PETRE NĂCHILĂ CĂTĂLIN-EUGEN NĂCHILĂ

MATEMATICĂ
CLASA a VIII-a

- **Formule**
- **Exerciții recapitulative**
- **Modele de teste cu rezolvări pentru Evaluarea Națională**

Editura NOMINA

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele școlare în vigoare.

Editor: Alexandru Creangă
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu

Pentru comenzi prin poștă: 0757.020.442
0348.439.417

Telefon	**Zona**
0741.488.918	Oltenia (Dolj, Gorj și Mehedinți), Banat și Transilvania (Alba și Hunedoara);
0748.111.247	Crișana și Transilvania (Sălaj, Cluj, Mureș, Harghita și Covasna);
0751.207.922	Oltenia (Vâlcea și Olt), Transilvania (Brașov și Sibiu) și Muntenia (Argeș, Teleorman și Giurgiu);
0757.020.443	Transilvania (jud. Bistrița-Năsăud) și zona Maramureș;
0746.200.413, 0769.221.685	Buzău, Bacău, Neamț, Suceava; Vrancea, Vaslui, Iași, Botoșani;
0744.429.512	Muntenia (Dâmbovița, Prahova, Brăila, Ialomița și Călărași), Dobrogea și jud. Galați;
0755.107.291, 0769.221.680, 0757.020.440	București

Punct de lucru: Loc. Bradu, DN 65B, nr. 31, jud. Argeș
e-mail: comenzi.nomina@gmail.com
www.edituranomina.ro
www.librarianomina.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
NĂCHILĂ, PETRE
Matematică - clasa a VIII-a : formule, exerciţii recapitulative, modele de teste cu rezolvări pentru Evaluarea Naţională / Petre Năchilă. - Piteşti : Nomina, 2023
ISBN 978-606-535-952-9

51

Capitolul 1
MEMORATOR DE MATEMATICĂ

A. ARITMETICĂ – ALGEBRĂ

A.1. Numere naturale. Operații cu numere naturale

- **Mulțimea numerelor naturale** este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

  Cu numere naturale se pot efectua următoarele operații:
  – operații de ordinul I: adunarea și scăderea;
  – operații de ordinul II: înmulțirea și împărțirea;
  – operații de ordinul III: ridicarea la putere.

- **Proprietățile adunării și înmulțirii numerelor naturale:**
  1. comutativitatea: $a + b = b + a$;
  $a \cdot b = b \cdot a$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$;
  2. asociativitatea: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}$;
  3. 0 este element neutru pentru de adunare: $a + 0 = 0 + a = a$, pentru orice $a \in \mathbb{N}$;
  1 este element neutru pentru de înmulțire: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, pentru orice $a \in \mathbb{N}$;
  4. distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere (la stânga, respectiv la dreapta): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$;
  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$. $(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$.

- **Compatibilitatea operațiilor cu numere naturale în raport cu egalitatea/inegalitatea:**

  Avem $a > b$ (sau $b < a$) dacă există c astfel încât $a = b + c$.
  Avem $a \leq b$ (sau $b \geq a$) dacă există c astfel încât $b = a + c$.
  a) Egalitatea $a = b$ între două numere naturale se păstrează dacă:
  - în ambii membri se adună același număr natural: $a + c = b + c$;
  - din ambii membri se scade același număr natural: $a - c = b - c$;
  - ambii membri se înmulțesc cu același număr natural: $a \cdot c = b \cdot c$;
  - ambii membri se împart la același număr natural: $a : c = b : c$.

  b) Dacă adunăm sau înmulțim membru cu membru două egalități, egalitatea se păstrează: $a = b, c = d \Rightarrow a + c = b + d; a \cdot c = b \cdot d$.
  c) Inegalitatea $a < b$ între două numere naturale se păstrează dacă:
  - în ambii membri se adună același număr natural: $a + c < b + c$;
  - din ambii membri se scade același număr natural: $a - c < b - c$;
  - ambii membri se înmulțesc cu același număr natural nenul: $a \cdot c < b \cdot c$;
  - ambii membri se împart la același număr natural nenul: $a : c < b : c$.

Observație: Dacă avem $a \le b$, $a, b \in \mathbb{N}$, atunci:

$a + c \le b + c$; $a - c \le b - c$; $a \cdot c \le b \cdot c$, pentru $c \in \mathbb{N}$; $a : c \le b : c$, pentru $c \in \mathbb{N}^*$.

- **Teorema împărțirii cu rest**

Pentru orice numere naturale a și b, cu $b \ne 0$, există și sunt unice numerele naturale q și r, astfel încât: $a = b \cdot q + r$ și $0 \le r < b$.

Numerele q și r se numesc câtul și restul împărțirii numărului a (numit deîmpărțit) la numărul b (numit împărțitor).

Observație: Pentru orice $a \in \mathbb{N}$ nu are sens operația $a : 0$, iar $a \cdot 0 = 0$.

