

MATEMATICĂ

Suport teoretic și exerciții aplicative

colecția
Înveți cu placere

Ion Cicu • Silvia Mareș • Ioana Iacob • Răzvan Ceucă • Andrei Băleanu

Clasa a VI-a



Construcție teoretică
Intuitivă

Învățare
centrată pe elev

Activități de fixare
și de proiect

Probleme
rezolvate

Interdisciplinaritate

Cuprins

1. Recapitulare	7
2. Multimi. Multimea numerelor naturale	13
2.1. Descriere, notări, reprezentări ale mulțimilor. Mulțimi numerice/număruri	14
2.2. Relația dintre un element și o mulțime. Relații între mulțimi	16
2.3. Mulțimi infinite, multimea numerelor naturale	19
2.4. Operații cu mulțimi: reunire, intersecție, diferență	21
2.5. Recipitalare	24
2.6. Evaluare	26
2.7. Exerciții și progresează	26
3. Rapoarte și proporții	28
3.1. Rapoarte, probabilități	29
3.2. Proporții, proprietățile fundamentale a proporțiilor, determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție	32
3.3. Proporții derivate	34
3.4. Sir de rapoarte egale: mărime direct proporțională, mărime invers proporțională	37
3.5. Regula de trei simplă	41
3.6. Elemente de organizare a dateelor	42
3.7. Recipitalare	45
3.8. Evaluare	46
3.9. Exerciții/Corocștei/Progresă	47
4. Multimea numerelor întregi	50
4.1. Multimea numerelor întregi; opusul unui număr întreg; reprezentarea pe axa numerelor; modulul unui număr întreg	51
4.2. Comparația și ordonarea numerelor întregi	54
4.3. Adunarea numerelor întregi, proprietăți	56
4.4. Săstrerea numerelor întregi	58

4.		
4.5.	Înmulțirea numerelor întregi; proprietăți; împărțirea numerelor întregi cînd deținătorul este multiplu al împărtășitorului	59
4.6.	Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul, reguli de calcul cu puteri	61
4.7.	Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	63
4.8.	Ecuții, inecuații	64
4.9.	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi	67
4.10.	Recapitulare	69
4.11.	Evaluare	70
4.12.	Exerciții și progresează	71
5.	Divizibilitate	72
5.1.	Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	73
5.2.	Cel mai mare divisor comun (c.m.m.d.c.) și cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.). Numere prime între ele	74
5.3.	Proprietăți ale divizibilității în \mathbb{N}	77
5.4.	Recapitulare	78
5.5.	Evaluare	79
5.6.	Exerciții și progresează	80
6.	Mulțimea numerelor rationale	81
6.1.	Numețrational. Mulțimea numerelor rationale. Reprezentarea pe axă. Operații și modulul unui număr rațional	82
6.2.	Componența și ordonarea numerelor raționale	85
6.3.	Adunarea numerelor raționale. Proprietăți. Scăderea numerelor raționale	87
6.4.	Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale	89
6.5.	Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional. Reguli de calcul cu puteri	92
6.6.	Ordinea operațiilor și folosirea parantezelor	95
6.7.	Ecuții. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	97
6.8.	Recapitulare	99
6.9.	Evaluare	101
6.10.	Exerciții și progresează	102
7.	Unghiiuri	103
7.1.	Unghiiuri complementare, unghiiuri suplementare; unghiiuri opuse la virf, congruență loc; unghiiuri formate în jurul unui punct, suma măsurilor lor	104
7.2.	Unghiiuri adjacente; bisectoare unui unghi, construcția bisectoarei unui unghi	109
7.3.	Recapitulare	112

7.4. Evaluare	113
7.5. Exercizi și progresori	114
8. Drepte paralele și drepte perpendiculare	115
8.1. Drepte paralele (definiție, notație, construcție intuitivă prin translatăre); axioma paralelezor	116
8.2. Criterii de paralelism (unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă)	118
8.3. Drepte perpendiculare în plan (definiție, notație, construcție); oblic; aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice; distanța de la un punct la o dreaptă	122
8.4. Mediatorema unui segment; construcția mediatoarei unui segment; simetria față de o dreaptă	124
8.5. Recapitulare	126
8.6. Evaluare	127
8.7. Exercizi și progresori	128
9. Cercul	129
9.1. Cerc (definiție, construcție); elemente în cerc: centru, rază, coardă, diametru, arc de cerc; unghi la centru; măsoare	131
9.2. Pozițiile unei drepte față de un cerc; pozițiile relative a două cercuri	133
9.3. Recapitulare	137
9.4. Evaluare	138
9.5. Exercizi și progresori	139
10. Triunghiul	140
10.1. Triunghiul: definiție, elemente; clasificare; perimetru	141
10.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi; unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior	143
10.3. Construcția triunghiurilor: cazurile LUL, ULU, LLL; inegalități între elementele triunghiului (observate din măsurile de construcție)	145
10.4. Recapitulare	147
10.5. Evaluare	149
10.6. Exercizi și progresori	150
11. Linii importante în triunghi	151
11.1. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi: concurență, cercul inscris în triunghi; mediatorele laturilor unui triunghi: concurență, cercul circumscris unui triunghi	152
11.2. Înlățimile unui triunghi: definiție, construcție, concurență; medianele unui triunghi: definiție, construcție, concurență	155
11.3. Recapitulare	160
11.4. Evaluare	161

