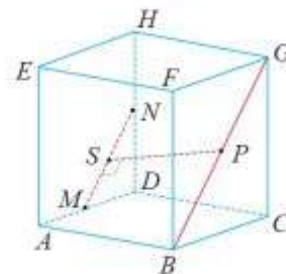
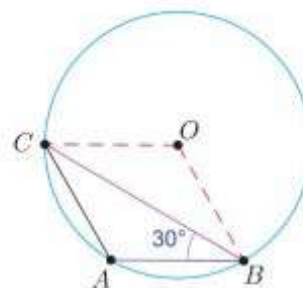


SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

(50 de puncte)

1. Fie numerele $x = 1^{-2} + 2^{-2} + 3^{-2}$ și $y = (1^{-3} + 2^{-3} + 3^{-3}) \cdot (42 - \frac{1}{6})$.
- 10p a) Arătați că $x \cdot y^{-1}$ este pătratul unui număr întreg.
- 10p b) Arătați că $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in (\frac{5}{4}; 2)$.
2. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 8\sqrt{3}$ cm, $BC = 24$ cm și $\angle ABC = 30^\circ$.
- 5p a) Aflați măsura unghiului BAC .
- 10p b) Calculați R , raza cercului circumscris triunghiului ABC .
3. $ABCDEFGH$ este un cub, $AB = 8$ cm, iar M, N sunt mijloacele muchiilor AD , respectiv DH .
- 5p a) Arătați că $MN \parallel BG$.
- 10p b) Calculați distanța de la centrul feței $BCGF$ la dreapta MN .



MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

TESTUL 1

SUBIECTUL I

Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $\sqrt{324} - \sqrt{(-2)^8}$ este:
 a) 4 b) 2 c) 0 d) 1
- 5p 2. Media geometrică a numerelor x și $4x$ este 18. Numărul x este egal cu:
 a) 9 b) 12 c) 8 d) 6
- 5p 3. Valorile numărului natural m pentru care numărul $2 - (\sqrt{2})^m$ este pozitiv formează mulțimea:
 a) $\{1, 2, 3\}$ b) $\{0, 1, 2\}$ c) \emptyset d) $\{0, 1\}$
- 5p 4. Dacă $a^{-1} = 2$ și $b^{-3} = -8$, atunci $a^{-3} + b^{-1}$ este:
 a) 4 b) -4 c) 6 d) -6
- 5p 5. Descompusă în factori, expresia $(m - 4)^2 - 25$ este:
 a) $(m - 2)(m - 5)$ b) $(m - 9)(m + 1)$ c) $(m - 5)(m + 5)$ d) $(m - 1)(m + 9)$
6. În reprezentarea alăturată este redat graficul deplasării unei mașini care transportă marfă la mai multe obiective, între orele 8 - 17, ale unei zile.



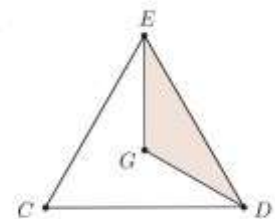
- Mașina a staționat timp de:
 a) 2 ore b) 4 ore c) 3 ore d) 1 oră

SUBIECTUL al II-lea

Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

- 5p 1. Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este $\frac{7}{2}$. Diferența unghiurilor este:
 a) 48° b) 50° c) 60° d) 40°
- 5p 2. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului echilateral CDE și $\mathcal{A}_{DEG} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
 Latura triunghiului CDE are lungimea:
 a) 18 cm b) 24 cm c) 12 cm d) $12\sqrt{3} \text{ cm}$

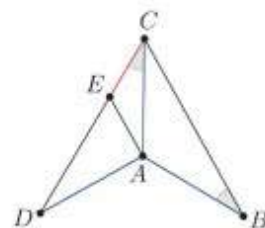


- 5p 3. Triunghiurile ABC și ACD sunt situate în același plan, au interioarele diferite și sunt congruente.

$$AB = AC = 4\sqrt{3} \text{ cm}, \angle ABC = 30^\circ, \text{ iar } AE \parallel BC, E \in CD.$$

Calculând lungimea segmentului EC se obține:

- a) 3 cm b) 5 cm c) 6 cm d) 4 cm



- 5p 4. În paralelogramul $AMBN$, $\angle MAN = (3x + 29)^\circ$, $\angle MBN = (5x - 17)^\circ$. Măsura unghiului AMB este:

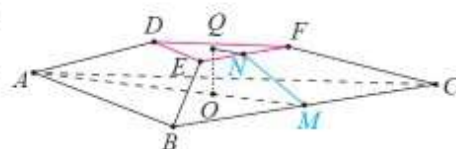
- a) 82° b) 72° c) 98° d) 108°

- 5p 5. În triunghiul $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 18$ cm. Calculând $\text{tg } \angle B + \text{tg } \angle C$ se obține:

- a) $\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

- 5p 6. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are muchiile bazelor de 18 cm și 6 cm, iar apotema trunchiului este 4 cm. Înălțimea trunchiului de piramidă este:

- a) 3 cm b) 2 cm c) $2\sqrt{3}$ cm d) $\sqrt{3}$ cm



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Numerele naturale m, n, p sunt direct proporționale cu numerele 2,4, respectiv 9.

- 2p a) Calculați raportul dintre numerele $m + n$ și p .

- 3p b) Știind că media aritmetică a celor trei numere este 60, aflați cel mai mare divizor comun al lor.

2. Fie numerele reale $x = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$ și $y = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$.

- 2p a) Calculați $x^2 - y^2 - \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{5} \cdot y$.

- 3p b) Arătați că $0 < \frac{1}{x+y} < 1$.

3. Se consideră expresia $E(x) = (x+1)(x+5)$, $x \in \mathbb{R}$.

- 2p a) Arătați că $E(x) + 4$ este pătratul unui număr real, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

- 3p b) Arătați că $E(x) + 5 > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

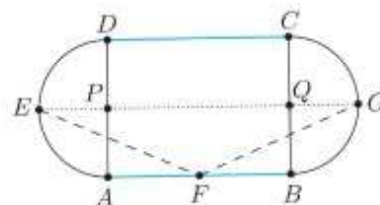
4. Suprafața unui patinoar este delimitată de un dreptunghi

$ABCD$ și semicercurile de diametre AD , respectiv BC .

Se știe că $AB = 80$ m, $BC = 60$ m, punctele E, G sunt mijloacele arcelor \widehat{AD} , \widehat{BC} , iar F este mijlocul segmentului AB .

- 2p a) Calculați suprafața patinoarului ($3,14 < \pi < 3,15$).