- **Puterea cu exponent natural a unui număr natural**

Fie $a \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge 2$. Puterea a n-a a numărului natural a este produsul a n factori egali cu a. Avem: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$.

Dacă $a = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a^n = 0^n = 0$. Operația 0^0 nu are sens.

- **Pătratele perfecte** sunt numerele de forma a^2, $a \in \mathbb{N}$ (adică 0, 1, 4, 9, 16, 25, …).

Cuburile perfecte sunt numerele de forma a^3, $a \in \mathbb{N}$ (adică 0, 1, 8, 27, 64, 125, …)

- **Ultima cifră a puterii** $n \in \mathbb{N}^*$ a unui număr $a \in \mathbb{N}$:

- dacă $a \in \{0, 1, 5, 6\}$, atunci u(a^n) se termină cu aceeași cifră;

- dacă $a = 4$, atunci $u(4^n) = \begin{cases} 6, & n \text{ par} \\ 4, & n \text{ impar} \end{cases}$;

- dacă $a = 9$, atunci $u(9^n) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 9, & n \text{ impar} \end{cases}$;

- dacă $a \in \{2, 3, 7, 9\}$, ultima cifră a puterilor nenule se repetă din 4 în 4, astfel:

	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
$a = 2$	6	2	4	8
$a = 3$	1	3	9	7
$a = 7$	1	7	9	3
$a = 8$	6	8	4	2

- **Reguli de calcul cu puteri** ($a, b \in \mathbb{N}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$):

- înmulțirea puterilor cu aceeași bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- împărțirea puterilor cu aceeași bază: $a^m : a^n = a^{m-n}$;
- puterea unei puteri: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
- puterea unui produs: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;
- puterea unui cât: $(a : b)^n = a^n : b^n$.

- **Ordinea efectuării operațiilor**

a) Dacă într-un exercițiu (sau în interiorul aceleiași acolade) sunt operații de același ordin, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise (de la stânga la dreapta).

b) Dacă într-un exercițiu (sau în interiorul aceleiași acolade) sunt operații de ordine diferite, se efectuează întâi operațiile de ordinul al treilea, apoi operațiile de ordinul al doilea și apoi operațiile de ordinul întâi.

c) Dacă într-un exercițiu există și paranteze, se efectuează întâi toate operațiile din parantezele rotunde, apoi toate operațiile din parantezele pătrate, apoi toate operațiile din acolade și în final operațiile din afara acoladelor; parantezele pătrate se transformă în paranteze rotunde, acoladele se transformă în paranteze pătrate, iar parantezele rotunde inițiale dispar.

- **Reguli de calcul:**

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1) : 2$ (suma lui Gauss), $n \in \mathbb{N}^*$;

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Dacă avem un șir de numere $(a_n)_{n\geq 1}$, cu a_1 dat, iar $a_{n+1} = a_n + r$ (unde r este fixat), pentru orice $n \geq 1$ avem: $a_n = a_1 + (n - 1)r$ și $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n(a_1 + a_n) : 2$.

A.2. Numere întregi

- **Mulțimea numerelor întregi** este: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ sau $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$.

Numerele întregi pozitive se identifică cu numerele naturale (dacă $n \in \mathbb{N}^*$, avem $+n = n$): $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots, \} = \mathbb{N}^*$.

Numerele întregi negative: $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \ldots, \} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Numerele întregi nenule: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Avem $+0 = -0 = 0$.

- **Opusul numărului întreg** n este numărul întreg $-n$.
Exemple: $-(+2) = -2$; $-(-3) = 3$.

- **Modulul unui număr întreg**: $|n| = \begin{cases} n, n \geq 0 \\ -n, n < 0 \end{cases}$

Proprietăți ale modulului numerelor întregi:

1. $|n| \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$; $|n| = 0 \Leftrightarrow n = 0$;

2. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$;

3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.

- **Scăderea numerelor întregi** a, b, în această ordine, se definește ca $a - b = a + (-b)$.

- **Puterea unui număr întreg** ($a \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$):

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, \text{ dacă } n = \text{par} \\ -a^n, \text{ dacă } n = \text{impar} \end{cases}, \; a, n \in \mathbb{N}^*; \; a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, \; n = 2k+1, \; k \in \mathbb{Z} \\ 1, \; n = 2k, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

A.3. Divizibilitatea numerelor întregi

A.3.1. Divizibilitatea numerelor naturale

- Numărul natural a este *divizibil* cu numărul natural b, dacă există numărul natural c, astfel încât $a = b \cdot c$.

Numărul a se numește *multiplu* al lui b, iar b se numește este divizor al lui a. Notăm $b \mid a$ (b divide a) sau $a \,\vdots\, b$ (a este divizibil cu b).

Observații:

1. Dacă $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$, avem $b \mid a \Leftrightarrow$ restul împărțirii lui a la b este 0.

2. $a \mid 0$ pentru orice $a \in \mathbb{N}$.

