

# **MATEMATICA**

## **ETERNA NECUNOSCUȚĂ**

**Cartea se adresează, în primul rând, elevilor de liceu, studenților care au studiat matematica și, unii dintre ei, o mai studiază încă, tuturor celor care vor să găsească, puse la un loc, „povești” vechi și noi despre matematică.**

Angela Muntean

Liviu Muntean

# **MATEMATICA**

## **ETERNA NECUNOSCUȚĂ**

Ediția a II-a, revizuită și modificată



**EDITURA UNIVERSITARĂ**  
**București, 2019**

*Nepoților noștri dragi,  
Dana, Mara și Șerban*

## **Prefață la ediția a II-a**

Când am început să lucrăm la această carte, ne propuneam să adunăm, împreună, aplicații ale matematicii din cât de multe domenii ale științei și nu numai. Pe parcurs, am ajuns la cu totul altceva. Și cum ni s-a părut că ceea ce adunasem, putea fi o lucrare de sine stătătoare, am lăsat deoparte aplicațiile matematicii și am mers, mai mult, spre un fel de poveste despre matematică. Aplicațiile s-au dovedit cam prea complicate și am decis să elaborăm o altă lucrare, în două volume, ceva între monografie și culegere de probleme. Primul volum este finalizat deja.

După aproape patru ani de la apariția primei ediții a acestei lucrări, găsind noi niște mici lucruri de schimbat, pe ici, pe colo, considerând că vor mai fi unii cărora ar putea să le facă plăcere să citească ceva despre matematica noastră cea de toate zilele, am decis publicarea unei a doua ediții. Oricum, sperăm că lectura ei este plăcută și utilă! O recomandăm elevilor de liceu, dar și absolvenților, studenților de la facultățile tehnice și nu numai. Credem că cei care

iubesc matematica, dar și cei care ar vrea să o iubească, ar putea găsi ceva bun în această carte.

Peste câteva luni, va apărea și primul volum al lucrării care conține aplicațiile matematicii. Dar va fi cu totul altă poveste! Vă dorim „lectură” plăcută!

Autorii

# CUPRINS

|  |            |
|--|------------|
| <b>Prefață la ediția a II-a .....</b>  | <b>7</b>   |
| <b>Partea I. Despre matematică fără formule ....</b>                             | <b>11</b>  |
| I.1 Un cuvânt pentru o lume – „matematica” .....                                 | 11         |
| I.2 Câteva definiții ale matematicii .....                                       | 21         |
| I.3 Limbajul matematic – un limbaj universal .....                               | 27         |
| I.4 Despre matematicieni .....   | 35         |
| I.5 Importanța matematicii. Calități și defecte ale matematicii .....            | 42         |
| I.6 Din istoria matematicii .....  | 56         |
| I.7 Zero și infinit – o poveste adevărată .....                                  | 88         |
| I.8 Ramurile matematicii .....   | 95         |
| I.9 Matematica între uman și divin .....   | 106        |
| <b>Partea a II-a. Despre matematică cu ceva formule .....</b>                    | <b>111</b> |
| II.1 Tot despre limbajul matematic. Un minidicționar de termeni matematici ..... | 111        |
| II.2 Problemele de matematică – o provocare continuă .....                       | 140        |
| II.3 Din nou despre logica matematică .....                                      | 149        |
| II.4 Și câte ceva despre numere .....  | 167        |
| II.5 Sistemele axiomatice – miniuniversuri ale universului matematic .....       | 189        |
| Postfață - De ce este matematica atât de iubită (de unii)?.....                  | 199        |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Anexe</b> .....                                   | 202 |
| Anexa 1 - Axiomatica Hilbert a spațiului euclidian . | 202 |
| Anexa 2 – Axiomele lui Peano.....                    | 205 |
| Anexa 3 – Lista lui Hilbert .....                    | 206 |
| Anexa 4 – Problemele mileniului .....                | 214 |
| <b>Bibliografie</b> .....                            | 219 |
| <b>Mulțumiri</b> .....                               | 228 |



# **PARTEA I**

## **DESPRE MATEMATICĂ FĂRĂ FORMULE**

### **Un cuvânt pentru o lume - „matematica”**

Vom începe povestea noastră încercând să sugerăm ce transmite cuvântul „matematică”. Chiar dacă nu vom reuși foarte bine, sperăm că se va înțelege ce vrem să spunem.