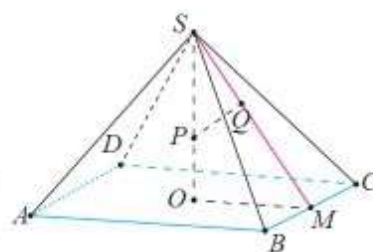
- 3p b) Un patinator parcurge traseul $EF - FG - GE$. Arătați că distanța parcursă de patinator este mai mică de 300 m.



5. Fie piramida patrulateră regulată $SABCD$, cu latura bazei $AB = 6$ dm și apotema piramidei 5 dm.

2p a) Arătați că aria laterală a piramidei este egală cu $0,6$ m².

3p b) Pe înălțimea SO a piramidei se află un punct P , egal depărtat de toate fețele piramidei. Calculați raportul $\frac{PO}{PS}$.



6. O cameră frigorifică în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile exterioare 4,4 m, 34 dam, 290 cm și pereții de grosime 20 cm.

2p a) Calculați volumul interior al camerei frigorifice.

3p b) Determinați aria totală a suprafețelor interioare ale camerei frigorifice.

TESTUL 2

SUBIECTUL I

Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

5p 1. Numărul cu $\frac{7}{20}$ mai mic decât 0,7 este:

- a) 0,4 b) 0,25 c) 0,35 d) 0,45

5p 2. Media geometrică a numerelor $3 - \sqrt{5}$ și $12 + \sqrt{80}$ este:

- a) 4 b) 3 c) $2\sqrt{5}$ d) $3\sqrt{5}$

5p 3. Dacă $x^2 - y^2 = 7$ și $x + y = -1$, atunci $x - y + 5$ are valoarea:

- a) 2 b) 1 c) -1 d) -2

5p 4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$. Punctul situat pe graficul funcției f și care are coordonatele egale, este:

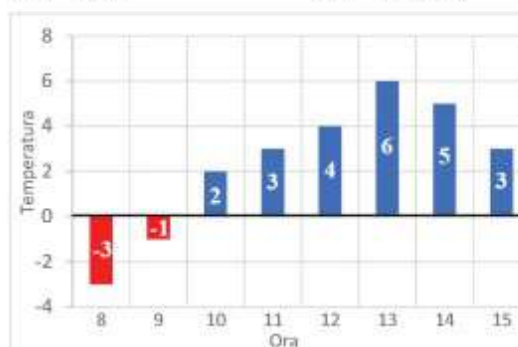
- a) $(-2; -2)$ b) $(-3; -3)$ c) $(2; 2)$ d) $(3; 3)$

5p 5. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 1, (3)\} \cap \mathbb{Z}$. Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea A este:

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{-1, 0, 1\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\{-2, -1, 0\}$

5p 6. În diagrama alăturată sunt prezentate valorile temperaturii indicate de un termometru, într-o zi, de la ora 8 până la ora 15. Măsurătorile au fost efectuate din oră în oră.

Conform diagramei, diferența dintre cea mai mare și cea mai mică temperatura înregistrată este:



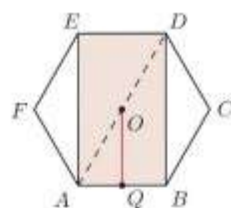
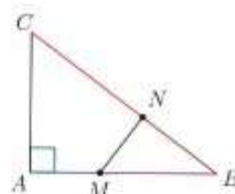
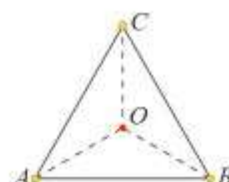
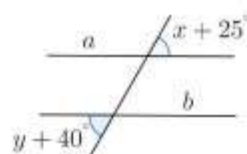
- a) 7 °C b) 8 °C c) 9 °C d) 6 °C

SUBIECTUL al II-lea

Încercuieți litera corespunzătoare răspunsului corect.

- 5p 1. În desen, dreptele a , b sunt paralele și c este o secantă a lor. Diferența $x - y$ este:
 a) 65° b) 25° c) 15° d) 40°
- 5p 2. Trei obiective turistice A , B , C se află la aceeași distanță unul față de altul, iar centrul de informare turistică se află în punctul O , la 300 m de fiecare dintre cele trei obiective. Traseul $A - B - C$ are lungimea:
 a) $300\sqrt{3}$ m b) $400\sqrt{3}$ m c) $500\sqrt{3}$ m d) $600\sqrt{3}$ m
- 5p 3. În trapezul isoscel $CDEF$, $CE \perp DE$, $CE = 40$ cm, $DE = 30$ cm. Aria trapezului este:
 a) 768 cm² b) 678 cm² c) 876 cm² d) 676 cm²
- 5p 4. Triunghiul ABC este dreptunghic, $M \in AB$, $N \in BC$, așa încât $AM = 3$ cm, $MB = 5$ cm, $BN = 4$ cm, $NC = 6$ cm. Măsura unghiului BNM este:
 a) 100° b) 90° c) 75° d) 60°
- 5p 5. $ABCDEF$ este un hexagon regulat și aria patrulaterului $ABDE$ este $36\sqrt{3}$ cm². Apotema hexagonului are lungimea:
 a) $\sqrt{3}$ cm b) $6\sqrt{2}$ cm c) $3\sqrt{3}$ cm d) $4\sqrt{2}$ cm
- 5p 6. Suma muchiiilor unui cub este 48 cm. Calculând aria laterală a cubului, se obține:
 a) 36 cm² b) 16 cm² c) 81 cm² d) 64 cm²

(30 de puncte)



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

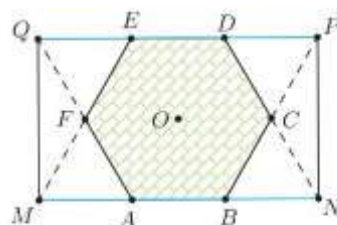
1. În trei depozite au fost 360 tone de fructe. Din primul depozit s-a vândut o cantitate de fructe, din al doilea cu 6 tone mai mult, iar din al treilea depozit s-a vândut o cantitate egală cu dublul cantității vândute din al doilea depozit. Se știe că, după vânzare, în fiecare depozit a rămas o cantitate de fructe egală cu cantitatea vândută în total din cele trei depozite.
- 2p a) Aflați cantitatea de fructe care s-a vândut din cele trei depozite.
- 3p b) Determinați cantitatea inițială de fructe din fiecare depozit.
2. Se consideră mulțimea $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^{-2} < \frac{1}{3x} < 3^{-1}\}$.
- 2p a) Scrieți mulțimea I ca interval.
- 3p b) Determinați valorile numărului întreg y pentru care $y\sqrt{2} \in I$.

3. Fie expresia $E(x) = \frac{x}{x-2} + \left(\frac{x-4}{x+2} - \frac{x}{x-2} \right) \cdot \frac{4x-4}{x+2}$.

2p a) Determinați mulțimea D_E , a valorilor reale ale numărului x pentru care expresia $E(x)$ este definită.