11.3. Exerciții și progresezi	162
12. Congruență triunghiurilor	165
12.1. Congruență triunghiurilor careau criterii de congruență a triunghiurilor LUL, ULU, LLL	166
12.2. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice: CC, IC, CU, IU	169
12.3. Metoda triunghiurilor congruente, aplicații: proprietăți speciale de pe bisectoarele unui unghi/medianele unui segment	172
12.4. Recapitulare	175
12.5. Evaluare	176
12.6. Exerciții și progresezi	177
13. Triunghiuri particulare	179
13.1. Proprietăți ale triunghiului isoscel; proprietăți ale triunghiului echilateral	180
13.2. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	183
13.3. Recapitulare	189
13.4. Evaluare	190
13.5. Exerciții și progresezi	191
14. Recapitulare finală	192
14.1. Algebră	192
14.2. Geometrie	195
Indicații și răspunsuri	198

2. Multimi. Multimea numerelor naturale

1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în \mathbb{N}

- Recunoașterea unor mulțimi finite sau infinite (mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor naturale pare/impare, mulțimea cifrelor număr natural, mulțimea divizorilor/multiploilor unui număr natural)

- Definirea unor mulțimi folosind diagrame și/sau enumerarea elementelor

2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de inclusiune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 3, 10^o, 3 și 9 în \mathbb{N}

- Recunoașterea și exemplificarea de elemente care aparțin/nu aparțin unei mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor

- Recunoașterea și exemplificarea de mulțimi date prin diagrame sau prin enumerarea elementelor; mulțimi care sunt sau nu în relație de inclusiune

3.1. Utilizarea unor modalități adecvante de reprezentare a mulțimilor și de determinare a c.m.m.d.c. și a c.m.m.m.c.

- Reprezentarea unor mulțimi prin diagrame și/sau prin enumerarea elementelor

- Executarea de operații cu mulțimi (reuniune, intersecție, diferență) punând accentul pe exemple practice

4.1. Exprimarea în limbaj matematică a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în \mathbb{N}

- Exprimarea în limbaj matematică a unor caracteristici ale elementelor unor mulțimi finite (de exemplu, mulțimea cifrelor pare)

- Formularea unor enunțuri simple folosind enunțele „ \in ”, „ \subseteq ”, „ \subset ” în contextul operațiilor cu mulțimi

5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în \mathbb{N}

- Asocierea „număr la număr” a elementelor a două mulțimi finite care au același cardinal

- Estimarea cardinalului unei mulțimi în contexte practice-aplicative (de exemplu: numărul elevilor școlii, numărul nobilor obrajute de un elev într-un semestru, numărul orășelor din județ)

6.1. Transpunerea, în limbaj matematică, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în \mathbb{N}

- Deducerea unei concluzii imediate care decurg din analizarea unui set de date asociate mulțimilor (de exemplu, în general $A \setminus B$ este diferită de $B \setminus A$)

- Interpretarea unor situații practice sau interdisciplinare (de exemplu, numărul cardinal/ordinal) folosind limbajul specific mulțimilor și operațiilor cu mulțimi

- Interpretarea unor noțiuni de bază din geometrie (punct, segment, semidreaptă, dreaptă; poziții relative: punct-dreaptă, dreaptă-dreaptă) utilizând limbajul specific mulțimilor

2.1. Descriere, notatii, reprezentari ale multimilor. Multimi numerice/nenumerice

Observații și descoperiri

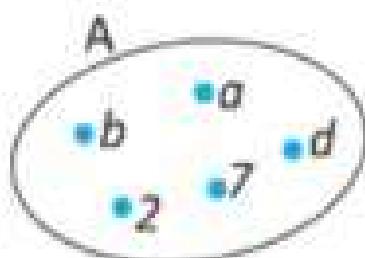
1. Numește cu un singur cuvânt o caracteristică comună a imaginilor de mai jos:



Important

- Multimea este o colecție de obiecte.
Obiectele dintr-o mulțime se numesc **elementele mulțimii**.
- Multimea se notează cu litere mari: A , B etc.
- Într-o mulțime, un element apare o singură dată (nu poate să apară de mai multe ori).
- Nu există ordine în care sunt prezentate elementele unei mulțimi.
- Cum potem prezenta o mulțime?

Prin diagramă



Mulțimea A este formată din elementele a , b , c , d , e .

Prin enunțare

$$B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$$

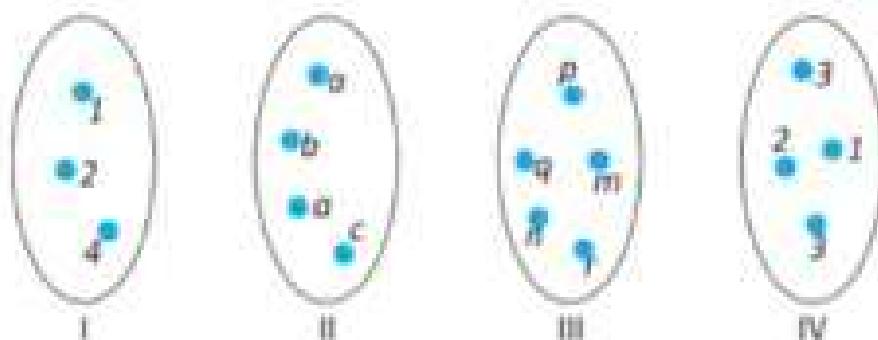
Mulțimea B este formată din elementele 1, 2, 3, 6, 9.

- Multimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă** și se notează cu simbolul \emptyset .
- Multimiile în care toate elementele sunt numere se numesc **multimi numerice**.
Esempiu: Mulțimea B de mai sus este o mulțime numerică, în timp ce mulțimea A nu este o mulțime numerică.

Exercițiu!

2. Serie multimese elevilor din clasa ta care sunt pe rândul de la ghem.

3. Care dintre diagramele următoare îți reprezintă o mulțime? Argumentează răspunsul dat.



4. Notează mulțimile de mai sus cu litere mari și enumerați elementele acestora. Precizează care dintre acestea este o mulțime numerică.

5. Observă imaginea dată.

a) Serie multimese formată din numele fructelor, prin enumerarea elementelor.

b) Serie între-o diagrame mulțimese formată din numele fructelor verzi.



6. Serie multimese cifrelor din care sunt formate următoarele numere naturale: 21 251, 382 729 361, 13 609 631, 270 923 572, 7 042 235 442.

(Exemplu: Mulțimea cifrelor numărului 21210 este $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

7. Serie multimese literelor din care sunt formate circuitele: ciclare, roție, divizabil, invizibil, motor, tractur.

8. Serie multimese numerelor naturale mai mici sau egale cu 7.

9. Serie multimese numerelor naturale pare cuprinse între 2 și 10.

10. Serie multimese divizorilor numărului natural 8.

11. Serie multimese numerelor naturale de două cifre divizibile cu 5.

12. Lăsați în perioadă. Împreună cu un coleg/a colegă formațiă două mulțimi numerice și două mulțimi nenumerice. Reprezentați-le pe fiecare prin enumerarea elementelor și cu ajutorul diagrameelor.

2.2. Relația dintre un element și o mulțime. Relații între mulțimi

Obiectiv și descoperiri

1. În figura alăturată este reprezentată oglinda clasei a VI-a, (cum sunt aprenți elevii în banci).

Mulțimea elevilor din clasă este

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Exemplu: 1 = Ana, 2 = Radu și.m.d.

a) Serie mulțimea elevilor de pe rândul din mijloc și notează-o cu M .

b) Serie mulțimea elevilor care stau în prima bancă și notează-o cu P .

c) Pentru următoarele afirmații completează cu A, dacă afirmația este adevărată și cu F, dacă afirmația este falsă.

Catedre		
1. Ana	6. Sandu	11. Angelica
2. Radu	7. Raluca	12. Silvia
3. Dan	8. Emanuel	13. Răvan
4. Maria	9. Costel	14. Ștefan
5. Cornel	10. Simona	15. Ioana

- Emanuel este element al mulțimii M .
- 11 este element al mulțimii P .
- 10 este element al mulțimii M .
- Toate elementele mulțimii M sunt și în mulțimea C .
- Radu este element al mulțimii C .
- Toate elementele mulțimii P sunt și în mulțimea M .
- 2 este element al mulțimii M .
- Toate elementele mulțimii P sunt și în mulțimea C .
- 12 nu este element al mulțimii M .
- Toate elementele mulțimii C sunt și în mulțimea M .

Important

- Dacă un element x se găsește într-o mulțime A , spunem că elementul x aparține mulțimii A și scriem $x \in A$.

Exemplu: Pentru că 10 este element al mulțimii M scriem $10 \in M$.

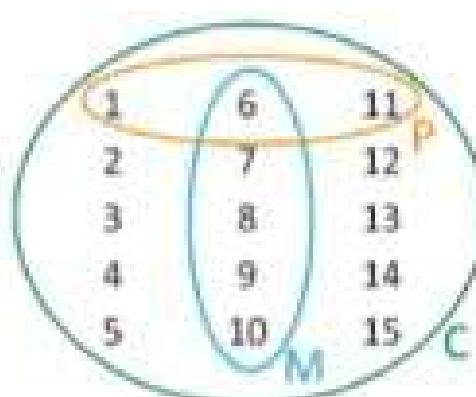
- Dacă un element x nu se găsește într-o mulțime A , spunem că elementul x nu aparține mulțimii A și scriem $x \notin A$.

Exemplu: Pentru că 12 nu este element al mulțimii M scriem $12 \notin M$.

- Dacă orice element al unei mulțimi A aparține mulțimii B , spunem că mulțimea A este inclusă în mulțimea B și scriem $A \subset B$.

- Dacă mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B , scriem $A \not\subset B$.

Exemplu: Orice element al mulțimii P aparține mulțimii C . Spunem că mulțimea P este inclusă în mulțimea C și scriem $P \subset C$. Pentru că nu toate elementele mulțimii P aparțin mulțimii M , spunem că mulțimea P nu este inclusă în mulțimea M și scriem $P \not\subset M$.



- Dacă $A \subset B$ spunem că mulțimea A este o submulțime a mulțimii B .

Exemplu: Orice element al mulțimii P aparține mulțimii C . Mulțimea P este o submulțime a mulțimii C .

- Mulțimea vidă este submulțime a oricărui mulțimii.

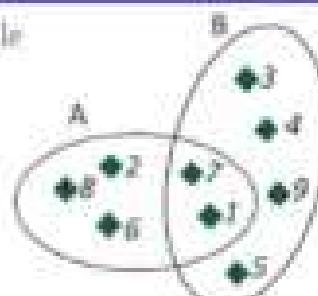
- Dacă $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$. Dacă $A = B$, atunci $A \subset B$ și $B \subset A$.