3. 0 divide doar pe 0.

- Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$. Numerele 1 și a se numesc *divizori improprii* ai numărului a. Ceilalți divizori ai lui a (dacă există) se numesc *divizori proprii*.

Mulțimea divizorilor naturali ai lui $a \in \mathbb{N}$ se notează D_a.

Mulțimea multiplilor naturali ai lui $a \in \mathbb{N}$ se notează M_a.

Avem: $D_a = \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a\}$; $D_0 = \mathbb{N}$; $D_1 = \{1\}$;

$M_a = \{m \in \mathbb{N} \mid a \mid m\}$; $M_0 = \{0\}$; $M_1 = \mathbb{N}$; $M_n = \{kn \mid k \in \mathbb{N}\}$.

- Numărul natural $p \geq 2$ se numește *prim* dacă singurii săi divizori sunt 1 și p.

Mulțimea numerelor prime este infinită (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …).

Singurul număr par și prim este 2.

Un număr natural nenul cu cel puțin trei divizori (adică cu cel puțin un divizor propriu) se numește *compus*.

Mulțimea numerelor compuse este infinită (4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, …).

Pentru a verifica dacă un număr este prim procedăm astfel:

- împărțim pe rând numărul dat la numerele prime luate în ordine crescătoare până când câtul devine mai mic decât împărțitorul;
- dacă niciuna din împărțiri nu s-a efectuat exact (nu are restul 0), atunci numărul este prim;
- dacă la o împărțire restul este 0, numărul este compus, împărțitorul și câtul sunt divizori ai numărului.

Capitolul 3
MODELE DE Teste CU REZOLVARE COMPLETĂ

TESTUL 1

SUBIECTUL I

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 224 și 420 este:

a) 14; **b)** $2^2 \cdot 7$; **c)** 56; **d)** 12.

Soluție. $224 = 2^5 \cdot 7$; $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow d = 2^2 \cdot 7 = 28$.

5p **2.** Cazurile pentru care valorile (x, y) din tabelul alăturat sunt invers proporționale sunt:

	x	y
I	4	9
II	6	3
III	24	8
IV	18	36

a) I și II; **b)** I și IV;
c) II și IV; **d)** III și IV.

Soluție. (x, y) i.p. $(x', y') \Leftrightarrow xx' = yy'$. Avem $6 \cdot 18 = 3 \cdot 36 = 108$.

5p **3.** În tabelul de mai jos au fost înregistrate temperaturile minimă, respectiv maximă din cursul unei săptămâni.

ziua / temperatura	luni	marți	miercuri	joi	vineri	sâmbătă	duminică
minimă	–2°C	–3°C	–1°C	–3°C	–4°C	–1°C	1°C
maximă	10°C	9°C	14°C	10°C	8°C	9°C	9°C

Cea mai mare diferență dintre cele două temperaturi a fost înregistrată în cursul zilei de:

a) miercuri; **b)** marți;
c) luni sau joi; **d)** vineri sau sâmbătă.

Soluție. $10 - (-2) = 12$; $9 - (-3) = 12$; $14 - (-1) = 15$; $10 - (-3) = 13$; $9 - (-1) = 10$; $9 - 1 = 8 \Rightarrow$ diferența maximă este de 15°C.

5p **4.** Ordinea descrescătoare a numerelor: $a = 3{,}246$, $b = 3{,}2(4)$, $c = 3{,}24(6)$, $d = 3{,}2(46)$ este:

a) c, b, d, a; **b)** d, c, b, a; **c)** b, c, d, a; **d)** c, d, a, b.

Soluție. $a = 3{,}24600$, $b = 3{,}2444\ldots$, $c = 3{,}24666..$, $d = 3{,}24646\ldots \Rightarrow c > d > a > b$.

5p **5.** Numărul perechilor (a, b) pentru care $n = \sqrt{\overline{ab} - \overline{ba}}$ este număr natural este:

a) 10; **b)** 22; **c)** 16; **d)** 13.

Soluție. $n = \sqrt{9a - 9b} = 3\sqrt{a - b} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a - b \in \{0, 1, 4, 9\} \Rightarrow 9 + 8 + 5 = 22$ cazuri.

5p **6.** Într-un an $\overline{2abc}$, cu $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, prima zi a unei luni cu număr par de zile este joi. Ultima zi a aceleiași luni este:

a) miercuri sau vineri; **b)** marți sau joi;
c) luni sau sâmbătă; **d)** marți sau miercuri.

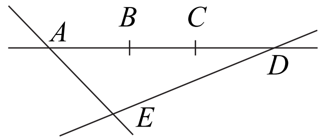
Soluție. Studiind calendarul lunii respective (cu 30 de zile), redat în tabelul alăturat, observăm că ultima zi este vineri.