3p b) Arătați că $E(x)$ este un număr natural, oricare ar fi $x \in D_E$.

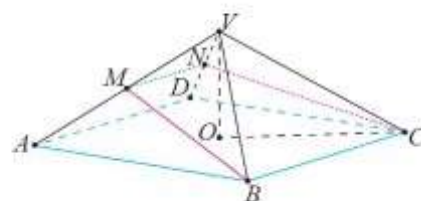
4. Un ring de dans are forma hexagonului regulat $ABCDEF$ și se află amplasat într-o sală dreptunghiulară $MNPQ$, astfel încât $A, B \in MN$, $D, E \in PQ$, $MN = 45$ m, iar $AQ \cap EM = \{F\}$, $BP \cap DN = \{C\}$.



2p a) Demonstrați că $MQ = 15\sqrt{3}$ m.

3p b) Determinați raportul dintre aria suprafeței ocupate de ringul de dans și aria suprafeței întregii săli.

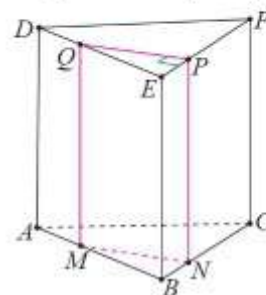
5. Acoperișul $VABCD$ al unei magazii are forma unei piramide patrulater regulate. Înălțimea acoperișului este 3 m, iar muchiile laterale au 6 m.



2p a) Calculați aria suprafeței $ABCD$.

3p b) Opritorul de zăpadă, amplasat pe fața VAD , are capetele în punctele M și N , mijloacele muchiilor VA , respectiv VD . Arătați că bărnele de susținere BM și CN sunt situate pe două drepte coplanare.

6. $ABCDEF$ este o prismă triunghiulară dreaptă cu toate muchiile egale cu 18 cm. Punctele M, N, P, Q sunt situate pe muchiile AB, BC, EF respectiv DE astfel încât $AM = BN = EP = DQ = 6$ cm.



2p a) Demonstrați că $(MNP) \perp (BCF)$.

3p b) Calculați aria patrulaterului $MNPQ$.

TESTUL 3

SUBIECTUL I

Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

5p 1. Calculând $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) - (-4)$, se obține:

- a) 10 b) 2 c) -2 d) 0

5p 2. Ana citește o carte în trei zile. În prima zi citește $\frac{3}{8}$ din numărul paginilor cărții, a doua zi citește $\frac{3}{5}$ din restul paginilor. Dacă, în total, cartea are 120 de pagini, Ana mai are de citit:

- a) 30 pagini b) 35 pagini c) 32 pagini d) 33 pagini

5p 3. În manualul de geografie, pe harta României, având scara 1:1 200 000, distanța Oradea – Brașov este 34,5 cm. Pe teren, distanța dintre cele două orașe este:

- a) 398 km b) 404 km c) 414 km d) 396 km

- 5p 4. Scădem 21 dintr-un număr și obținem sfertul aceluși număr. Numărul cu această proprietate este:
 a) 25 b) 28 c) 32 d) 24
- 5p 5. Mulțimea numerelor întregi x , pentru care $\frac{4}{2x-1}$ este întreg, conține:
 a) 6 elemente b) 4 elemente c) 3 elemente d) 2 elemente
- 5p 6. Elevii unei clase formează patru grupe și fiecare grupă parcurge un traseu, lungimile acestor trasee fiind date în tabelul următor:

Grupa I:	Grupa a II-a:	Grupa a III-a:	Grupa a IV-a:
2 km + 2 hm + 5 dam	1 km + 11 hm + 60 m	21 hm + 123 m	207 dam + 55 m

Conform tabelului, cel mai lung traseu este parcurs de:

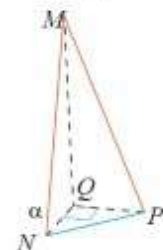
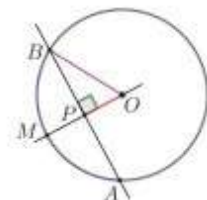
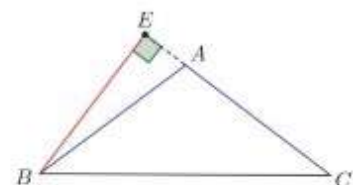
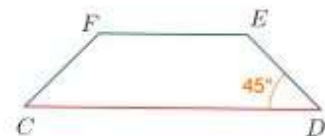
- a) grupa I b) grupa a II-a c) grupa a III-a d) grupa a IV-a

SUBIECTUL al II-lea

Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(30 de puncte)

- 5p 1. Un dreptunghi are perimetrul 56 cm și lungimea de 2,5 ori mai mare decât lățimea.
 Diagonala dreptunghiului are lungimea:
 a) $4\sqrt{30}$ cm b) $4\sqrt{31}$ cm c) $4\sqrt{33}$ cm d) $4\sqrt{29}$ cm
- 5p 2. În paralelogramul $ABCD$, $AB = 6$ cm, $AD = 10$ cm și aria paralelogramului este $30\sqrt{3}$ cm².
 Unghiurile ascuțite ale paralelogramului au măsura:
 a) 30° b) 60° c) 45° d) 75°
- 5p 3. Trapezul isoscel $CDEF$ are laturile neparalele $CF = DE = 10\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle CDE = 45^\circ$ și $EF = 20$ cm. Lungimea bazei mari a trapezului este:
 a) 40 cm; b) 36 cm c) $30\sqrt{2}$ cm d) $40\sqrt{2}$ cm
- 5p 4. În triunghiul ABC , $AB = AC = 25$ cm, $BC = 40$ cm.
 Calculând înălțimea BE a triunghiului, se obține:
 a) 18 cm b) 16 cm c) 24 cm d) 20 cm
- 5p 5. Arcul \widehat{AB} situat pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $r = 4$ cm, are măsura 120° .
 Distanța de la centrul cercului la dreapta AB este:
 a) $\sqrt{3}$ cm b) 2 cm c) $\sqrt{2}$ cm d) 3 cm
- 5p 6. Triunghiul MNP , $MN = MP = 6$ cm, $NP = 2\sqrt{2}$ cm, are latura NP situată în planul α , Q este proiecția punctului M pe planul α , iar $\sphericalangle NQP = 90^\circ$.
 Tangenta unghiului format de dreapta MP cu planul α este:
 a) $\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{2}$



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În două clasoare sunt 918 timbre. Dacă am muta din primul clasor în cel de-al doilea clasor 10% din timbre, atunci cele două clasoare ar conține același număr de timbre.

2p a) Aflați numărul timbrilor din fiecare clasor.

3p b) Determinați numărul timbrilor care trebuie mutate din primul clasor în cel de-al doilea pentru ca timbrele din cele două clasoare să fie exprimate prin numere direct proporționale cu 2 și 4.