Exemplu: Dacă $N = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ și $M = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, atunci $N = M$ pentru că $N \subset M$ și $M \subset N$ (orice element al mulțimii N aparține mulțimii M și orice element al mulțimii M aparține mulțimii N).

Exercițiu 1

2. Observă figura alăturată și stabilește care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate și care sunt false.

- $2 \in A$
- $8 \notin B$
- $7 \in B$
- $1 \in A$
- $7 \in A$
- $9 \notin B$
- $3 \in A$
- $6 \in B$
- $5 \in B$



3. Copiază tabelul alăturat în caiet și completează-l după model, folosind informațiile din figura de la exercițiul 2.

4. Se consideră multimiile $C = \{a, b, c, d, e, f\}$ și $D = \{b, d, e, f, g, h, i\}$. Completează un tabel ca cel alăturat pentru multimiile C și D .

5. Se consideră multimiile $A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Care dintre relațiile de mai jos sunt adevărate?

- a) $3 \in A$; b) $4 \in B$; c) $4 \in C$; d) $4 \notin D$;
- e) $7 \in A$ sau $7 \in B$; f) $6 \in A$ și $6 \in C$; g) $7 \in B$ și $7 \notin C$; h) $A \subset B$;
- i) $B \subset C$; j) $C \subset D$; k) $A \subset C$; l) $B \subset D$.

	<i>A</i>	<i>B</i>
1	ε	ε
2	ε	ε
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

6. Scrise totale submultimile următoarelor multimi: $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b, c, d\}$.

Exemplu: Submultimile multimi $M = \{1, 2\}$ sunt: \emptyset , {1}, {2}, {1, 2}.

7. Determină multimea cu cel mai mare număr de elemente pentru care $\{1, 3, 5\}$ și $\{2, 3, 4\}$ sunt submultimi ale ei.

8. Completează cu A, dacă afirmația este adevărată și cu F, dacă afirmația este falsă:

- a) {2} este o submultime a multimiții divizorilor numărului 32. □
- b) Multimea {5, 15, 25} este inclusă în multimea multiplilor lui 5. □
- c) 2 aparține multimiții multiplilor lui 5. □

9. Se consideră multimiile $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, f, g, h\}$, $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

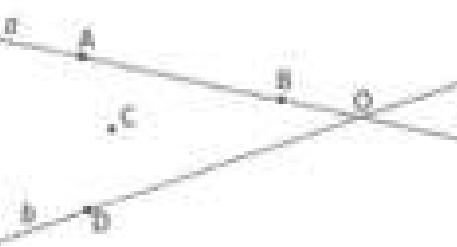
- a) Identifică și scrie un element care aparține doar multimiții C .
- b) Scrie o submultime cu 3 elemente a multimiții C .
- c) Verifică dacă $A \subset C$, justificând răspunsul dat.
- d) Reprezintă cu ajutorul diagrameelor cele trei multimi: A , B și C , având în vedere relațiile dintre acestea.

10. Determină numerele x și y , stînd că multimiile $A = \{1, 2, 3, x\}$ și $B = \{1, 3, 4, y\}$ sunt egale.

11. Se consideră multimiile $A = \{2, 2x + 1, x + 2, 3\}$ și $B = \{x, x + 1, 4, 5\}$. Determină numărul natural x pentru care cele două multimi sunt egale.

12. Observă figura alăturată și completează, împreună cu colegul de bancă, spațiile punctate, utilizând expresiile aparține/nu aparține, este inclus/nu este inclus:

- a) punctele A și B ... dreptei a , iar punctul D ... dreptei b și ... dreptei a ;
- b) segmentul AB ... în dreapta a și ... în dreapta b ;
- c) semidreapta AD ... în dreapta a ;
- d) punctul C ... interiorul unghiului AOD .



2.3. Multimi infinite, multimea numerelor naturale

Observații deschise:

1. a) Ana și Radu își propun să joace următorul joc: Ana scrie un număr natural mai mare decât 5. Radu scrie un număr natural cu 1 mai mic decât numărul scris de Ana, apoi Ana scrie un număr cu 1 mai mic decât numărul scris de Radu și aşa mai departe. Pierde jocul cel care nu mai găsește un număr natural pe care să îl scrie.

Dă exemplu de un număr pe care să îl scrie Ana încât de la început, astfel încât să nu fie elogiată în jocul.

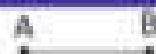
b) Ana și Radu își propun să joace următorul joc: Ana scrie un număr natural mai mare decât 5. Radu scrie un număr natural cu 1 mai mare decât numărul scris de Ana, apoi Ana scrie un număr cu 1 mai mare decât numărul scris de Radu și aşa mai departe. Pierde jocul copilul care nu mai găsește un număr natural pe care să îl scrie. În această situație, cine elogiază jocul? Explora răspunsul dat.

Tulpină:

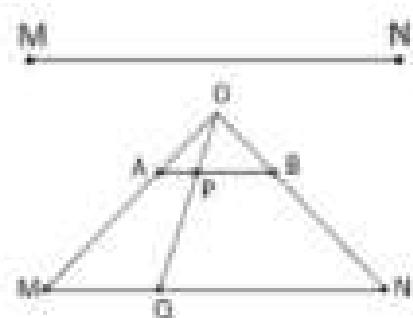
- Se numește **multime finită** o mulțime căreia putem să îl enumerezem toate elementele.
Exemplu: mulțimea elevilor dintr-o scoala, mulțimea literelor unui alfabet.
- Numărul de elemente al unei mulțimi finite se numește **cardinalul mulțimii**. Cardinalul unei mulțimi se notează **card A** sau $|A|$.
Exemplu: Dacă $A = \{1, a, b\}$, atunci $\text{card} A = 3$. **Cardinalul mulțimii vide este }0. Se notează $\text{card } \emptyset = 0$ sau $|\emptyset| = 0$.**
- Se numește **mulțime infinită** o mulțime care nu este finită.
Exemplu: mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor naturale par.
- Mulțimea numerelor naturale se notează cu ajutorul unui simbol special: \mathbb{N} .
Notăm $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ și $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. Punctele de suspensie sunt că sună numere pe care nu le-am scris.