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

SUBIECTUL al II-lea

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

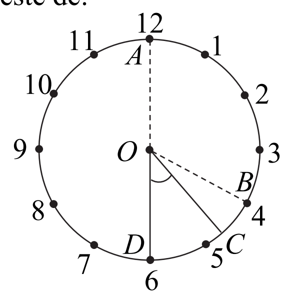
5p **1.** Numărul de triplete de puncte coliniare din figura alăturată este:



a) 4; **b)** 5;
c) 6; **d)** 7.

Soluție. Tripletele (fără permutări) sunt: (A, B, C), (A, B, D), (A, C, D), (B, C, D), în număr de 4.

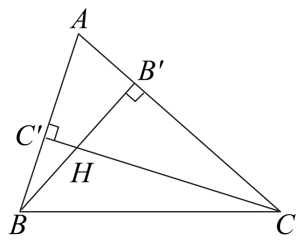
5p **2.** Măsura unghiului făcut de acele unui ceas la ora 16:30 este de:



a) 30°; **b)** 36°;
c) 45°; **d)** 60°.

Soluție. Acul minutar parcurge 360° în 60 de minute. În 30 de minute, el parcurge 360° : 2 = 180° (din A în D). Acul orar parcurge 360° în 12 ore. În 30 de minute, el parcurge 360° : 12 = 15° (de la B la C). Unghiul are $30° \cdot 2 - 15° = 45°$.

5p **3.** Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC. Știind că $\sphericalangle BHC = 130°$, $\dfrac{\sphericalangle ABC}{6} = \dfrac{\sphericalangle ACB}{7}$, măsura unghiului B este:

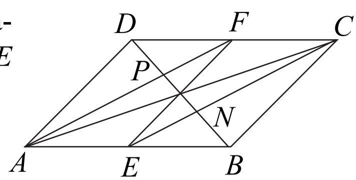


a) 45°; **b)** 60°;
c) 40°; **d)** 50°.

Soluție. În patrulaterul $AB'HC'$ avem $130° = \sphericalangle BHC = \sphericalangle B'HC' = 360° - (80° + 90° + \sphericalangle A) = 180° - \sphericalangle A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle A = 50°$. Atunci $\dfrac{\sphericalangle B}{6} = \dfrac{\sphericalangle C}{7} = \dfrac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{13} = \dfrac{180° - 50°}{13} = 10° \Rightarrow \sphericalangle B = 60°$.

5p **4.** Fie E și F mijloacele laturilor AB și CD ale paralelogramului $ABCD$, iar $BD \cap AF = \{P\}$, $BD \cap CE = \{N\}$. Atunci avem:

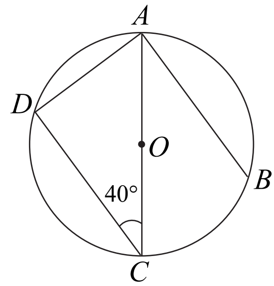


a) $DP = PN < BN$; **b)** $DP = BN < PN$;
c) $DP + BN = \dfrac{3}{2}BN$; **d)** $DP = PN = BN$.

Soluție. Deoarece $AE \parallel CF$, $AE = CF$, patrulaterul $AECF$ este paralelogram și deci $AF \parallel CN$. Avem PF linie mijlocie în ΔDCN și deci $DP = PN$. Analog, în ΔABP avem $BN = PN$ și deci $DP = PN = BN$.

5p **5.** Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$ se iau în ordine punctele A, B, C, D, astfel încât $AB \parallel CD$, $O \in AC$, $\sphericalangle OCD = 40°$. Măsura arcului $\overset{\frown}{BAD}$ este de:

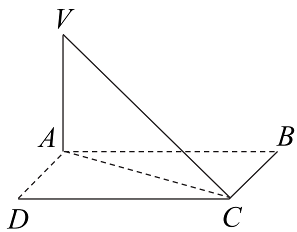
a) 120°; **b)** 170°;
c) 180°; **d)** 160°.



Soluție. $\sphericalangle ACD = 40°$, $AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} = 2 \cdot 40° = 80°$. Cum $AC = 2R$, avem $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = 180°$ și deci $\overset{\frown}{AB} = 100°$. Atunci $\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AB} = 100° + 80° = 180°$.

5p **6.** Dreapta VA este perpendiculară pe planul dreptunghiului $ABCD$. Știind că $VA = 9$ cm, $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 3$ cm, măsura unghiului făcut de dreapta CV cu planul (ABC) este:

a) 30°; **b)** 45°;
c) 60°; **d)** 75°.



Soluție. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 9$ cm;

$\operatorname{tg} \sphericalangle ACV = \dfrac{VA}{AC} = 1 \Rightarrow \sphericalangle ACV = 45°$.

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Un mobil parcurge un drum dus-întors în 11 ore, astfel: la dus cu 50 km/h, iar la întors cu 60 km/h.

2p **a)** Demonstrați că timpii la dus și întors, exprimați în ore, sunt numere invers proporționale cu două numere naturale.

3p **b)** Determinați distanța parcursă de mobil.