2. Fie numărul $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)^2$.

2p a) Demonstrați că $a = \frac{8}{3}$.

3p b) Determinați cel mai mic număr natural nenul k , pentru care $a \cdot k$ este un cub perfect.

3. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x^2-1}\right) : \left(\frac{x-1}{x^2+x} - \frac{x+1}{x^2-x}\right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

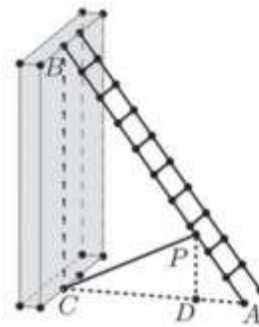
2p a) Efectuați calculele și toate simplificările posibile.

3p b) Demonstrați că $0 \leq E(x) < 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

4. O scară AB este sprijinită de peretele unui bloc la înălțimea $BC = 2,8$ m, iar distanța până la peretele blocului este $AC = 2,1$ m.

2p a) Calculați lungimea scării.

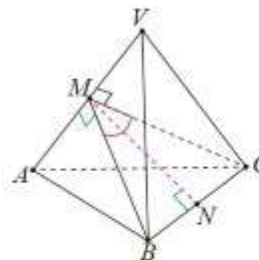
3p b) Scara se asigură cu o tijă PC , $P \in AB$, distanța de la punctul P la sol fiind 0,8 m. Aflați lungimea tijei PC .



5. $VABC$ este un tetraedru regulat cu muchia 6 dm, iar M este mijlocul muchiei VA .

2p a) Calculați distanța de la punctul M la dreapta BC .

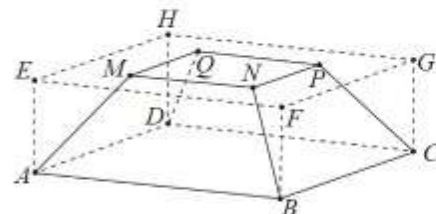
3p b) Arătați că sinusul unghiului format de două fețe ale tetraedrului este $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



6. O piesă metalică are forma unei prisme patrulater regulate $ABCDEFGH$, cu dimensiunile $AB = BC = 48$ cm, $AE = 16$ cm. Se elimină o parte din material și se obține un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu baza mare $ABCD$, baza mică $MNPQ$, $MN = \frac{AB}{2}$ și înălțimea egală cu înălțimea piesei inițiale.

2p a) Calculați volumul de material care s-a îndepărtat.

3p b) Aflați aria suprafeței totale a piesei obținute.



INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

1. MULȚIMI. NUMERE

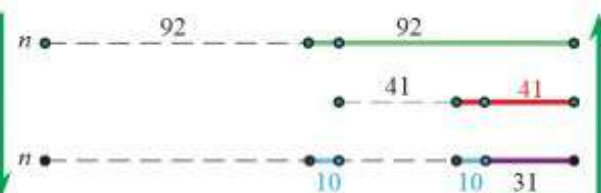
1.1. Mulțimi

- I.** 1.1. (c); 1.2. (a); 1.3. (b). 2.1. (c); 2.2. (a); 2.3. (b) 2.4. (a). 3. (c). 4. (a). 5.1. (c); 5.2. (b); 5.3. (b). 6.1. (c); 6.2. (d). 7.1. (a); 7.2. (c); 7.3. (c). 8. (c); 9. (b); 10. (b); 11. (d).
- II.** 1. a) 4; b) 3; c) $A = \{10; 50\}$; d) $B = \{10; 15\}$. 2. a) $A = \{1; 2; 3; 6; 8; 9\}$; $B = \{2; 3; 13; 17\}$; $C = \{2; 6; 8; 10\}$. b) $A \cup B = \{1; 2; 3; 6; 8; 9; 13; 17\}$; b₂) $B \cup C = \{2; 3; 6; 8; 10; 13; 17\}$; b₃) $A \cup C = \{1; 2; 3; 6; 8; 9; 10\}$; b₄) $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 6; 8; 9; 10; 13; 17\}$; b₅) $A \cap B = \{2; 3\}$; b₆) $A \cap C = \{2; 6; 8\}$; b₇) $B \cap C = \{2\}$; b₈) $A \cap B \cap C = \{2\}$; b₉) $A \setminus B = \{1; 9; 6; 8\}$; b₁₀) $C \setminus A = \{10\}$; b₁₁) $A \setminus (B \cup C) = \{1; 9\}$; b₁₂) $A \setminus (B \cap C) = \{1; 9; 3; 6; 8\}$. c) Mulțimea C; d) Mulțimea B.
- III.** 1. a) $A = \{0; 1; 4\}$; b) $B = \{0; 1; 16; 256\}$. 2. $\{3; 5\}$; $\{3; 5; 1\}$; $\{3; 5; 7\}$; $\{3; 5; 1; 7\}$. 3. $\{2\}$ și $\{3; 5\}$ sau $\{3\}$ și $\{2; 5\}$ sau $\{5\}$ și $\{2; 3\}$. 4. $\{2; 3\}$ și $\{2; 5\}$ sau $\{2; 3\}$ și $\{3; 5\}$ sau $\{2; 5\}$ și $\{3; 5\}$. 5. a) $A = \{5; 10; 15; 30\}$; $B = \{1; 3; 5; 15; 25\}$; $C = \{1; 2; 5; 0\}$; b) card $A = 4$; card $B = 5$; card $C = 4$. c) $E = \{6; 7; 10; 5; 11; 12; 15; 16; 17; 20; 31; 32; 35; 30\}$. 6. a) $x = 5$; b) $x \in \{3; 5; 7\}$; c) $x \in \mathbb{N} \setminus \{3; 5\}$; d) $x = 7$ și $y = 1$. 7. $A = (-2; 7)$; $B = (5; \infty)$. 8. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 7\}$. 9. a) $A \cup B = (-2; \infty)$; b) $B \cup C = (-1; \infty)$; c) $A \cup C = (-2; 7]$; d) $A \cup B \cup C = (-2; \infty)$; e) $A \cap B = (5; 7)$; f) $A \cap C = (-1; 7)$; $B \cap C = (5; 7]$; g) $A \cap B \cap C = (5; 7)$.
10. $x \in M$ dacă și numai dacă $-\frac{2}{6} < \frac{x+1}{6} < \frac{3}{6}$ și $x \in \mathbb{Z}$, adică $x+1 \in \{-1; 0; 1; 2\}$, deci $M = \{-2; -1; 0; 1\}$.
Cum $P \cap \mathbb{Z} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, rezultă $M \cap P = \{1\}$.