Există multe cuvinte pe care le întâlnim și le folosim, poate, chiar în fiecare zi. Este vorba fie de cuvinte care se referă la lucruri reale, mai mult sau mai puțin palpabile, ca pâine, apă, soare, fie de cuvinte care desemnează lucruri abstracte, care spun ceva minții noastre, dar pe care nu le găsim niciunde. Vorbim de gânduri și de înțelepciune, de bucurie și de nechez, de dreptate și de adevăr, de clipă și de infinit și de câte și mai câte.

Fiecare dintre aceste cuvinte ne spune ceva, dar bine că nu ne cere nimeni (asta în mod obișnuit) să le explicăm. Dar dacă ne-ar cere să le definim, chiar ar fi o problemă! Noroc că avem, astăzi, calculatorul, care ne duce, imediat, într-un dicționar, într-o enciclopedie

sau în alte surse din care putem culege definiții, explicații, lămuriri. Chiar și cu acest mare ajutor, nu întotdeauna ne descurcăm foarte bine. Nu ne referim, aici, decât la oamenii obișnuiți. Că sunt unii care elaborează, ei înșiși, dicționare și enciclopedii, asta este cu totul altă treabă!

Un cuvânt care apare des în limbajul multora dintre noi, mai ales dacă suntem din una din categoriile: elevi, părinți de elevi, profesori, ingineri, informaticieni și încă multe altele, este cuvântul „matematică”. Este greu de spus ce ne sugerează, fiecăruia dintre noi, acest cuvânt, dar e clar că unii nu se bucură când îl aud. Iubit sau urât, cuvântul se referă la o lume fără de care civilizația în care trăim, cu bunele și relele ei, nu ar exista.

El ne sugerează, însă, o lume pur umană, cu care s-a construit civilizația în care trăim și pentru care gândirea este principalul “ingredient”. Frumusețea și eleganța raționamentelor matematice, siguranța în corectitudinea rezultatelor obținute pe baza raționamentelor matematice, provocarea permanentă dată de rezolvarea de probleme de matematică, mai simple sau mai complicate, sunt lucruri care fac din matematică un instrument, o armă, o artă de neegalat.

Nu putem vorbi despre un cuvânt atât de important cum este „matematica” fără să ne referim la etimologia lui. Numele matematicii provine de la cuvântul grecesc ***mathema***, care înseamnă, deopotrivă, cunoaștere, studiu, învățare. Și numai cu atât și se poate vedea că matematica, după nume, își propune să facă foarte mult.

Matematica, cu rigoarea ei, cu metodele ei care se pot aplica în științe mai apropiate sau mai

îndeapărtate, nu trebuie să fie doar la dispoziția celor avizați. Ea este mai mult decât un instrument pe care o parte dintre noi îl folosesc pentru a rezolva dificilele probleme ale realității complexe în care trăim. Pentru aceasta, fenomenul trebuie studiat. Dar când știm că studiul unui fenomen real este pe drumul cel bun? Matematicianul român Gheorghe Țițeica (1873-1939) afirma că „studiul științific al fenomenelor naturii caută să ia forma matematică și acest studiu se socotește deplin, când forma matematică a fost găsită”.

Se ridică mai multe întrebări: de ce stau lucrurile așa? ce are de-a face realitatea cu matematica? În acest sens, un alt mare matematician român, Grigore Moisil (1906-1973), a sintetizat răspunsul la unele întrebări ca cele de mai sus în fraza „tot ce e gândire corectă este sau matematică sau este susceptibil de matematizare”, idee pe cât de profundă, pe atât de adevărată.