Soluție. **a)** Notând cu d distanța (la dus sau la întors) și cu t_1 și t_2 timpii corespunzători, avem $d = 50t_1 = 60t_2 \Rightarrow \dfrac{t_1}{\frac{1}{5}} = \dfrac{t_2}{\frac{1}{6}} \Rightarrow (t_1, t_2)$ i.p. $(5, 6)$.

b) $\dfrac{d}{50} + \dfrac{d}{60} = 11 \Rightarrow d = 300 \Rightarrow 2d = 600$ (km).

2. Fie expresiile $E_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, $E_2(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, $F(x) = \dfrac{E_1(x)}{E_2(x)}$.

2p **a)** Descompuneți în factori expresiile E_1 și E_2.

3p **b)** Determinați mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid F(x) \in \mathbb{Z}\}$.

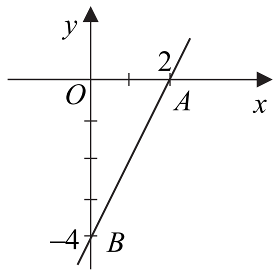
Soluție. **a)** $E_1(x) = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$, $E_2(x) = x(x^2-1) + 2(x^2-1) = (x^2-1)(x+2) = (x+2)(x-1)(x+1)$.

b) $F(x) = \dfrac{(x-2)(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)(x+1)} = \dfrac{x-2}{x+2}$ pentru $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \pm 1\}$. Avem $F(x) =$ $= \dfrac{x+2-4}{x+2} = 1 - \dfrac{2}{x+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+2 \mid 2 \Rightarrow x+2 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow x \in \{-4, -3,$ $-1, 0\}$. Cum $x \in D \Rightarrow A = \{-4, -3, 0\}$.

3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$, iar A și B intersecțiile graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy.

2p **a)** Determinați aria triunghiului AOB.

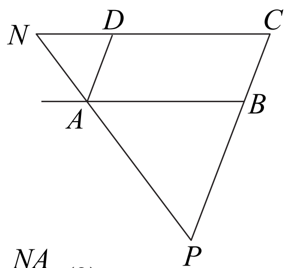
3p **b)** Determinați punctele $M(x, y)$ cu proprietățile $f(|x|) = -1 - |y|$, $x, y \in \mathbb{Z}$.



Soluție. **a)** $f(0) = -4 \Rightarrow B(0, -4)$;
$f(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(0, 2)$;
$\mathcal{A}_{AOB} = \dfrac{OA \cdot OB}{2} = \dfrac{2 \cdot 4}{2} = 4.$

b) $2|x| - 4 = -1 - |y| \Leftrightarrow |y| = 3 - 2|x| \Leftrightarrow (|x|, |y|) \in (0, 3), (1, 1) \Rightarrow$ punctele $M_1(0, 3)$, $M_2(0, -3)$, $M_3(1, 1)$, $M_4(1, -1)$, $M_5(-1, 1)$, $M_6(-1, -1)$.

4. Prin vârful A al paralelogramului $ABCD$ se duce o dreaptă care taie prelungirile laturilor BC și CD în P și N. Demonstrați că:



2p **a)** $\dfrac{PB}{BC} \cdot \dfrac{ND}{DC} = 1$;

3p **b)** $\dfrac{PC}{BC} + \dfrac{NC}{DC} \geq 4$.

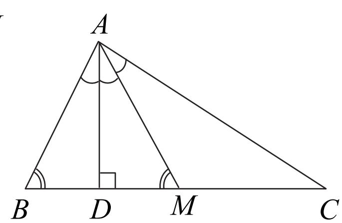
Soluție. **a)** $AB \parallel CD \Rightarrow \dfrac{PB}{BC} = \dfrac{PA}{NA}$ (1); $AD \parallel BC \Rightarrow \dfrac{ND}{CD} = \dfrac{NA}{PA}$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $\dfrac{PB}{BC} \cdot \dfrac{ND}{DC} = \dfrac{PA}{NA} \cdot \dfrac{NA}{PA} = 1$.

b) $\dfrac{PC}{BC} + \dfrac{NC}{DC} = \dfrac{PB+BC}{BC} + \dfrac{ND+DC}{DC} = \dfrac{PB}{BC} + \dfrac{ND}{DC} + 2 \overset{(1),(2)}{=} 2 + \left(\dfrac{PA}{NA} + \dfrac{NA}{PA}\right) \geq$

$\geq 2 + 2\sqrt{\dfrac{PA}{NA} \cdot \dfrac{NA}{PA}} = 4.$

5. În triunghiul ABC, înălțimea AD și mediana AM împart unghiul BAC în trei unghiuri congruente. Demonstrați că:



2p **a)** $BD = \dfrac{BC}{4}$;

3p **b)** $\sphericalangle BAC = 90°$.

