

Utilizează proprietățile numerelor

Ați remarcat că numerele naturale pot fi pare sau impare. Ați mai observat, desigur, că unele numere naturale, și anume cele care se termină în 0 sau 5, se împart cu rest 0 la 5, iar celelalte nu. Sau altfel: produsul oricărui număr natural cu un număr ce se termină în 5 este un număr care se termină în 0 sau 5.

Determinarea delimpărțitului, împărțitorului, cîntului și a restului dintr-o împărțire deschide noi cîi de cunoaștere a numerelor naturale și a proprietăților lor.

Regula parității permite și ea obținerea de soluții imediate în multe probleme (vezi principiul parității).

Utilizarea proprietăților numerelor s-a dovedit a fi indicată atunci când:

- în enunț sunt folosite tipuri „speciale” de numere (pare, impare, interesante, curioase);
- problema poate fi simplificată prin utilizarea unor proprietăți anumite ale numerelor;
- problema implică foarte multe calcule.

PROBLEMA

Pot fi înlocuite stelușele din egalitatea

$$10 * 9 * 8 * 7 * \dots * 2 * 1 = 0$$

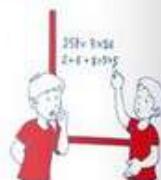
prin semnele „+” sau „-”, astfel încât egalitatea să devină adevărată?

Pasul 1: Înțelege problema

În membrul stâng trebuie să înlocuim fiecare steluș cu un semn plus sau minus, astfel încât să obținem totalul 0, un număr par.

Pasul 2: Fă-ți un plan

Vom calcula suma celor 10 numere (deci vom considera toate semnele „+”) și apoi vom vedea ce se întâmplă cu paritatea sumei când înlocuim un semn „+” cu unul „-“.



Pasul 3: Utilizează planul făcut

Sumă celor zece numere este 55, un număr impar. Dacă înlocuim un semn „+” cu un semn „-“, se obține un număr mai mic cu dublul numărului dinaintea căruia apare semnul „-“, deci paritatea membrului stâng nu se schimbă ($nr.\:impar - nr.\:par = nr.\:impar$).

Așadar, oricare semne „+” am transforma în semne „-“, numărul din dreapta relației rămâne impar. Or, cum spuneam, numărul 0 este par. Așadar, în condițiile enunțului, egalitatea dată nu poate fi adevărată!

Pasul 4: Întoarce-te la enunț

Problema are soluție pentru egalitatea

$$11 * 10 * 9 * 8 * 7 * \dots * 2 * 1 = 0, \text{ deoarece}$$

$$11 + 10 + 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1 = 66$$

și putem găsi o sumă de numere (dintre cele din primul termen) egală cu 66 : 2, de exemplu: $10 + 9 + 8 + 6 = 33$

Rezolvă următoarele probleme utilizând proprietățile numerelor:

1) Într-o pungă sunt mai mult de 90 de bomboane, dar mai puțin de 100. Jumătate din bomboane sunt cu portocale, o treime sunt cu căpșuni, iar restul sunt cu mentă. Câte bomboane cu mentă sunt în pungă?

2) Victor a rupt la întâmplare 19 file dintr-o carte și apoi a adunat numerele celor 38 de pagini rupte. A obținut suma 909.

Explica-lui Victor de ce a greșit calculul.

3) Orice număr este *fraier* sau *șmecher*. Dacă un număr este *șmecher*, atunci și numărul mai mare cu 10 este *șmecher*. Dacă un număr este *fraier*, rezultă că numărul mai mare cu 15 este tot *fraier*.

Arată că numerele 20 și 25 sunt *șmechere* sau *fraiere*.

4) Poți desena 9 linii astfel încât fiecare dintre ele să intersecteze exact 3 dintre celelalte?

5) Pe tablă au fost scrise în ordine numerele naturale:

$$2, 3, 4, 11, 13, 15, 25, 28, 30,$$

Adina și Teodora taie fiecare căte 4 numere, astfel încât suma numerelor tăiate de

ani și Mihai 12 ani.

4. Chiar organizarea enunțului problemei ne indică problemele mai simple în care poate fi desfășurată rezolvarea.

a) Care este cel mai mare număr? Răspuns: $36 - 25 = 11$

b) Care este cel mai mic număr? Răspuns: $36 - 35 = 1$

c) Care este suma celorlalte patru numere? Răspuns: $36 - 11 - 1 = 24$

d) Care este suma dintre cel mai mare și cel mai mic număr din cele patru (de mijloc)? Răspuns: $24 : 2 = 12$

e) Cum sunt cele patru numere? Răspuns: mai mari decât 1 și mai mici decât 11, deci sunt 4 numere diferite din grupul 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

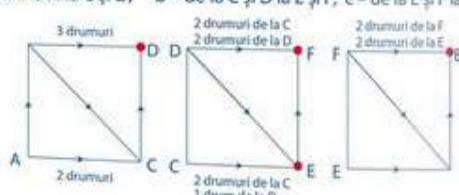
f) Ghicește și verifică două perechi de numere diferențe cu suma 12.

Le aranjăm într-un tabel în care sunt prezentate variantele (șase la număr) de alegere a celor patru numere:

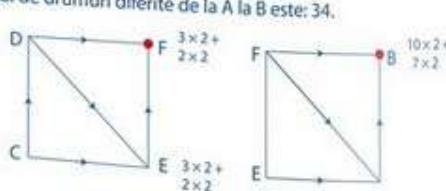
Numerele extreme	2	2	2	3	3	4
10	10	10	9	9	8	
Numerele de mijloc	3	4	5	4	5	5
9	8	7	8	7	7	

5. Vom număra, prin câteva probleme mai simple, numărul de drumuri prin care putem ajunge:

a – de la A la C și D; b – de la C și D la E și F; c – de la E și F la B.