Exercizează!

Problema rezolvată: Care dintre segmentele din figura alăturată are mai multe puncte?



Răzolvare: Ambidele au la fel de multe puncte. Înăță justificarea: Dreptele AM și BN se intersectează în punctul O .



Dacă alegem un punct P care aparține segmentului AB , atunci există o dreaptă OP (prin două puncte diferite trăiește o dreaptă și numai una) care intersectează segmentul MN în Q . Prin urmare, odată cu un punct al segmentului AB se numără și un punct care aparține segmentului MN .

Dacă alegem un punct Q care aparține segmentului MN , atunci apără o dreaptă OQ (prin două puncte diferite trece o dreaptă și numai una) care intersectează segmentul AB în P . Prin urmare odată cu un punct al segmentului MN se numără și un punct care aparține segmentului AB .

2. Precizează, pentru fiecare mulțime de mai jos, dacă este finită sau infinită:

- mulțimea crucelor din România;
- mulțimea elevilor din școală ta;
- mulțimea numerelor divizibile cu 3;
- mulțimea puterilor lui 2 mai mici decât 210;
- mulțimea numerelor naturale impare.

3. Scrie cardinalul următoarelor mulțimi. Dacă nu îl știi, îl poți estima.

- mulțimea jucătorilor de cămp dintr-o echipă de fotbal;
- mulțimea elevilor din clasa ta;
- mulțimea țărilor din Europa;
- mulțimea locuitorilor din localitatea ta.

4. Scrie mulțimea divizorilor numărului 18 și precizează cardinalul acesteia.

5. Scrie mulțimea multiplilor lui 7 mai mari decât 21 și mai mici decât 70. Precizează cardinalul acesteia.

6. Se consideră mulțimea $M = \{15, 16, 17, \dots, 70\}$.

- Determină cardinalul mulțimii M .
- Selectează din mulțimea M submulțimea multiplilor pari ai lui 5 și precizează cardinalul acesteia.
- Selectează din mulțimea M submulțimea divizorilor numărului 70 și precizează cardinalul acesteia.

7. Identifică o proprietate caracteristică a elementelor fiecărei dintre următoarele mulțimi:

- $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;
- $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$;
- $M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\}$;
- $D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$.

8. Scrie o mulțime care să responde următoarele proprietăți:

- are cardinalul egal cu 6;
- 3, 4 și 5 sunt elemente ale mulțimii;
- suma tuturor elementelor este egală cu 15.

Câte astfel de mulțimi există?

9. Competitorul cu A, dacă afirmația este adevarată și cu F, dacă afirmația este falsă:
 a) $D_2 \subset D_6$; b) $M_{16} \subset M_4$; c) $M_{12} \subset M_6$; d) $M_6 \subset \mathbb{N}$; e) $M_4 \subset M_6$; f) $M_6 \subset M_{12}$.
- (D_a reprezintă mulțimea divizorilor lui a și M_a reprezintă mulțimea multiplilor lui a)
10. Numărul submulțimilor unei mulțimi finite A este egal cu $2^{|A|}$. Verifică asemenea afirmație pentru mulțimi cu unul, două, respectiv trei elemente.
11. Folosind proprietatea enunțată în problema precedență determină numărul submulțimilor mulțimii $A = \{2, 3, 5, 8, 11\}$. Scrie apoi submulțimile mulțimii A pentru a verifica rezultatul.

2.4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență

Observă și descriește!

1. În figura alăturată este prezentat un grup de copii și sporturile pe care ei le practică. Pe fiecare copil se identifică prin numărul scris pe tricou. Notăm $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mulțimea copiilor.

a) Serie mulțimea copiilor care joacă handbal și notează-o cu A .

b) Serie mulțimea copiilor care joacă baschet și notează-o cu B .

c) Serie mulțimea copiilor care practică ambele sporturi și notează-o cu I .

d) Serie mulțimea copiilor care joacă numai handbal și notează-o cu D .

e) Serie mulțimea copiilor care joacă numai baschet și notează-o cu C .

f) Găsește o legătură între mulțimile A , B și mulțimea R .

g) Găsește o legătură între mulțimile A , B și I .

h) Găsește o legătură între mulțimile A , B și D , respectiv A , B și C .