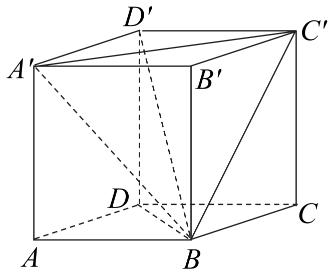
Soluție. **a)** În ΔABM, AD este bisectoare și înălțime. Atunci ΔABM este isoscel și avem $BD = DM = \dfrac{BC}{4}$.

b) Cum AM este bisectoare în ΔDAC, avem $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DM}{MC} = \dfrac{1}{2}$ și deci $\sphericalangle C = 30°$, $\sphericalangle DAC = 60°$, $\sphericalangle DAM = 30°$, $\sphericalangle BAC = 90°$.

6. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$.

2p **a)** Determinați unghiul unei diagonale a cubului cu muchia cubului.

3p **b)** Determinați unghiul făcut de dreptele AC și BC.



Soluție. **a)** Fie a latura cubului. Luăm diagonala BD'. Orice muchie a cubului este paralelă cu una din muchiile BA, BC, BB'. Triunghiurile BAD', $BB'D'$, BCD' sunt dreptunghice și congruente (cazul CI). Deci unghiurile făcute de diagonala BD' cu muchiile BA, BC, BB' sunt congruente. Luăm $\Delta BAD'$, cu $AB = a$, $AD' = a\sqrt{3}$, $BD' = a\sqrt{3}$ și atunci

$\cos(\sphericalangle ABD') = \dfrac{AB}{BD'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sphericalangle ABD' = 60°$.

b) Cum $A'C' \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(AC, BC') = \sphericalangle(A'C', BC')$, iar $\Delta A'C'B$ este echilateral, rezultă că unghiul cerut are măsura de 60°.

TESTUL 2

SUBIECTUL I

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Suma numerelor prime care divid numărul 660 este:

a) 22; **b)** 27; **c)** 21; **d)** 23.

Soluție. $660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Suma cerută este $2 + 3 + 5 + 11 = 21$.

5p **2.** Suma numerelor impare $\overline{ab}$ pentru care $1 + 3 + 5 + \ldots + (2a + b - 2) = 49$ este:

a) 290; **b)** 265; **c)** 282; **d)** 275.

Soluție. $49 = 2^7 \Rightarrow 2a + b - 2 = 2 \cdot 7 - 1 \Rightarrow 2a + b = 15 \Rightarrow \overline{ab} \in \{39, 47, 55, 63, 71\} \Rightarrow$ suma = 275.

5p **3.** Fie mulțimile $A = \left\{\dfrac{3n+8}{3n+2} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \left\{\dfrac{3k+2}{3k+1} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. Mulțimea $A \cap B$ este:

a) $\varnothing$; **b)** $\left\{\dfrac{19}{11}, \dfrac{34}{11}\right\}$; **c)** $\left\{\dfrac{14}{13}\right\}$; **d)** $\left\{\dfrac{1014}{1011}\right\}$.

Soluție. $(3n + 8)(3k + 1) = (3n + 2)(3k + 2) \Leftrightarrow M3 + 8 = M3 + 4$ (imposibil) $\Rightarrow$ $\Rightarrow A \cap B = \varnothing$.

Capitolul 4
40 DE MODELE DE TESTE PROPUSE

TESTUL 1

SUBIECTUL I

1. $360 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \Rightarrow (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$ divizori (c). *Teoremă:* $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_k^{a_k}$ descompunerea în factori primi distincți $\Rightarrow m = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_{k+1} + 1)$ = numărul divizorilor naturali ai lui n. **2.** $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{3} = k \Rightarrow a = 2k, b = 3k, c = 4k \Rightarrow \frac{2k+3k+4k}{3} = 12 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow k^2 + k^2 + 4k^2 = 6k^2 = 96$ (b). **3.** $\frac{4\cdot(-9)+6\cdot 7+10\cdot(-5)+11\cdot 4}{4+6+10+11} = \frac{0}{31} = 0$ (b). **4.** $(a - b)(a + b) = 102 = (\pm 1) \cdot (\pm 2) \cdot (\pm 3) \cdot (\pm 17)$. Cum $a - b$ și $a + b$ au aceeași paritate $\Rightarrow 4 \mid a^2 - b^2$ (imposibil) $\Rightarrow$ 0 perechi (a). **5.** $\sqrt{(2,6+6,4)^2} = \sqrt{9^2} = 9$ (d). **6.** Luăm $a = 2+\sqrt{3}, b = 2-\sqrt{3}$ și $a + b = 4$ (a).