1.2. Mulțimea numerelor naturale

A Operații cu numere naturale

- I.** 1.1. (d); 1.2. (b); 1.3. (a); 2.1. (a); 2.2. (b); 2.3. (a); 2.4. (b).
- II.** 1. 15; 2. 8; 3. 11; 4. 34; 5. 5; 6. 87;
- III.** 1. 633; 2. Cel mai mic număr natural de patru cifre diferite este 1023, iar cel mai mare număr natural de două cifre este 99. Atunci avem: $1023 = 99 \cdot 10 + 33$, deci restul cerut este 33; 3. Fie a deîmpărțitul. Atunci, $a = 5541$, deci $a - 45 = 5496$; 4. a) $x = 4$; b) $x = 6$; c) $x = 10$; d) $x = -\frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$; 5. $z = 531 - 135 = 396$;
6. $S = 90:5 = 18$ lei; 7. $5x - 5 = 21 - 3y \Rightarrow 5(x - 1) = 3(7 - y)$; Atunci, x este de forma $3k + 1$ și $x < 6$. Obținem $(x, y) = (1, 7)$ sau $(x, y) = (4, 2)$. 8. Între $n + 5$ și $n + 14$ sunt exact 8 numere naturale consecutive. Prin împărțire la 8, acestea vor da resturi distincte și $s = 0 + 1 + \dots + 7 = 28$; 9. Termenii șirului au forma $6k + 1$. Din $6k + 1 < 100$, rezultă $k < 17$. Cel mai mare este $6 \cdot 16 + 1 = 97$; 10. Fie x numărul căutat. $3x + \frac{x}{2} = 686$ și $x = 196$; 11. Se obține $L = 48$ cm, $l = 20$ cm; $d = 52$, număr natural; 12. 165; 13. 5 pixuri costă 10 lei, deci un pix costă 2 lei. Atunci, 5 caiete costă 20 lei, deci un caiet costă 4 lei; 14. Fie p prețul unui penar și s prețul unui stilou. Obținem $p = 7$ lei și $s = 23$ lei; 15. 17 m; 16. Fie x numărul autoturismelor. Atunci, $35 - x$ este numărul motocicletelor. Obținem $4x + 2(35 - x) = 100$, apoi $x = 15$. Sunt 15 autoturisme și 20 de motociclete; 17. Cu metoda mersului invers: (1): 31 de bilete au rămas după ce ambele școli au cumpărat. Deducem că $31 + 10 = 41$ reprezintă jumătate



din restul de la prima școală. (2): Atunci, 82 de bilete reprezintă restul rămas de la aceasta. Obținem $82 + 10 = 92$, jumătate din numărul total al biletelor.

(3): În concluzie, au fost 184 de bilete. Prima școală cumpără 102 bilete, iar a doua cumpără 51 de bilete.

18. Metoda 1. Cu ajutorul ecuației $4x + 3(24 - x) = 90$, unde x este numărul apartamentelor cu 4 camere; **Metoda 2.** (a falsei ipoteze). Dacă toate cele 24 apartamente ar avea 3 camere, ar rezulta 72 camere. Restul

de 18 camere completează apartamentele de 4 camere. Vor fi 18 apartamente cu 4 camere și 6 cu 3 camere.

19. Suma celor mai mici 10 numere naturale distincte este $0 + 1 + \dots + 9 = 45$, care este mai mare decât 44, deci cel puțin 2 numere sunt egale; **20.** Presupunând că toate sunt mai mici sau egale cu 250, suma ar fi mai mică decât 1001, contradicție. În concluzie, presupunerea este falsă și cel puțin unul este mai mare decât 250;

21. Pentru x cantitate de caise vândută cu 10 lei/kg, avem $7(250 - x) + 10x = 2047$ și obținem $x = 99$ (kg).

B Divizibilitate

I. 1.1. (b); **1.2.** (d); **1.3.** (c); **1.4.** (d). **2.** (a); **3.** (c); **4.** (b); **5.** (d); **6.** (a); **7.** (c); **8.** (c); **9.** (a).

II. 1. $\{1, 3, 29, 87\}$; **2.** $\{20, 40, 60, 80\}$; **3.** 12; **4.** $a \in \{2, 4, 6, 8\}$; **5.** $a \in \{0, 4, 8\}$; **6.** $\overline{52a}$ divizibil cu 4, deci $a \in \{0, 4, 8\}$ și $\overline{aa4} \in \{444, 884\}$. **7.** $x - 7 = [8, 12, 18] = 72$, $x = 79$. **8. a)** $(216, 72) = 72$; **b)** $[216, 72] = 216$; **c)** $[39, 52, 65] = 780$; **d)** $(39, 52, 65) = 13$.

III. 1. Numerele sunt 49 și 50. **2.** $p_1: (5 \cdot 486) : 5, (65 \cdot 3^7) : 5$, deci $s : 5$. $p_2: (14 \cdot (n + 1)) : 7, (35 \cdot m) : 7,$

$112 : 7$, deci $t : 7$. **3.** $[12, 15, 8] = 120; (36, 48) = 12; 120 - 12 = 108$. **4. a)** $[x; y] = [2^{18} \cdot 3^9; 3^{24}] = 2^{18} \cdot 3^{24};$

$(x; y) = (2^{18} \cdot 3^9; 3^{24}) = 3^9$. **b)** $[x; y] = [2^{24} \cdot 3^{12}; 3^{18}] = 2^{24} \cdot 3^{18}; (x; y) = (2^{24} \cdot 3^{12}; 3^{18}) = 3^{12}$.

5. $p = 2^{n+3} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+2} - 6^{n+1} = 8 \cdot 6^n + 9 \cdot 6^n - 6 \cdot 6^n = 6^n \cdot 11$, deci $p : 11$. **6. a)** Se analizează $n(n + 1)$

pentru cazurile $n = 2k$ și $n = 2k + 1$. **b)** $n^2 + m^2 + n - m + 444 = n(n + 1) + m(m - 1) + 444$ și folosim a).

c) $101^4 + 101^3 + 1234 = 101^3(101 + 1) + 1234 = 2(51 \cdot 101^3 + 617)$. **8. a)** Se analizează $n(n + 1)(n + 2)$ pentru

cazurile $n = 3k, n = 3k + 1$ și $n = 3k + 2$; **b)** $(n^2 + n) \cdot (n + 2) = n(n + 1)(n + 2)$, divizibil cu 6;

$(m + 3) \cdot (m + 4) \cdot (m + 5)$ este produs de trei numere consecutive, deci este divizibil cu 6; Suma lor este

divizibilă cu 6. **c)** $(301^2 + 301) \cdot 303 = 301 \cdot 302 \cdot 303$ și se aplică a). **9. a)** $\overline{ab}(a + b) = 730$. Se obține $\overline{ab} = 73$.

b) $\overline{abc} - (a + b + c) = 477 \Rightarrow 9(11a + b) = 9 \cdot 53$. Se obține $a = 4, b = 9$ și luăm valoarea cea mai mare

pentru c , deci $\overline{abc} = 499$. **10.** $2a + 3b = 180$ și $(a, b) = 12 \Rightarrow 24k + 36p = 180$, cu $(k, p) = 1$, deci $k = 6, p = 1$,

apoi $a = 72$ și $b = 12$. **11. a)** Din cele 3 condiții rezultă $\overline{abc} = \overline{ab6}$ cu $a = 1$ sau $a = 2$ și $(a + b + 6) : 7$.

