

CUPRINS

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

E * R **

Capitolul I. LEGI DE COMPOZIȚIE

1. Legi de compoziție pe o mulțime. Parte stabilă	
Breviar de teorie	3
Probleme propuse	8
325	
2. Proprietăți ale legilor de compoziție interne	
Breviar de teorie	12
Probleme propuse	16
328	
Teste de evaluare	21
332	

Capitolul II. GRUPURI

1. Monoizi. Grupuri	
Breviar de teorie	23
Probleme propuse	27
332	
2. Grupuri finite. Subgrupuri. Ordinul unui grup finit. Ordinul unui element	
Breviar de teorie	32
Probleme propuse	36
337	
3. Morfisme de grupuri. Izomorfisme de grupuri	
Breviar de teorie	41
Probleme propuse	45
340	
Teste de evaluare	50
344	

Capitolul III. INELE ȘI CORPURI

1. Inele	
Breviar de teorie	53
Probleme propuse	59
346	
2. Corpuri	
Breviar de teorie	63
Probleme propuse	67
351	
Teste de evaluare	69
354	

Capitolul IV. POLINOAME

1. Polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ. Operații cu polinoame.	
Teorema împărțirii cu rest	
Breviar de teorie	72
Probleme propuse	79
360	
2. Divizibilitatea polinoamelor. Rădăcini multiple. Descompunerea polinoamelor.	
Cel mai mare divizor comun al unor polinoame.	
Cel mai mic multiplu comun al unor polinoame	
Breviar de teorie	83
Probleme propuse	96
363	

* E - enunțuri

** R - răspunsuri, rezolvări

3. Relațiile lui François Viète. Ecuații algebrice cu coeficienți în Z , Q , R , C .	
Ecuații bipătrate. Ecuații reciproce. Ecuații binome. Ecuații trinome.	
Sisteme de ecuații neliniare. Separarea rădăcinilor unei ecuații	
Breviar de teorie	101
Probleme propuse	147 367
Teste de evaluare	152 378

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul I. TESTE PREDICTIVE

Testul 1	155 383
Testul 2	156 384
Testul 3	157 386
Testul 4	158 388
Testul 5	159 390
Testul 6	160 392
Testul 7	161 394
Testul 8	162 397
Testul 9	163 400
Testul 10	163 401
Testul 11	165 403
Testul 12	166 405

Capitolul II. PRIMITIVE. INTEGRALA NEDEFINITĂ A UNEI FUNCȚII

1. Primitivele unei funcții pe un interval real dat	
Breviar de teorie	167
A. Tabel cu derivatele unor funcții elementare f	170
B. Tabel cu derivatele unor funcții compuse μ	171
Probleme propuse	185 408
2. Calculul unor primitive folosind integrarea directă	
A. Tabel cu integrale nedefinite din funcții elementare	188
B. Tabel cu integrale nedefinite din funcții elementare - completare	189
C. Tabel cu integrale nedefinite din funcții compuse	190
Probleme propuse	193 408

Capitolul III. METODE DE CALCULALE PRIMITIVELOR

1. Metoda integrării prin părți	
Breviar de teorie	197
Probleme propuse	203 411
2. Metode de schimbare de variabilă	
Breviar de teorie	206
Probleme propuse	212 416
3. Integrarea funcțiilor raționale	
Breviar de teorie	215
Probleme propuse	226 420

* E - enunțuri

** R - răspunsuri, rezolvări

4. Integrarea funcțiilor trigonometrice	
Breviar de teorie	229
Probleme propuse	233 424
5. Integrarea funcțiilor exponențiale	
Breviar de teorie	234
Probleme propuse	238 426
6. Integrarea funcțiilor iraționale	
Breviar de teorie	239
Probleme propuse	244 426
7. Integrarea funcțiilor binome	
Breviar de teorie	245
Probleme propuse	247 430
8. Alte procedee pentru determinarea primitivelor	247
9. Integrale care nu se pot exprima prin funcții elementare	
Breviar de teorie	255

Capitolul IV. INTEGRALA DEFINITĂ

1. Funcții integrabile Riemann.	
Breviar de teorie	256
Integrala definită (integrala Riemann)	
Condiții suficiente ca o funcție să fie (sau să nu fie) integrabilă	
Probleme propuse	260 431
2. Formula lui Leibniz-Newton	
Breviar de teorie	263
Probleme propuse	265 433
3. Proprietăți ale integralei definite	
Breviar de teorie	267
Proprietatea de liniaritate a integralei	
Proprietatea de aditivitate a integralei	
Proprietatea de conservare a semnului integrali	
Proprietatea de monotonie a integralei	
Proprietatea de înmulțire a funcțiilor integrabile	
Proprietatea de paritate-imparitate a funcțiilor integrabile	
Teorema de medie pentru funcții continue	
Teorema de medie pentru funcții integrabile	
Teorema de existență a primitivelor unor funcții continue	
Proprietatea de periodicitate a funcțiilor integrabile	
Derivatele unor integrale care au limite de integrare variabile	
Probleme propuse	275 435