Important

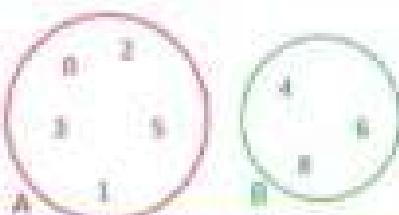
- Prin operări cu mulțimi înțelegem un procedeu prin care din două mulțimi obținem o singură mulțime.
- În funcție de procedeul folosit, avem următoarele operații:

Operație	Cum citesc	Ce înseamnă	Cum găsesc	Exemplu
Reuniune $A \cup B$	Mulțimea A reunită cu mulțimea B	Elementele care aparțin lui A sau lui B	În impreună elementele celor două mulțimi fără a le repeta	$A = \{1, 2, 4, 6\}$ $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Intersecție $A \cap B$	Mulțimea A intersectată cu mulțimea B	Elementele care aparțin lui A și lui B	În elementele comune celor două mulțimi	$A = \{1, 2, 4, 6\}$ $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ $A \cap B = \{2, 4, 6\}$
Diferență $A \setminus B$	Mulțimea A minus mulțimea B Diferența mulțimilor A și B	Elementele care aparțin lui A și nu aparțin lui B	În elementele care se găsesc în prima mulțime și nu se găsesc în a doua mulțime	$A = \{1, 2, 4, 6\}$ $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ $A \setminus B = \{1\}$
Diferență $B \setminus A$	Mulțimea B minus mulțimea A Diferența mulțimilor B și A	Elementele care aparțin lui B și nu aparțin lui A	În elementele care se găsesc în prima mulțime și nu se găsesc în a doua mulțime	$A = \{1, 2, 4, 6\}$ $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ $B \setminus A = \{3, 5\}$

- Dacă $A \cap B = \emptyset$ spunem că mulțimile A și B sunt disjuncte.

Exemplu:

Mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ și mulțimea $B = \{4, 6, 8\}$ nu au elemente comune, deci sunt disjuncte.

**Exercizat!**

2. În figura alăturată sunt reprezentate, prin diagrame, mulțimile A și B . Ce reprezintă partea hășurată în fiecare dintre cele trei situații?



3. Se consideră mulțimile $A = \{m, n, o, p, r\}$, și $B = \{n, p, s\}$. Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

4. Se dau multimiile $A = \{1, 2, 4, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Determină:
- $A \cup B$; b) $A \cup C$; c) $B \cup C$; d) $A \cup B \cup C$; e) $A \cap B$; f) $A \cap C$; g) $B \cap C$; h) $A \cap B \cap C$;
 - i) $A \setminus B$; j) $A \setminus C$; k) $B \setminus C$; l) $B \setminus A$; m) $C \setminus A$.

5. Se consideră E , multimea numerelor naturale mai mici sau egale cu 4 și F , multimea divizorilor lui 8.

- Scrie multimiile E și F enumerând elementele acestora.
- Calculează reuniunea, intersecția și diferența acestora.

6. Se consideră $D = \{1, 2, 4, 6\}$, F multimea patratelor elementelor multimiil D , iar G multimea formată din dublul elementelor multimiil D .

- Scrie multimiile F și G , enumerând elementele acestora.
- Calculează $D \cup F \cup G$, $F \cap G$, $F \setminus G$, $G \setminus D$, $D \cup F$, $D \setminus F$.

7. Se consideră multimiile $A = \{1, 2, 4, 5\}$ și $B = \{1, 4, 5, 6, 7\}$. Calculează multimiile $A \cup B$ și $A \cap B$, apoi verifică relația $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$.

8. Cei 24 de elevi din clasa a VI-a B participă la concursul de alergări. 15 dintre ei participă la proba de 500 m, iar 18 dintre ei participă la proba de 1000 m. Cuiți elevi participă la ambele probe?

9. Se consideră M și N două multimi de numere naturale. În situație în care $\text{card}M \cup N = 10$, $\text{card}M \setminus N = 2$, $\text{card}N \setminus M = 4$, determină $\text{card}M \cap N$.

Formulează împreună cu colegul tău un exemplu concret pentru situația dată.

Problema rezolvată: Determină multimiile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:

- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $A \cap B = \{0, 3\}$;
- $A \setminus B = \{1, 4\}$.

Resolvare: Vom folosi următorul tabel:

	A	B
0	∈	∈
1		
2		
3	∈	∈
4		
5		

	A	B
0	∈	∈
1	∈	∉
2		
3	∈	∈
4	∈	∉
5		

	A	B
0	∈	∈
1	∈	∉
2	∉	∈
3	∈	∈
4	∈	∉
5	∉	∈

Din condiția i) obținem 0 și 3
sunt elemente comune.

Din condiția ii) obținem 1 și 4
sunt elemente care nu aparțin lui A și nu aparțin lui B .

Din condiția iii) obținem 2 și 5
elementele 2 și 5 nu aparțin lui A
și aparțin lui B .

În concluzie obținem $A = \{0, 1, 3, 4\}$ și $B = \{0, 2, 3, 5\}$.

10. Determină multimiile C și D , știind că: a) $C \cap D = \{a, b, f\}$; b) $C \setminus D = \emptyset$;
c) $D \setminus C = \{c, d\}$.

2.5. Recapitulare

1. În diagramele alăturate sunt reprezentate multimiile A , B și C .

Serie multimiile A , B și C enumerând elementele.



2. Reprezintă, cu ajutorul diagramelor, multimiile: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, B mulțimea cifrelor impare, C mulțimea literelor din curvântul matematic.

3. Se consideră multimiile: A mulțimea multiplilor lui 5 mai mici decât 30; B mulțimea numerelor binari; C mulțimea divizorilor lui 12; D mulțimea multiplilor lui 7 și \mathbb{N}^* . Dacă mulțimea este finită serie parechen (numerele multimiilor, f), iar dacă este infinită serie parechen (numerele multimiilor, i).

Exemplu: M mulțimea numerelor de două cifre. Decare este mulțime finită serie parechen (M , f).

