

Coordonator CRISTIAN HEUBERGER

Gheorghe Boroica

Nicolae Mușuroia

Vasile Pop

Florin Bojor

Cristian Heuberger

MATEMATICĂ DE EXCELENȚĂ

pentru concursuri, olimpiade și
centre de excelență

Clasa a XI-a

Volumul II. Analiză matematică



Cuvânt-înainte

Colecția „Matematică de excelență pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență” conține șase volume pentru liceu, destinate fiecărui an de studiu, și se adresează tuturor pasionaților de matematică, de orice vârstă. Ea vine să umple un gol care există de ani de zile, cu toată inflația de publicații matematice din ultima vreme. Demersul nostru aduce îmbunătățiri substanțiale ciclului de manuale pentru grupele de performanță pe care le-am elaborat în anul 2003, în cadrul unui colectiv care a materializat un proiect finanțat din fonduri europene. Temele abordate în cărțile actuale tratează atât cunoștințele din programele școlare, necesare elevilor pentru reușita la examenele de admitere la cele mai prestigioase universități din țară și de peste hotare, cât și pe toate cele prezente în programa elaborată de minister pentru pregătirea olimpiadelor județene și naționale de matematică. În plus, în multe dintre capitole există și paragrafe sau probleme care pot fi utilizate cu succes și de către elevii care se pregătesc pentru concursurile internaționale de matematică. De aceea, această colecție reprezintă un adevărat îndrumar pentru elevii și profesorii care activează în cadrul centrelor de excelență, atât prin conținuturi, cât și prin modalitatea de prezentare. Vastitatea informațiilor pe care le-am considerat necesare unei pregătiri *de excelență*, precum și relativa independență a unora dintre temele alese, ne-au făcut ca la clasele a XI-a și a XII-a să elaborăm câte două cărți distincte: *Algebră* și *Analiză matematică*.

Materialul suplimentar este prezentat complet din punct de vedere teoretic și este urmat de multe exemple, probleme (grupate, după dificultate, în două categorii) și teste de evaluare, care ilustrează noțiunile și tehnicile de lucru abordate și îl conduc pe cititor spre o mai bună înțelegere și încadrare în sistem a cunoștințelor pe care le are din manualele școlare. Sperăm ca testele inițiale, prezente la începutul fiecărei cărți, precum și cele finale să fie utile pentru o evaluare cât mai exactă a progresului elevilor. Mai mult decât atât, prin frumusețea problemelor alese (unele dintre ele sunt adevărate bijuterii matematice), prin ingeniozitatea abordărilor, prin explicațiile și comentariile detaliate pe marginea acestora, sperăm ca aceste cărți să contribuie la consolidarea unei gândiri matematice creative a tinerilor cititori, care să treacă dincolo de șabloane.

Dorim ca această colecție să reprezinte o adevărată pledoarie pentru MATEMATICĂ.

Autorii

CUPRINS

TESTE ÎNȚIALE	9
SOLUȚIILE TESTELOR ÎNȚIALE	10
1. MULȚIMI DENSE (GHEORGHE BOROICA, VASILE POP)	14
2. ȘIRURI (FLORIN BOJOR)	35
3. ȘIRURI RECURENTE (NICOLAE MUȘUROIA, VASILE POP)	77
4. LIMITE DE FUNCȚII (NICOLAE MUȘUROIA, FLORIN BOJOR)	117
5. CONTINUITATE (GHEORGHE BOROICA, NICOLAE MUȘUROIA)	141
6. PROPRIETATEA LUI DARBOUX (CRISTIAN HEUBERGER).....	167
7. TEOREMELE DE MEDIE ALE CALCULULUI DIFERENȚIAL (GHEORGHE BOROICA, NICOLAE MUȘUROIA).....	189
8. FUNCȚII CONVEXE (GHEORGHE BOROICA, FLORIN BOJOR)	208
9. POLINOMUL TAYLOR ASOCIAT UNEI FUNCȚII (GHEORGHE BOROICA).....	229
10. ECUAȚII TRANSCENDENTE (NICOLAE MUȘUROIA).....	250
11. ECUAȚII FUNCȚIONALE ÎN ANALIZA MATEMATICĂ (VASILE POP).....	270
12. METODE TOPOLOGICE ÎN PROBLEME DE GEOMETRIE (VASILE POP).....	292
TESTE FINALE	312
SOLUȚIILE TESTELOR FINALE	313
BIBLIOGRAFIE	318