Se face, adesea, distincție între matematica pură și matematica aplicată. Ar trebui, poate, ca matematica să fie una singură și să se poată trece de la soluțiile problemelor teoretice la înțelegerea și rezolvarea problemelor practice pe care realitatea le ridică. Trebuie să găsești matematica din spatele fenomenelor, să o aprofundezi și să te întorci cu soluții la problema inițială. Asta dacă nu ești, cumva, adeptul matematicii pure, care consideră că nu trebuie să se amestece în probleme practice!

Vorbim, mereu, despre utilitatea matematicii. Ar trebui să știm la ce i-a folosit și îi folosește omului matematica.

Apărută odată cu civilizația umană, matematica a făcut posibilă dezvoltarea științei, cu multele ei domenii, ceea ce a dus, în ultimă instanță, la o

îmbunătățire, permanentă, a vieții omului (sau așa ar fi trebuit). Omul a putut cunoaște mai bine mediul în care trăiește, universul propriului organism, Pământul și oceanul care acoperă peste 70% din suprafața Pământului, atmosfera care înconjoară Pământul, Universul mai mult sau mai puțin apropiat. Efectuarea zborurilor cosmice le-a permis oamenilor să obțină multe informații noi despre Univers.

Dezvoltării matematicii, știința iubită de atât de puțini oameni, i se datorează apariția computerului, un instrument excepțional de comunicare, stocare de informații, de prelucrare a acestora, schimbând, pe parcursul a doar câteva zeci de ani, obiceiuri și mentalități. Nu mai trebuie să mergi la nu știu ce casierie pentru a-ți plăti factura, sau la poștă, pentru a trimite niște bani, nu trebuie să stai toată ziua prin bibliotecă, ca să te poți documenta, nu mai trebuie să lași un mesaj telefonic, când persoana pe care o cauți nu e acasă. Poți comunica cu oricine, la orice oră, oriunde s-ar găsi. Cei care au cunoscut lucrurile și altfel, au rămas cu o nostalgie pentru o scrisoare, pentru un drum la bibliotecă, pentru o vorbă pe care o schimbi cu o cunoștință pe care ai întâlnit-o când te-ai dus să-ți plătești o factură. Pe lângă imensele avantaje, omul are și de pierdut în competiția infernală cu computerul și telefonul mobil.

Dezvoltarea gândirii matematice, necesitatea efectuării de calcule tot mai complicate, existența unui șir de operatori și de reguli pentru rezolvarea unui anume tip de probleme, adică a ceea ce s-au numit, în timp, **algoritmi**, a permis un salt calitativ uriaș, care a influențat întreaga dezvoltare a științei și civilizației. Definiția acceptată pentru algoritm este „un ansamblu de reguli și de operatori pentru efectuarea unui sistem

de operații într-o ordine dată în vederea rezolvării unor probleme de un anumit tip”.

Informatica, acest copil precoce al matematicii, a apărut pe o anumită treaptă de dezvoltare a științei. Este vorba, în principal, despre dezvoltarea teoretică a matematicii, care a permis saltul spre apariția și dezvoltarea informaticii.

Pornind de la mecanisme elementare de prelucrare a simbolurilor, descrise, teoretic, de A. Turing (1912-1954), în 1936, s-a ajuns la construirea de mașini de prelucrat date și informații, pe baza unei liste de instrucțiuni, numită **program**. Elaborarea unui program, pentru probleme din ce în ce mai complexe, cere o gândire matematică dezvoltată. În timp, a apărut o adevărată știință care se ocupă de prelucrarea informațiilor cu ajutorul computerelor. Numită **informatică**, ea este, astăzi, una dintre cele mai apreciate și dezvoltate științe. În paralel, s-a dezvoltat și tehnologia necesară folosirii computerelor, **tehnologia informației**, despre care auzim mereu, în prescurtarea arhicunoscută **IT**.