4. Se consideră multimiile $D = \{1, 3, 5\}$ și $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate?

- a) $3 \in D$ □; b) $4 \notin D$ □; c) $5 \in D$ și $5 \in E$ □; d) $0 \in D$ sau $0 \in E$ □; e) $E \subset D$ □;
- f) $\emptyset \subset D$ □

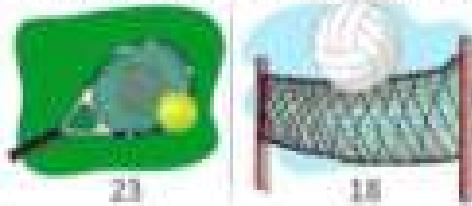
5. Se consideră multimiile: $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $B = \{3, 5, 6, 7\}$, și $C = \{2, 5, 6, 7\}$.

Determina: a) $A \cup B$; b) $A \cup C$; c) $B \cup C$; d) $A \cup B \cup C$; e) $A \cap B$; f) $A \cap C$; g) $B \cap C$;

b) $A \cap B \cap C$; i) $A \setminus B$; j) $A \setminus C$; k) $B \setminus A$; l) $B \setminus C$; m) $C \setminus A$; n) $C \setminus B$.

6. Determină multimiile de numere naturale care au cardinalul egal cu 5 și sumă elementelor egală cu 10.

7. Toți elevii unei clase practică cel puțin un sport. 18 dintre ei joacă volei și 23 joacă tenis. Căți elevi sunt în clasă dacă 11 dintre ei practică și volei și tenis?



8. Determină multimiile A și B care îndeplinesc simultan condițiile:

- a) $A \cap B = \{a, b, d, f\}$; b) $A \setminus B = \{a\}$; c) $B \setminus A = \{b, d\}$.

9. Andrei și Maria sunt elevi în clasa a VI-a, în Școală nr. 3. Lui Andrei îl place să meargă cu bicicleta, iar Marii, să asculte muzică. Dan este elev în clasa a V-a, în același școală. El este pasionat și să meargă pe bicicletă și să asculte muzică.

Notăm cu S mulțimea elevilor din același școală, B mulțimea copiilor cărora le place să meargă pe bicicletă și M mulțimea copiilor cărora le place să asculte muzică.

Serie în cîntă alăturată A, dacă afirmația este adevărată și F, dacă afirmația este falsă:

- a) Andrei $\in S$ □; b) Maria $\in B$ □; c) Maria $\in M \cap S$ □; d) Dan $\in B \cap M$ □; e) Andrei $\in B$ □;
- f) Dan $\notin M$ □

2.6. Evaluare

10p	Din oficiu
10p	1. Folosind diagrammele alăturate scrie multimile A și B enumerând elementele lor și completează diagrama C . $A = \{ \dots \}$ $B = \{ \dots \}$ $C = \{ a, b, c, d, e \}$
10p	2. Se consideră multimiile D_5 multimea divizorilor lui 5, N multimea numerelor naturale, $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și M_3 multimea multiplilor lui 3. Dintre aceste multimi, multimiile finite sunt și multimiile infinite sunt
24p	3. Ana și Radu sunt elevi ai clasei a VI-a B. Ana este pasionată de lectură, iar Radu de jocurile pe calculator. Mihai este elev al clasei a VI-a A și este pasionat atât de lectură cât și de jocurile pe calculator. Notăm cu A mulțimea elevilor din clasa a VI-a A, B mulțimea elevilor din clasa a VI-a B, L mulțimea elevilor pasionați de lectură, C mulțimea elevilor pasionați de jocurile pe calculator. Serie în cheie alăturată A, dacă afirmația este adeverită și F, dacă afirmația este falsă: a) Ana $\in B$ <input type="checkbox"/> ; b) Radu $\in A$ <input type="checkbox"/> ; c) Mihai $\in L \cap C$ <input type="checkbox"/> d) Radu $\in C \cap B$ <input type="checkbox"/> ; e) Ana $\in B \cap C$ <input type="checkbox"/> ; f) Mihai $\in L \setminus C$ <input type="checkbox"/>
10p	4. Serie în cheie alăturată A, dacă afirmația este adeverită și F, dacă afirmația este falsă: a) $5 \in \{1, 3, 5, 7\}$ <input type="checkbox"/> ; b) $3 \notin \{1, 3, 5, 7\}$ <input type="checkbox"/> ; c) $\emptyset \subset \{1, 3, 5, 7\}$ <input type="checkbox"/> ; d) $\{1, 3, 5, 7\} \subset N^*$ <input type="checkbox"/>
10p	5. Se consideră multimiile $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ și $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 12\}$. Determinați: a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $C \setminus (A \cup B)$.
10p	6. Stabilește o proprietate comună tuturor elementelor multimii $D = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.
10p	7. Determinați multimiile D și E care îndeplinesc simultan condițiile: a) $D \cup E = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; b) $E \cap D = \{0, 4\}$; c) $E \setminus D = \{8\}$.

2.7. Exercizi și progresezi!

1. Scrie două exemple de multimi din lumea înconjurătoare. Pe prima definiște-o folosind diagramă, iar pe a doua definiște-o prin enumerarea elementelor.