SUBIECTUL al II-lea

1. $AB = 2MB$, $AF = AB + BC + CD + DE + EF = 2MB + 2BC + 2CD = 2MD = 12$ cm (c). **2.** $360° : 6 = 60°$ (a). **3.** În ΔBAC și ΔDEC se aplică teorema cu $\sphericalangle BCA = 30° \Rightarrow \frac{AB}{BC} + \frac{DE}{DC} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (d). **4.** Din $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow DC = 4 \Rightarrow DE$ linie mijlocie $\Rightarrow AE = 5, DE = 5, \mathscr{P}_{ADE} = 14$ cm (b). **5.** $\sphericalangle BOC = 60° \Rightarrow BC = l_6 = 4$ cm, $AB = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow \mathscr{A}_{ABC} = 8\sqrt{3}$ cm^2 (c). **6.** $a^2 + b^2 + c^2 = \left(2\sqrt{29}\right)^2 = 116$; $a + b + c = 72 : 4 = 18 \Rightarrow \mathscr{A}_t = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 208$ cm^2 (a).

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $7a = 2bc$. Cum $2 \mid 7a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow bc = 7 \Rightarrow$ 2 triplete: (2, 1, 7), (2, 7, 1); b) $b = 7 \Rightarrow a = 2c \Rightarrow 90 : 2 = 45$ triplete. **2.** a) $E(x) = x^2 + 7x + 2 = \left(x+\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{41}{4} \geq -\frac{41}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$; b) $S = (1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2) + (1 + 2 + \ldots + 10) + 20 = \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + \frac{10\cdot 11}{2} + 20 = 790$.

3. a) $2a + a = a^2 - 4 \Rightarrow a \in \{-1, 4\}$; b) $M(-2, 0)$, $N(0, 4)$, $P(2, 8)$; $\mathscr{A}_{MOP} = \frac{2\cdot 8}{2} = 8$ cm^2. **4.** a) Fie $CE \perp AB$, $E \in AB$. Avem $AECD$ dreptunghi, $\sphericalangle BEC = 90° \Rightarrow AE = CD$; b) Cum $CD = AM \Rightarrow \Delta AME$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle AEM = 45° \Rightarrow \sphericalangle BEN = 45° \Rightarrow \sphericalangle ABC = 45°$. **5.** a) $\sphericalangle OCD = \sphericalangle COA = \sphericalangle COD \Rightarrow OC = OD$; b) $\Delta BCD \sim \Delta BAO \Rightarrow \frac{CD}{AO} = \frac{BD}{BO} = \frac{BO-OD}{BO} = 1-\frac{OC}{OB} \Rightarrow \frac{OC}{OA} = 1-\frac{OC}{BO}$ (căci ΔOCD este echilateral) $\Rightarrow \frac{OC}{OA} + \frac{OC}{OB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{OC}$. **6.** a) $MB \perp (BCC')$; $BN \perp CN$, $BN, CN \subset (BCC') \Rightarrow$

$\Rightarrow MN \perp NC \Rightarrow MN \perp D'N \Rightarrow MN \perp (NCD')$; b) $\mathscr{V} = \dfrac{MN \cdot S}{3}$, $S = \mathscr{A}_{D'NC}$; $\Delta D'NC$ dreptunghic în N, cu $D'N = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $NC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathscr{V} = \dfrac{a^3}{8}$.

TESTUL 2

SUBIECTUL I

1. $12 = 3 \cdot 4$; $4 \mid n \Leftrightarrow 4 \mid \overline{4b} \Leftrightarrow b \in \{2, 4, 6\}$; $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid 2a + 3b + 4 \Leftrightarrow 3 \mid 2a + 4$. Pentru fiecare b se găsesc 3 valori pentru $a \Rightarrow 3 \cdot 3 = 9$ cazuri (a). **2.** $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13 = (a - b)(a + b)$. Cum $a - b$, $a + b$ au aceeași paritate și $2 \mid (a + b)(a - b)$, iar $4 \nmid (a + b)(a - b)$, nu avem soluții (b). **3.** $|a| + |b| \geq |a \pm b|$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| + |20 - x| \geq |x + 20 - x| = 20 > 18 \Rightarrow$ nu avem soluții (d). **4.** Ordinea crescătoare: d, c, a, b (c). **5.** $a = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 9}{2}} + \sqrt{\dfrac{50 \cdot 90}{5}} + \sqrt{\dfrac{800 \cdot 900}{8}} = 3 + 30 + 300 = 333$ (c). **6.** $2^{8x} = (2^4)^{16} = 2^{64} \Rightarrow x = 8 = 2^n \Rightarrow n \in \mathbb{N}^*$ (a).