Găsim $\overline{abc} = 106$ sau $\overline{abc} = 266$. **12.** Dacă n și $n + 1$ nu sunt divizibile cu 3, atunci $(n + 2) : 3$.

Avem $5n + 10 = 3n + 2(n + 2) + 6$, cu cei 3 termeni divizibili cu 3, deci suma $(5n + 10)$ este divizibilă cu 3.

13. Din $304 = 2^4 \cdot 19$, cele 2 numere de două cifre sunt: 16 și 19.

1.3. Mulțimea numerelor întregi

I. 1. (d); **2.** (b); **3.** (a); **4.** (b); **5.** (b); **6.** (b); **7.** (a); **8.** (b); **9.** (a); **10.** (a); **11.** (b); **12.** (b).

II. 1. a) $\{2; -1; -4; -8; 0\}$; **b)** $\{2\}$; **c)** $\{-1; -4; -8\}$; **d)** $\left\{\frac{14}{15}; 1, 34\right\}$. **2.** $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; **3. a)** $x_A = -5;$
b) $x_B = 2;$ **c)** $x_C = -1;$ **d)** $x_D = -4;$ **e)** $x_E = 3$.

III. 2. $A \setminus B = \{-5; -4; -3; \dots; 0; 1; 2; 3\} \setminus \{-3; -2; -1\} = \{-5; -4; 0; 1; 2; 3\}$. **3.** $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}; B = \{-5;$

$-4; -3; -2; -1\}; A \cup B = \{-5; -4; -3; \dots; 0; 1; 2\}; A \cap B = \{-2; -1\}; A \setminus B = \{0; 1; 2\}; B \setminus A = \{-5; -4; -3\}$.

4. 7, $|-6|$; **5.** 0; **6.** -4; **7.** -11; **8.** -32. **5. a)** -1; **b)** 2; **c)** -5; **d)** 5; **e)** 6; **f)** -4; **g)** 0; **h)** 7; **i)** 7; **j)** -2; **k)** 1; **l)** 21.

6. $M = \{-3; 9; -8; 4; 1; 0; -1; -5\}; A = \{9; 4; 1; 0\}; B = \{-3; -8; 0; -1; -5\}; C = \{-9; 9; -4; 4; -1; 1; 0\}$.

7. $-2^{33} = (-2)^{33}$ (33 este impar). 8. $n = -15$ și $m = 16$, $n + m = 1 > 0$. 9. $(2a - 1) | 7 \Rightarrow 2a - 1 \in \{-1; 1; -7; 7\}$, deci $a \in \{0; 1; -3; 4\}$. 10. a) $(2x + 1) | 5 \Rightarrow 2x + 1 \in \{-1; 1; -5; 5\}$, deci $A = \{-1; 0; -3; 2\}$. b) $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, cu suma elementelor -0 . c) $A \cap B = \{-1; 0; -3; 2\}$. 11. $x = -32$; $y = -6$ și $z = -7$. a) $2x - 3y + 4z = -74$; b) $2xz + 10yz - 5^3 = -97$; c) $x(y + z) + z(y - x) = 234$. 12. a) $x \cdot y + x \cdot z = x(y + z) = 210$. b) $-7(n - m) = 504 \Rightarrow m - n = -72$. 13. a) Termenii șirului vor fi: $0, \pm 1; \pm 2; \dots \pm n$, la care se adaugă cei trei termeni negativi: $-(n + 1), -(n + 2)$ și $-(n + 3)$, a căror sumă este $-3n - 6 = -24$, deci $n = 6$. Numărul total al termenilor este $2 \cdot 6 + 1 + 3 = 16$. b) Cel mai mic termen al șirului este $-(6 + 3) = -9$. Cel mai mare termen al șirului este 6 . 14. a) $S = \{-6; -2\}$; b) $S = \{-2; 9\}$; c) $S = \{(1; -2)\}$. 15. Dacă n este par, atunci $A = 3 + 5 - 7 = 1$, iar dacă n este impar, atunci $A = 3 + 5 + 7 = 15$.

1.4. Mulțimea numerelor raționale

A Frații ordinare: fracții subunitare, echiunitare, supraunitare; procente; fracții echivalente

I. 1. (c); 2. (b); 3. (b); 4. (a);

II. 1. 3. 2. $\frac{4}{24} < \frac{3n}{24} < \frac{14}{24} \Leftrightarrow 4 < 3n < 14$, deci $n \in \{2; 3; 4\}$. 3. 200 kg. 4. $a = 224$.

5. $\frac{2n+3}{n+1} = \frac{2n+2}{n+1} + \frac{1}{n+1}$ și $\frac{2n+2}{n+1} + \frac{1}{n+1} < \frac{2(n+1)}{n+1} + 1 = 3$, deci $\frac{2n+3}{n+1} < 3$. Numerele sunt: 0, 1, 2.

6. $\frac{245}{441} = \frac{5}{9}$. 7. $31_{(4)} = 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = 13$; $11_{(2)} = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$; $240_{(5)} = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 70$;

$143_{(6)} = 1 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 63$. 8. $\frac{31_{(4)}}{11_{(2)}} + \frac{240_{(5)}}{143_{(6)}} = \frac{13}{3} + \frac{70}{63} = \frac{49}{9}$.

III. 1. Cea mai mică este $\frac{22}{55} = \frac{2}{5}$ și cea mai mare este $\frac{3}{2}$. 2. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{70}{210} < \frac{6n}{210} < \frac{105}{210}\}$, deci $A = \{12; 13; 14; 15;$

$16; 17\}$. 3. $\frac{1}{20} < \frac{a}{10} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < 2a < 10$, apoi $a \in \{1, 2, 3, 4\}$. Frațiile cerute sunt: $\frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{3}{10}; \frac{4}{10}$ cu suma 1.

4. a) $n+1) 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$; $\frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$;

$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ și $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$. Cum $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, rezultă $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}$. 5. $\frac{a}{b} = \frac{11}{3}$.

6. $a = \frac{11}{4}$, $b = \frac{11}{6}$ și $E = \frac{7}{48} + (a - b)^2 = \frac{71}{72}$. 7. Din $a \cdot b = \frac{3}{7}$ și $c = \frac{14}{15}$ rezultă $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c =$

$= \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{15} = \frac{2}{5}$. 8. Dacă $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{19}{20}$ și $B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{20}{21}$, atunci

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot A \cdot B = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{20}{21} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{21} = 5$. 9. $[7; 15; 21] = 105$.