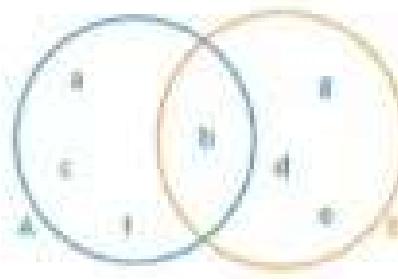
Exemplu: O mulțime de animale care trăiesc în apă (pește, balenă, rechin, stenă de mare).

2. Completează cu A, dacă afirmația este adevărată și cu F, dacă afirmația este falsă:

- a) ghimbocul aparține mulțimii florilor de primăvară;
- b) mărul aparține mulțimii fructelor;
- c) piersica aparține mulțimii fructelor săraci.

3. Urmărește figura alăturată și identifică:

- a) Cardinalul mulțimii A;
- b) Mulțimea B;
- c) $A \cup B$;
- d) Cardinalul mulțimii $A \setminus B$.



4. La testele din semestrul I, Andrei a obținut următoarele punctaje:

Dată	29 septembrie	15 octombrie	2 noiembrie	20 noiembrie	11 decembrie
Punctajul	97 puncte	100 puncte	96 puncte	90 puncte	98 puncte

- a) Scrie mulțimea A a punctajelor obținute de Andrei la matematică, conform tabelului.
- b) $95 \in A$?
- c) Scrie o submulțime cu trei elemente a mulțimii A.
- d) Dacă mulțimea punctajelor obținute de Simona la matematică este $\{92, 93, 95, 99, 100\}$, scrie mulțimea punctajelor comune Simonei și lui Andrei.
- e) Scrie mulțimea punctajelor obținute de Andrei pe care nu le-a obținut Simona.
- f) Conform tabelului, cătă teste a dat Andrei la matematică pe semestrul II?
- g) Asociază fiecărui subiectul exercițiului testul matematică invitată în capitolul mulțimi.

5. Scrie mulțimes numerelor pare cuprinse între 17 și 28.

6. Precizează care este triplatura comună a elementelor mulțimii $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

7. Se consideră mulțimea $A = \{f, l, n, u, r, v\}$:

- a) Scrie o submulțime a mulțimii A.
- b) Scrie o submulțime a diferenței $\{f, l, n, u, r, v\} \setminus \{r, n, u\}$.

8. Dacă D_8 este mulțimea divizorilor lui 8, iar M_2 este mulțimea multiplilor lui 2 mai mici decât 10, calculează: a) $D_8 \cup M_2$; b) $M_2 \cap D_8$; c) $D_8 \setminus M_2$; d) $M_2 \setminus D_8$; e) $D_8 \cap \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

9. Determină mulțimile E și F, stând că sunt îndeplineite în același timp condițiile:

- a) $E \cap F = \{3, 4\}$;
- b) $E \cup F = \{2, 3, 4, 5\}$;
- c) $\text{card}E = \text{card}F$.

10. Căte submнжини are multимнжина numerelor naturale de două cifre egale?
11. Există multимнжини A , B , C care să verifice simultan condiции: $A \subset B \subset C$ și $A \cap B \cap C = \emptyset$? Justifică rъспонсul dat.
12. Se consideră multимнжинile A și B . Stând că multимнжина A are 3 elemente, multимнжина B are 9 elemente, cкільки элементе poate avea multимнжина $A \setminus B$?
13. Avem $\text{card}A = 7$, $\text{card}B = 10$ și $\text{card}A \cap B = 4$. Căt este $\text{card}A \cup B$?
14. Se consideră multимнжинile A și B pentru care $\text{card}A = 5$, $\text{card}B = 8$ și $\text{card}A \cup B = 10$. Căt este $\text{card}A \cap B$?
15. Determina multимнжинile M și N care satisfac simultan condiции: $M \cup N = \{a, b, c, d\}$, $d \notin N \setminus M$, $N \cap M = \emptyset$, $\{a, b\} \subset M \setminus N$.
16. Fie multимнжина $A = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}, k < 100\}$.
- Affă suma elementelor multимнжини A .
 - Arată că suma oricărор trei elemente din A este divizibilă cu 3.
 - Cătă elemente ale lui A se divid cu 5?
17. Determina multимнжинile A , B , C stând că satisfac simultan condiции:
- $A \cup B = B \cup C = C \cup A = \{a, b, c, d, e, f\}$;
 - $A \cap B \cap C = \emptyset$;
 - $B \cap C = \{a, b\}$;
 - $A \setminus C = \{e, f\}$.
18. Affă cardinalul multимнжинelor $A \setminus B$ și $B \setminus A$ stând că $A \cup B$ are cu 34 elemente mai mult decât $A \cap B$ și A are cu 13 elemente mai puțin decât B .
19. Elevii unei scoli au avut de ales între două opzioniale: „Matematică distractivă” și „Matematică în cotidian”. 120 de elevi au spus că preferă doar „Matematică distractivă”, 40 preferă ambele opzioniale, 180 preferă doar „Matematică în cotidian” și 70 nu preferă niciuna din cele două opzioniale. Affă:
- Numărul de elevi din scola;
 - Cătă elevi preferă doar „Matematică distractivă”;
 - Cătă elevi preferă doar „Matematică în cotidian”;
 - Cătă elevi preferă „Matematică distractivă” sau „Matematică în cotidian”?
20. Folosind eventual diagramne pentru a demonstra, alege cu care din următoarele multimi este egala multимнжина $B \setminus (A \cup C)$:
- $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
 - $(B \setminus A) \cap (B \setminus C)$;
 - $(B \setminus A) \cap (A \setminus C)$;
 - $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$.