SUBIECTUL al II-lea

1. i) $2 + 1 + 3 = 6$; ii) $2 - 1 + 3 = 4$; iii) $1 + 3 - 2 = 2$; iv) $2 + 1 - 3 = 0$ (avem toate valorile) (d). **2.** $\sphericalangle AOC = x$, $\sphericalangle COD = 2x$, $\sphericalangle DOB = 3x$; $6x = 180° \Rightarrow x = 30° \Rightarrow \sphericalangle COB = 150°$ (d). **3.** $\Delta BAC \equiv \Delta ACE$ (LUL) $\Rightarrow BD = AE \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} + \dfrac{BD}{AE} = 1 + 1 = 2$ (b). **4.** Caz general: $D \in BC$, $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{m}{n}$, $\mathscr{A}_{ABC} = S \Rightarrow \mathscr{A}_{ABD} = \dfrac{m}{m+n} \cdot S$. Avem $\mathscr{A}_{ABD} = \dfrac{h \cdot BD}{2} = \dfrac{h}{2} \cdot BC \cdot \dfrac{m}{m+n} = \dfrac{m}{m} \cdot S = \dfrac{2}{5} \cdot 30 = 12\ \text{cm}^2$ (c). **5.** $\sphericalangle ABI = 26° \Rightarrow \sphericalangle B = 2 \cdot 26° = 52°$; $\sphericalangle BIC = 180° - (\sphericalangle IBC + \sphericalangle ICB) = 180° - \dfrac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} = 90° + \dfrac{\sphericalangle A}{2} = 120° \Rightarrow \sphericalangle A = 60° \Rightarrow \sphericalangle C = 180° - (52° + 60°) = 68°$ (b). **6.** Fie $AM \cap BC = \{D\}$, $CM \cap AB = \{E\}$. Avem $OA \perp OB$, $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$. Cum $OM \perp (ABC) \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow BC \perp (OAM) \Rightarrow BC \perp CM$. Analog $AB \perp BC$ și deci M este ortocentrul ΔABC (a).

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $a\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{8 + \sqrt{7}}}{\sqrt{7} + \sqrt{5} + 2} = \dfrac{\sqrt{5} + 1 + \sqrt{7} + 1}{\sqrt{7} + \sqrt{5} + 2} = 1 \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; b) $|ma| \leq 4 \Leftrightarrow |m| \leq 4\sqrt{2} \Rightarrow A = \{\pm5, \pm4, \pm3, \pm2, \pm1, 0\}$. **2.** a) $E(x) = \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+2}{(x+2)(x^2-1)} + \dfrac{1}{x+1}\right) \cdot \dfrac{x+1}{x^2} = \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)} \cdot \dfrac{x+1}{x^2} = \dfrac{1}{x-1}$; b) Condiții: $(x + 2)(x - 1)(x + 1) \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}^* \setminus \{\pm1\} = D$; $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| \geq \dfrac{1}{3} \Rightarrow |x - 1| \leq 3 \Rightarrow x \in [-2, 4]$. Cum $x \in D \Rightarrow x \in \{2, 3, 4\}$.

Cuprins

	Enunțuri	Soluții
Capitolul 1. MEMORATOR DE MATEMATICĂ		
A. ARITMETICĂ – ALGEBRĂ		
A.1. Numere naturale. Operații cu numere naturale	3	
A.2. Numere întregi	5	
A.3. Divizibilitatea numerelor întregi	6	
A.4. Numere raționale. Fracții ordinare. Fracții zecimale	9	
A.5. Rapoarte. Proporții. Procente. Probabilități	11	
A.6. Radicali. Numere reale	12	
A.7. Formule de calcul prescurtat. Descompunere în factori	15	
A.8. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Expresii algebrice.	15	
A.9. Funcții	16	
A.10. Ecuații. Inecuații. Sisteme de ecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor (inecuațiilor) sau al sistemelor de ecuații (inecuații)	17	
B. GEOMETRIE PLANĂ. GEOMETRIE ÎN SPAȚIU		
B.1. Unghiuri. Triunghiuri	20	
B.2. Patrulatere	26	
B.3. Asemănare	28	
B.4. Relații metrice	30	
B.5. Cercul	32	
B.6. Incidență, paralelism și perpendicularitate în spațiu	35	
B.7. Corpuri geometrice. Arii și volume	42	
Capitolul 2. TEME RECAPITULATIVE. APLICAȚII		
ARITMETICĂ – ALGEBRĂ		
2.1. Numere naturale. Operații cu numere naturale	47	236
2.2. Numere întregi	49	237
2.3. Divizibilitate	51	238
2.4. Numere raționale	53	239
2.5. Rapoarte. Proporții. Probabilități	56	241
2.6. Numere reale. Radicali	59	243
2.7. Formule de calcul prescurtat	62	245
2.8. Calcul algebric	64	246
2.9. Funcții	66	247
2.10. Ecuații. Sisteme de ecuații. Inecuații	68	249

GEOMETRIE
2.11. Unghiuri. Triunghiuri 70 251
2.12. Patrulatere 72 252
2.13. Asemănare 74 254
2.14. Relații metrice 76 257
2.15. Elemente de trigonometrie. Arii 78 259
2.16. Cercul 80 262
2.17. Incidență. Paralelism. Perpendicularitate 81 264
2.18. Poliedre. Arii. Volume 84 267
2.19. Corpuri rotunde. Arii. Volume 87 269

Capitolul 3. MODELE DE TESTE CU REZOLVARE COMPLETĂ 90

Capitolul 4. 40 DE MODELE DE TESTE PROPUSE 136 271