Ideea că orice problemă bazată pe un algoritm poate fi rezolvată cu o mașină Turing, deși doar o ipoteză, conjectura Church-Turing, care postulează că orice problemă de calcul, bazată pe o procedură algoritmică, poate fi rezolvată de către o mașină Turing, a permis folosirea, pe scară largă, a computerelor în toate domeniile activității umane.

Devenind un mod special de gândire, gândirea matematică a permis accesul la raționamentele necesare miilor de jocuri, care fac deliciul generației tinere și nu numai ei. Conștienți sau nu, pentru a face

față provocărilor impuse de jocurile din ce în ce mai complicate, tinerii apelează la raționamente de tip matematic.

După toate cele spuse mai sus, tot nu credem că se înțelege prea clar ce e cu matematica asta. Întrebarea firească pe care ar trebui să o punem este: ce reprezintă, de fapt, matematica?

După tipurile de probleme pe care le rezolvă, după metodele folosite, după rezultatele obținute, s-ar putea spune că matematica reprezintă oricare dintre activitățile umane enumerate mai jos și toate la un loc.

1. Matematica este **strădania omului** de a măsura cantitățile, distanțele, timpul, rezultatul acestei strădanii fiind necesar în aproape toate domeniile vieții sociale. Acesta este punctul de la care a plecat matematica.
2. Matematica este **o știință**, alături de fizică, chimie, arheologie, istorie, geografie, biologie, filozofie, psihologie și altele, rezultată din cercetarea matematică, cea care se bazează mai puțin pe observație și experimente, cât pe raționamente logice și propriul sistem de noțiuni, metode, axiome și sisteme axiomatice, teorii. După unii, matematica este cea mai importantă știință, „regina științelor”. Capitolul al II-lea al lucrării, care încearcă să aducă la un loc câteva moduri de prezentare a problemelor matematicii, se ocupă, ceva mai mult, de acest subiect.
3. Matematica este **un instrument** de bază în rezolvarea multelor probleme proprii, dar și a celor pe care le ridică celelalte științe. Peste tot e nevoie de matematică, motiv pentru care

aceasta a fost și este o componentă esențială a sistemului de educație. Încă din primii ani de viață, prin jocuri și jucării, copilul ia contact cu lumea atotcuprinzătoare a matematicii. Învățarea matematicii înseamnă, în primul rând, formarea unei gândiri logico-matematice, care este principalul nostru instrument de înțelegere a realității în care trăim. Scopul educației matematice nu este asimilarea de formule și teoreme, ci dezvoltarea unui mod de gândire care să permită, în timp, modelarea fenomenelor vieții reale. Modelele sunt cele care fac legătura dintre realitate și matematică și căutarea, găsirea și, apoi, studiarea lor trebuie să fie principalul obiectiv al matematicii. De asemenea, matematica modernă este chemată să ajute la organizarea și conducerea științifică a tuturor activităților economice sau de altă natură.

4. Matematica este **un limbaj interdisciplinar**, transformat într-o adevărată știință nouă, numită matematica interdisciplinară.
5. Matematica este **o artă**, implicată în multe alte arte cum ar fi pictura, grafica, designul, muzica, arhitectura, sculptura, poezia, literatura. Matematica aduce cu ea frumusețea și rigoarea, creativitatea, bucuria asociată găririi soluțiilor, plăcerea înțelegerii. Între artă și matematică există conexiuni puternice și influențe reciproce. Majoritatea operele de artă în domenii ca literatura, muzica, pictura, arhitectura, sculptura se realizează și se organizează (conștient sau nu) pe baza structurilor, relațiilor și tehnicilor matematice. Mii de lucrări mate-