10. $m \in \{2, 6\}$. 11. $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} = \frac{6}{13}$, $B = \frac{3}{4} \cdot \frac{120}{390} = \frac{3}{13}$. Atunci $A^{-1} + B^{-1} = \frac{13}{6} + \frac{13}{3} = \frac{13}{2}$. 12. $a = \frac{11}{3}$;

$b = 2$; $c = \frac{16}{9}$; $d = 11$. a) $\{a, b, c, d\} \cap \mathbb{N} = \{b, d\} = \{2, 11\}$. b) $c < b < a < d$; c) $(a + c) \cdot (d - b) = 49 = 7^2$.

13. $\frac{a}{3} < \frac{5}{6} < \frac{b}{9}$, unde a și b sunt cifre nenule, deci $\frac{6a}{18} < \frac{15}{18} < \frac{2b}{18}$. Obținem $\overline{ab} \in \{18, 19, 28, 29\}$.

14. Fie a, r, v numărul creioanelor albastre, roșii respectiv verzi. Atunci, $a + r + v \leq 50$, $r = \frac{8}{15} \cdot a$, iar

$a = \frac{3}{4} \cdot v$, deci $r = \frac{2}{5} \cdot v$, apoi $\frac{3}{4} \cdot v + \frac{2}{5} \cdot v + v \leq 50$, cu v număr natural nenul, deci $v = 20$.

B Frații zecimale

I. 1. (a); 2. (b); 3. (d); 4. (b).

II. 1. $L = 4,3$ cm; 2. 616,6 litri; 3. $S = 0,2$ ha; 4. $V_1 = 75$ (km/h) = $75 \cdot \frac{1000}{3600}$ (m/s) = $\frac{125}{6}$ (m/s)

Cum $\frac{125}{6} < \frac{150}{6} = 25$, rezultă $V_1 < V_2$.

III. 1. $a = 14,55$ și $b = 1,2$, deci $b < a$. 2. a) $A = 1 \in \mathbb{N}$; b) $B = 0,1(3)$, apoi $A \cdot B \cdot C = \frac{2}{15} \cdot C$.

Produsul este pătrat perfect dacă C are forma $C = 15 \cdot 2 \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N}$, cel mai mic fiind pentru $k = 1$, deci $C = 30$.

3. $x = 17,18$ cu suma zecimalelor egală cu 9. 4. $x = 19,1$. 5. Obținem $7x + y = 8 \cdot 1,125$ cu x și y numere naturale nenule, deci $x = 1$ și $y = 2$. 6. 1723,25 lei. 7. Fie x numărul ales. Se formează ecuația $[(x - 4,5) \cdot 5 + 4,8] : 0,5 = 100$, cu soluția $x = 13,54$. 8. Cele 3 numere sunt: 3,3; 2,61; 0,87. 9. $\overline{ab} \in \{94, 85, 76\}$. 10. $A = 916, (6)$.

11. a) $\overline{a}, \overline{a+a}, \overline{aa+a}, \overline{aaa+a} = 26,568$ pentru $a = 8$; b) $\overline{a}, \overline{b+0}, \overline{ab} = 1,98 \Leftrightarrow \overline{ab0} + \overline{ab} = 198 \Leftrightarrow 11 \cdot \overline{ab} = 11 \cdot 18$, deci $\overline{ab} = 18$. 12. Fie x lungimea traseului. Atunci, $\frac{2}{3} \cdot x = 1280 + 960 = 2240$ (dam) și $x = 3360$ dam = 33,6 km.

13. Cei 41 stâlpi, la distanță de 2,5 m unul de altul determină 20 de intervale a câte 2,5 m, dispuse simetric pe cele două laturi congruente. Obținem laturile de 50 m, 50 m, 85 m. 14. Avem 450 comprimate, cântărind 3600 g și 15 tuburi, cântărind 187,5 g. Cutia goală va cântări $4025 - (3600 + 187,5) = 237,5$ g.

15. Considerând a și $a + 1$ cele două numere, avem $\frac{a}{10} + \frac{a+1}{10} = 2,3$ și obținem $a = 7$, $a + 1 = 8$.

C Numere raționale

I. 1. a); 2. b); 3. b). 4. b).

II. 1. a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{73}{11}$; c) $\frac{2}{9}$; d) $\frac{2}{9}$. 2. $-\frac{5}{8}$; 3. -3 . 4. $\left\{\frac{375}{275}; 0,2\right\}$

III. 1. $x = -7,925$; $y = 0,25$; $z = -1,41(6)$. a) $x < z < y$; b) $\{x, z\}$. 2. a) 75 km; b) 202,5 km.

3. $\left[\frac{15}{4}\right] = 3$; $\left\{\frac{15}{4}\right\} = 0,75$, produsul este 2,25.

4. a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = \frac{4}{25} + \frac{7}{15} = \frac{47}{75}$. b) $(b - a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c = -0,(7) - \frac{5}{12} = -\frac{43}{36}$.

5. a) $n < \frac{23}{4} < n + 1 \Leftrightarrow 4n < 23 < 4(n + 1)$ de unde $n = 5$. b) $m < -\frac{123}{824} < m + 1$ și $m \in \mathbb{Z}$, rezultă $m = -1$.

6. a) $\frac{2p+11}{3p+4}$ este subunitară dacă $2p + 11 < 3p + 4$, deci $p \in \{8, 9, \dots\}$. b) $\frac{2p+11}{3p+4}$ este echiunitară dacă

$p = 7$; c) $\frac{2p+11}{3p+4}$ este supraunitară dacă $p \in \{0, 1, \dots, 6\}$. 7. Dacă n este par ($n = 2k$), atunci $a = \frac{2n-1+5 \cdot (-1)^n}{4}$

$= \frac{4(k+1)}{4} = k + 1 \in \mathbb{Z}$. Dacă n este impar ($n = 2k + 1$), atunci $a = \frac{2n-1+5 \cdot (-1)^n}{4} = \frac{4(k-1)}{4} = k - 1 \in \mathbb{Z}$.

8. a) $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$; $A = \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} < 2$ și $B = \frac{a+2}{a+1} = 1 + \frac{1}{a+1} < 2$. Evident $A > 1$ și $B > 1$, deci $[A] = [B] = 1$.

b) $A - B = \frac{a+1}{a} - \frac{a+2}{a+1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)} < 1$, oricare ar fi numărul natural a .

c) $1 < B < A < 2$. 9. 3843 lei. 10. 7% din cantitatea inițială. 11. $(a - 3)(b + 2) = 5$ conduce la posibilitățile;

$(a, b) \in \{(4, 3); (2, -7); (8, -1); (-2, -3)\}$. 12. **a)** $S = \left\{ \frac{1}{6} \right\}$; **b)** $S = \left\{ \frac{47}{6} \right\}$; **c)** $S = \mathbb{Q}$.