CAPITOLUL 1. MULȚIMI DENSE

Rezultatele de bază sunt teorema lui Dirichlet și teorema lui Kronecker, teoreme ce joacă un rol important mai ales în probleme de teoria numerelor. Cu ajutorul acestor teoreme se pot rezolva ușor unele probleme dificile cu enunț elementar.

1.1. Definiție. O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numește densă în $\mathbb{R}$ dacă orice element din $\mathbb{R}$ este limita unui șir neconstant de elemente din A .

Facem precizarea că mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ este densă în $\mathbb{R}$ dacă pentru oricare $a \in \mathbb{R}$ și orice vecinătate V a punctului a avem că $V \cap A$ este infinită.

1.2. Definiție. O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ este densă în $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ orice interval $I \subset \mathbb{R}$, de lungime nenulă, conține cel puțin un element din A .

Demonstrație. „ $\Rightarrow$ ” Presupunem că A este densă în $\mathbb{R}$. Trebuie demonstrat că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, există $x \in A$ astfel încât $x \in (a, b)$. Presupunem contrariul. Atunci, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ astfel încât pentru $\forall x \in A$ să avem că $x \notin (\alpha, \beta)$ (1).

Fie $u = \frac{\alpha + \beta}{2} \in (\alpha, \beta)$. Cum A este densă în $\mathbb{R}$, există un șir (x_n) de elemente din A astfel încât pentru orice $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$, să avem $x_n \in (\alpha, \beta)$ căci (α, β) este o vecinătate pentru u . Aceasta este o contradicție cu (1), deci presupunerea făcută este falsă.

„ $\Leftarrow$ ” Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, în intervalul $\left(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right)$ se află cel puțin un element $a_n \in A$.

Deoarece $\alpha - \frac{1}{n} < a_n < \alpha + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu teorema cleștelui obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$. Așadar, A este densă în $\mathbb{R}$.

1.3. Exemplu. Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este densă în $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrare, $a < b$ și $I = (a, b)$. Atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a + n > 0$. Considerăm numerele $a_1 = a + n$, $b_1 = b + n$. Deoarece $b_1 - a_1 = b - a > 0$, va exista $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $(b_1 - a_1) \cdot k > 1 \Leftrightarrow 1 + k \cdot a_1 < k \cdot b_1$.

Fie $m > k \cdot a_1$, deci $m - 1 \leq k \cdot a_1$.

Atunci $m \leq 1 + k \cdot a_1 < k \cdot b_1$, deci $k \cdot a_1 < m < k \cdot b_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + n < \frac{m}{k} < b + n \Leftrightarrow a < \frac{m}{k} - n < b$, de unde

$\frac{m}{k} - n \in I \cap \mathbb{Q}$, deci $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$.

1.4. Exemplu. Mulțimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a numerelor iraționale este densă în $\mathbb{R}$.

CAPITOLUL 2. ȘIRURI

2.1. Limita unui șir. Subșiruri

În cele ce urmează considerăm cunoscute noțiunile de bază din teoria șirurilor, iar în acest capitol vom face o completare a acestor noțiuni.

Pentru început, prezentăm caracterizarea limitei unui șir cu criteriul (ε, n) .

2.1.1. Teoremă. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Atunci:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - \ell| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < -\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.

2.1.2. Exemplu. Pentru a demonstra că $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$, unde $a \in (-1, 1)$, alegem $\varepsilon > 0$

și rezolvăm inecuația $|a^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |a|^n < \varepsilon$ (*).

Dacă $a = 0$ relația este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci putem alege $n_\varepsilon = 1$.