matice s-au ocupat de modul în care concepte și rezultate matematice sunt implicate în lucrări de artă. Dar să nu uităm de emoția aproape estetică pe care ne-o conferă o construcție matematică, bucuria pe care ne-o dă o demonstrație elegantă a unei teoreme, satisfacția imensă pe care o avem atunci când, după ore de frământări, am găsit soluția unei probleme. Probleme strict legate de matematică, cum ar fi dualismul între ecuații și figuri geometrice, funcții și graficele lor, organizarea unor concepte și clasificări ale acestor concepte (conicele, cuadricele), ecuațiile diferențiale și lumea problemelor realității pe care acestea sunt chemate să le rezolve, frumusețea construcției sistemelor axiomatice, legăturile spectaculoase dintre algebră și geometrie, logica și eleganța unor demonstrații și soluții, a unor particularizări și generalizări, fascinația descoperirii matematicii în spatele oricărui fenomen din viața reală ne duc, adesea, în lumea fascinantă a artei [Tofan]. Etapa finală în rezolvarea unei probleme, în demonstrarea unei teoreme, poate furniza celui care învață o "iluminarea subită", însoțită de o "emoție pozitivă". Cei ce încearcă să-i învețe pe alții matematica trebuie să fie capabili să-i facă pe elevii lor să devină conștienți de importanța acestei etape, ca stimulent pentru efortul pe care-l fac.

6. Matematica este **un mijloc de formare a unor trăsături esențiale de caracter**: inteligență, creativitate (găsirea unor căi noi de rezolvare a problemelor, de folosire a unor metode diferite,



de a conceptualiza), curiozitate (manifestarea interesului pentru căutarea noului, dar și pentru chestiuni studiate pe parcursul timpului, pentru stabilirea unor noi rezultate, pentru generalizări, deschidere spre experiență), curaj (acea forță emoțională care implică exercitarea voinței de a-ți atinge scopurile, în ciuda obstacolelor), perseverență (să termini ce ai început, să continui să cauți soluții la probleme, în ciuda obstacolelor), seriozitate, încredere în sine, aprecierea frumuseții (apreciere pentru frumusețe și excelență într-o structură matematică, în soluția unei probleme, în construcția unei teorii), dar și frumusețea, excelența, performanța în diferite domenii ale științei, artei, naturii, dezvoltarea gândirii critice (evaluarea atentă a problemelor și examinarea lor din toate punctele de vedere), răbdare pentru a nu te mulțumi cu soluții incomplete sau, mai rău, greșite, evaluarea corectă a tuturor ipotezelor, cazurilor, înțelepciune (abilitatea de a da sfaturi celorlalți), îndrăzneală (să nu dai înapoi în fața eșecurilor, provocărilor, dificultăților).

7. Matematica este **un mijloc** cu ajutorul căruia se dezvoltă gândirea logică a celor care o învață și o folosesc, creativitatea, inițiativa. Scopul principal al studierii matematicii în școală nu este însușirea de cunoștințe, ci înarmarea elevilor cu un mod de gândire logic, rațional, creativ, care să le permită acestora să găsească

rezolvarea multora dintre problemele pe care li le pune în față realitatea.

8. Matematica este **o componentă a culturii generale**. Matematica ordonează gândirea, dezvoltă diferitele forme de raționament, capacitățile de analiză, sinteză, generalizare, furnizează algoritmi pe care îi aplicăm, apoi, de cele mai multe ori inconștient, în viața de zi cu zi.
9. Pentru toate considerentele de mai sus, matematica este o **disciplină școlară** din primul până în ultimul an de școală, chiar dacă asta se întâmplă, din nefericire, pentru unii.

Matematicianul român Solomon Marcus (1925-2016) are o listă de vreo douăzeci de așa-numite ipostaze ale matematicii, în care, în afara celor de mai sus, mai adaugă: fenomen social, joc, modă, mijloc de intimidare și chiar de terorizare, formă de snobism, posibilă formă de patologie, mod de înțelegere a vieții, a lumii, a propriei minți, parte a vieții noastre spirituale, filozofie și altele.

Matematica este, într-adevăr, o lume care ne ajută să trăim mai bine în viața noastră cea de toate zilele. Chiar dacă unii nu cred așa ceva, mult din tot ce există în civilizația umană se datorează matematicii. Lumea noastră pare a fi lumea matematicii. *Și atunci chiar este cazul să înțelegem și să iubim matematica!*