13. Din $x < 0 < y$, $x_2 = \frac{4}{9}$ și $y^2 = \frac{81}{196}$ rezultă $x = -\frac{2}{3}$ și $y = \frac{9}{14}$. Obținem $-7xy = 3$, care este număr prim.

14. $a + b + c = 2$, iar $d + e = 9$. Media aritmetică a numerelor a, b, c, d, e este $\frac{11}{5}$. 15. Fie b numărul băieților și f numărul fetelor. Atunci, $b = \frac{5}{6}f$ și $f - 2 = b$, de unde $f = 12$ și $b = 10$.

1.5. Mulțimea numerelor reale

- I.** 1. (a); 2. (b); 3.1. (a); 3.2. (a); 3.3. (b); 3.4. (a); 3.5. (b); 3.6. (a); 3.7. (b); 3.8. (b); 3.9. (b); 3.10. (a); 4.1. (a); 4.2. (b); 4.3. (d); 4.4. (c); 4.5. (b).
- II.** 1. 9; 2. 0,5; 3. -6; 4. 2,1; 5. 29; 6. $5 - 2\sqrt{6}$; 7. $-ab^3$; 8. $x = 3$; 9. $x = 6$; 10. $x = -5$; 11. 2; 12. $\sqrt{10}$; 13. 6; 14. $-x$.
- III.** 1. **a)** $A = \{0, 10\}$; **b)** $B = \{-6; -\sqrt{25}; 0; 10\}$; **c)** $C = \{-6; -\frac{3}{4}; -\sqrt{25}; 0; 1,36; 10\}$; **d)** $D = \{-\sqrt{3}\}$; **e)** $M \cap \mathbb{Z}_- = \{-6; -\sqrt{25}\}$. 2. $A(-\sqrt{2})$, $B(-1)$, $C(\frac{3}{2})$, $D(\sqrt{3})$. **b)** $AB = \sqrt{2} - 1$, $CD = \sqrt{3} - 1,5$. $AB > CD$. 3.a) $9\sqrt{3}$; **b)** $\sqrt{2}$; **c)** $-4\sqrt{2}$; **d)** 10. 4.a) $3,245 < \frac{13}{4}$; **b)** $\sqrt{356} > 18$; **c)** $-4\sqrt{3} > -7$; **d)** $5\sqrt{2} < 2\sqrt{13}$; **e)** $3 - \sqrt{72} > \sqrt{9} - 5\sqrt{3}$. 5. **a)** $2\sqrt{3}$; **b)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$; **c)** $2\sqrt{2}$; **d)** $-\sqrt{7}$. 6. $\sqrt{\frac{30}{11}} \cdot a = \sqrt{\frac{30}{11} \cdot \frac{7}{6}} = \sqrt{\frac{35}{11}}$. 7. $a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{6}$, $b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{6}$ și $\frac{1}{a} \cdot (a + b) = \frac{6}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 4 + 2\sqrt{2}$.

2. ALGEBRĂ

2.1. Calcul algebric

- I.** 1. (a); 2. (c); 3. (d); 4. (b); 5.1. (c); 5.2. (a); 5.3. (c).
- II.** 1. **a)** 0; **b)** $9x - 5$; **c)** $x + 10y$; **d)** $-2a - 2b - 2c$; **e)** $-0,8x$; **f)** 0; 2. $E(\frac{1}{\sqrt{5}}) = -5,96$. 3. **a)** $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$. **b)** $a^4 + \frac{1}{a^4} = 47$. 4. $b + \frac{1}{b} = \frac{5}{2}$. 5. **a)** $E(x)$ are sens pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; **b)** $F(x)$ nu este definită pentru $x = -3$; **c)** $E(-2) + F(-1) = -1 + 1,5 = 0,5$. 6. **a)** $\frac{5x}{2x - x^2}$; **b)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$; 7. $\frac{x-10}{x^2}$; 8. $\frac{x^2+3}{x(x^2-9)}$; 9. $\frac{x-1}{x^2-4}$; 10. $\frac{1-3x}{x-1}$.
- III.** 1. **a)** $9x + 3$; **b)** $-8x^2 + 19x$; **c)** $\frac{2}{9}u - \frac{1}{4}v$; **d)** $-13x^2$; **e)** $\frac{x^2}{2}$; **f)** $2x^2 + 2x - 2$; **g)** $-4x - 5$; **h)** $4x^2$. 2. **a)** $-x - 11$; **b)** $-x^2 - 11x$; **c)** 1; **d)** $-x + 0,5$; **e)** $-3x + 5$. 3. **a)** $-3\sqrt{2}xy^2$; **b)** $1,9(6)xy$; **c)** xy^3 . 4. **a)** $3x^2 + x - 10$; **b)** $-2x^2 + 17x - 35$; **c)** $x^3 + 1$; **d)** x . 5. **a)** $x^2 + 4x + 4$; $x^2 - 4x + 4$; $4x^2 + 20x + 25$; $9x^2 - 48x + 64$; $x^2 - 25$; $4x^2 - 49$; **b)** $2x^2 - 5$; **c)** $12x^2 + 12x + 39$; **d)** $37x - 81$. 6. **a)** $-x^2 - 2$; **b)** $4\sqrt{3}x + 25$. 7. **a)** $E(-1) + 2 \cdot E(0) = 174$. **b)** Prin calcul, $E(x) = 58$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. 8. $E(n) = 196$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. $\sqrt{E(n)} = 14 \in \mathbb{Q}$. 9. **a)** $(x - 7)^2$; **b)** $(xy + 2)^2$; **c)** $(2x - 3y)^2$; **d)** $(\sqrt{5}x + 1)^2$. 10. 10.1. **a)** $(x - 6)(x + 6)$; **b)** $(2y - 9)(2y + 9)$; **c)** $(3z - 10)(3z + 10)$. 10.2. **a)** $3(x - 1)^2$; **b)** $5(2xy + 3)^2$; **c)** $-(2x - 1)^2$. 10.3. **a)** $(x + 2)(x^2 + 1)$; **b)** $(n - 5)(n - 2)(n + 2)$; **c)** $(a + 3)(ab + 3)$. 10.4. **a)** $(x - 2)(x - 1)$; **b)** $(p + 1)(p - 5)$; **c)** $(q + 1)(q - 11)$. 10.5. **a)** $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$; **b)** $(2y + 4\sqrt{3})(2y - 2\sqrt{3}) = 4(y + 2\sqrt{3})(y - \sqrt{3})$; **c)** $(w - 3)^2$.