Dacă $a \in (-1, 1) \setminus \{0\}$, atunci inegalitatea (*) este echivalentă cu

$n \ln |a| < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |a|}$. Alegând $n_\varepsilon = \max \left\{ 0, \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln |a|} \right\rceil + 1 \right\}$, rezultă că

$|a^n - 0| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

2.1.3. Definiție. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale și $(k_n)_{n \geq 0}$ un șir strict crescător de numere naturale. Atunci șirul $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ se numește subșir al șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

2.1.4. Exemplu. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin $x_n = \sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$ admite subșirurile

$$(x_{2n})_{n \geq 0}, x_{2n} = \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{ și}$$

$$(x_{2n+1})_{n \geq 0}, x_{2n+1} = \sin \frac{(4n+3)\pi}{2} = \sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi \right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

2.1.5. Exemplu. Șirurile $(x_{n+1})_{n \geq 0}, (x_{n+2})_{n \geq 0}$ sunt subșiruri ale șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

În continuare vom prezenta legăturile dintre proprietățile unui șir și ale subșirurilor sale.

CAPITOLUL 8. FUNCȚII CONVEXE

8.1. Definiție. O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numește mulțime *convexă* dacă $\forall x, y \in A$ și $\forall t \in [0, 1]$, avem că $tx + (1-t)y \in A$.

- 8.2. Exemple.** a) $\mathbb{R}$ este o mulțime convexă.
b) Orice interval $I \subseteq \mathbb{R}$ este o mulțime convexă.
c) Mulțimea vidă este o mulțime convexă.
d) Mulțimea $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ nu este convexă.

8.3. Definiție. Fie I un interval de numere reale și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție.

- a) Spunem că funcția f este *convexă* pe I dacă $\forall x_1, x_2 \in I$ și $\forall t \in [0, 1]$, are loc

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

- b) Spunem că funcția f este *concavă* pe I dacă $\forall x_1, x_2 \in I$ și $\forall t \in [0, 1]$, are loc

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

- c) Spunem că funcția f este *strict convexă* (*strict concavă*) pe I dacă inegalitățile de mai sus sunt stricte, $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ și $\forall t \in (0, 1)$.

8.4. Observație. O funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă pe I dacă și numai dacă funcția $-f$ este concavă.

8.5. Interpretare geometrică. Fie I un interval și $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ fixate.

Orice punct $x \in (x_1, x_2)$ se scrie sub forma $x = x_t = tx_1 + (1-t)x_2$, unde $t \in (0, 1)$.

Dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă pe I , atunci:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

adică
$$f(x_t) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Fie $A(x_1, f(x_1))$ și $B(x_2, f(x_2))$, atunci segmentul $[AB]$ este graficul funcției:

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

În consecință, graficul funcției cuprins între A și B este situat sub coarda AB , pentru orice puncte $A, B \in G_f$.

TESTE FINALE

TESTUL F.1

F.1.1. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 = \sqrt{2}$ și $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $\forall n \geq 0$.

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{2} \right)^n$.

F.1.2. Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, strict descrescătoare, cu $g(\mathbb{R}) = (-\infty, 0)$.
Demonstrați că nu există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, cu proprietatea că $\exists k \geq 2$ astfel încât $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k \text{ ori } f} = g$.

F.1.3. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de două ori derivabile, astfel încât să aibă loc egalitatea $f \cdot f'' = (f^2)' - (f')^2$.

Cristian Heuberger

TESTUL F.2

F.2.1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică proprietatea: $\exists M > 0$ astfel încât $|f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - f(x_1) - f(x_2) - \dots - f(x_n)| \leq M, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Demonstrați că $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

F.2.2. Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietățile $f(0) = 0$ și $f(x) + f'(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1]$. Determinați valoarea maximă a lui $f(1)$.

F.2.3. Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție concavă și crescătoare astfel încât $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$. Demonstrați că $f(x)f^{-1}(x) \leq x^2, \forall x \in [0, 1]$.

TESTUL F.3

F.3.1. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+2} - x_n) = 0$.

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{n}$.