Numărul total de drumuri diferențe de la A la B este: 34.



Realizează un desen

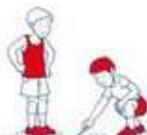
Unele probleme cu care te întâlnesti descriu o situație din natură, din viață, și adeseori un desen te poate ajuta să înțelegi problema mai bine și să formulezi un plan de rezolvare.

Un bun exemplu este problema ce urmează. Încearcă să ajungi la soluție fără să te uiți la desen!

La găsirea unei soluții convenabile vei înțelege căt de util este un desen. Un desen nu vorbește, dar spune multe – remarcă un înțelept.

Un desen va fi potrivit când:

- există o situație din viață, reală, palpabilă;
- vrei să ai o mai bună înțelegere a problemei;
- este posibilă o reprezentare vizuală a problemei;
- sunt prezentate măsuri pe forme geometrice.



PROBLEMĂ

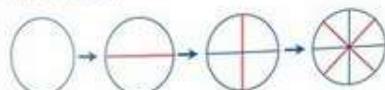
Poți să tai o pizza în 11 bucăți doar din patru tăieturi?

Posul 1: Înțelege problema

Trebui să fie de aceeași formă și mărime?

Posul 2: Fă-ți un plan

Să încercăm să decupăm, într-un desen, pizza în bucăți în care se tale de obicei:



Din păcate, ajungem prin patru tăieturi la numai 8 bucăți.

Posul 3: Utilizează planul făcut

Așadar, cele 11 bucăți nu pot fi de aceleași dimensiuni.



2. În aranjarea prezentată constatăm că:

- suma fiecărei perechi de numere pe o verticală este 92;
 - numerele de pe prima linie sunt de forma $4 \times n + 1$;
 - numerele de pe a doua linie sunt de forma $4 \times m - 1$.
- a) Numărul 43 are forma $4 \times 11 - 1$, deci se află pe a doua linie.
b) Verificăm. Într-adevăr, numărul $53 = 4 \times 13 + 1$ aparține primului rând.
Lui îi corespunde $92 - 53 = 39$ din al doilea rând.
c) Numărul 62 nu are niciuna dintre formele $4 \times n + 1$ sau $4 \times m - 1$, deci nu aparține aranjării.

3. În al patrulea rând, termenii celor două sume continuă numărătoarea, alcătuind o sumă din cinci termeni consecutivi în stânga egalității și încă patru termeni consecutivi în dreapta:

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24.$$

Urmează: $25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35$
și $36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 = 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48$.
Verifică dacă n-am greșit cumval!

4. După ce adună numerele zise de cei doi copii, ROBO mai adaugă suma cifrelor sumei.

Astfel:

$$\begin{array}{ll} 6 + 4 = 10; & 10 + 1 + 0 = 11 \\ 11 + 6 = 17; & 17 + 1 + 7 = 25 \\ 9 + 12 = 21; & 21 + 2 + 1 = 24 \\ 20 + 14 = 34; & 34 + 3 + 4 = 41 \end{array}$$

Ce număr a zis Gabriela ultima oară? Evident, un număr mai mic decât $33 - 18 = 15$. Prin încercări de tip [ghicește și verifică] calculăm $18 + 14$, $18 + 13$ și ajungem la relația $18 + 12 = 30$, iar $30 + 3 + 0 = 33$.

Deci Gabriela a spus numărul 12.

5. Regula poate fi dată de relația generală:

$$(n+1) \times (n+1) - (n+1) = n \times n + n$$

Atunci: $(n+1) \times (n+1) - n \times n = n+1+n$
Deci $999 \times 999 - 998 \times 998 = 999 + 998 = 1997$.

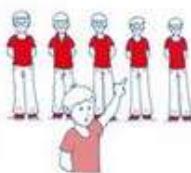
Utilizează un număr necunoscut

Uneori, pentru a rezolva o problemă, suntem nevoiți să dăm un număr temporar unui număr necunoscut, care să ne permită să efectuăm calcule fără a-l identifica imediat.

A devenit un obicei de a-l numi cu o (singură) literă. Metoda figurativă utilizează în mod curent numere necunoscute.

Utilizarea unui număr necunoscut este recomandată atunci când:

- în enunț există sau este sugerată o expresie asemănătoare cu expresia „pentru orice număr”;
- este sugerat un număr necunoscut într-o relație cu numere cunoscute;
- întâlnim în enunț atribute precum „pare”, „impare”, „consecutive”;
- se încearcă găsirea unei relații generale;
- într-o problemă cu numere este cerută o probă.



PROBLEMĂ

Dacă împărțim un număr natural la 9 obținem restul 4.

Care este restul împărțirii numărului la 3?

Pasul 1: Înțelege problema

Există oricăr de multe numere naturale care, la împărțirea cu 9, dau restul 4.

Numărul necunoscut este în această problemă cátul împărțirii.

Pasul 2: Fă-ți un plan

Utilizând un număr necunoscut, fie el C (de la cát), reprezentăm toate numerele care satisfac condiția din enunț sub forma $9 \times C + 4$ și facem cu ele calculele necesare.

Pasul 3: Utilizează planul făcut

Vom împărți numerele de forma $9 \times C + 4$ la 3 pentru a afla restul la această împărțire:

$$\begin{aligned}(9 \times C + 4) : 3 &= 9 \times C : 3 + 4 : 3 \\ &= 3 \times C + 1, \text{ rest } 1.\end{aligned}$$