Capitolul V. METODE DE CALCUL ALE INTEGRALEI DEFINITE

Breviar de teorie	280
Formula de integrare prin părți	
Prima metodă de schimbare de variabilă	
A doua metodă de schimbare de variabilă	
Calculul integralei unei funcții pare sau impare	
Probleme propuse	287 439

* E - enunțuri

** R - răspunsuri, rezolvări

E R

Capitolul VI. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

Breviar de teorie	294
1. Calculul limitelor unor řiruri cu ajutorul integralelor definite utilizând sumele Riemann	
2. Calculul ariilor unor suprafețe plane	
3. Calculul volumelor corpurilor de rotație	
Probleme propuse	305 444
 Capitolul VII. TESTE DE EVALUARE	
Testul 1	308 446
Testul 2	308 446
Testul 3	309 448
Testul 4	309 449
Testul 5	310 449
Testul 6	310 450
Testul 7	311 451
Testul 8	311 452
Testul 9	312 453
Testul 10	313 454
Testul 11	313 456
Testul 12	314 457
Testul 13	314 458
Testul 14	315 459
Testul 15	315 461
Testul 16	316 462
Testul 17	317 463
Testul 18	317 464
Testul 19	318 465
Testul 20	318 466
Testul 21	319 468
Testul 22	320 469
Testul 23	320 470
Testul 24	321 471
Testul 25	321 472
Testul 26	322 473
Testul 27	322 474
Testul 28	323 475
Testul 29	323 475
Testul 30	323 476
Testul 31	324 477
Testul 32	324 478
Testul 33	
Promotori ai matematicii	479
Bibliografie selectivă	483

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ



Legi de compozitie

1. Legi de compozitie pe o multime. Parte stabilă

Breviar de teorie

Lege de compozitie

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. Se numește *lege de compozitie sau operație algebrică* definită pe M , o aplicație $\varphi : M \times M \rightarrow M$, care asociază fiecărei perechi $(x, y) \in M \times M$, un unic element $\varphi(x, y) \in M$.

Observații:

1. Elementul $\varphi(x, y)$ se numește *compusul* lui x cu y prin legea φ .
2. În general, operația $\varphi(x, y)$ se va desemna printr-un simbol special: $*$, \circ , \top , \perp , \oplus , \odot etc. De asemenea, se poate utiliza notația aditivă (+) sau notația multiplicativă (\cdot).

Parte stabilă

Definiție. Fie M o mulțime nevidă și „ \circ ” o lege de compozitie pe M . O submulțime nevidă $H \subseteq M$ se numește *parte stabilă a lui M în raport cu operația „ \circ ”*, dacă pentru orice $x, y \in H$, rezultă că $x \circ y \in H$.

Observații:

1. Numele de „parte stabilă” pentru o submulțime H a lui M în raport cu operația „ \circ ” precizează că dacă $x, y \in H$, atunci și compusul lor $x \circ y$ rămâne în H .
2. Dacă H este o parte stabilă a lui M în raport cu legea de compozitie „ \circ ”, atunci spunem că (H, \circ) este o *lege de compozitie indușă de legea de compozitie* de pe M .

Clase de resturi modulo n (\mathbb{Z}_n)

Definiție. Fie un număr $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, spunem că a este congruent cu

b modulo n și scriem $a \equiv b \pmod{n}$, dacă $n \mid (a - b)$ sau dacă $\frac{a - b}{n} \in \mathbb{Z}$.

Altfel spus: *numărul a este congruent cu numărul b modulo n* , dacă și numai dacă dau același rest r , prin împărțire la n :

- Înmulțirea claselor de resturi \hat{a} și \hat{b} se definește astfel:
 $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{r}_1$, unde \hat{r}_1 reprezintă restul împărțirii produsului $a \cdot b$ la n .
- Oricare ar fi $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n$, atunci $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{b} \cdot \hat{a}$.
- Dacă $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{1}$ și $\hat{a} \neq \hat{0}$, spunem că \hat{b} este inversa clasei \hat{a} și notăm $\hat{b} = \hat{a}^{-1}$.

Rezolvarea unei ecuații elementare: $\hat{a} \cdot x = \hat{b}$

Mai putem scrie $x = \hat{a}^{-1} \cdot \hat{b}$, iar pentru a determina inversa clasei \hat{a} ,

procedăm astfel: fie $\hat{a}^{-1} = \hat{c} \in \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow ac \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow \frac{ac-1}{n} \in \mathbb{Z}$ și

determinăm numărul întreg c , ca fiind egal, de exemplu, cu α , adică $\hat{a}^{-1} = \hat{\alpha}$.

În concluzie $x = \hat{a}^{-1} \cdot \hat{b} \Rightarrow x = \hat{\alpha} \cdot \hat{b} \Rightarrow x = \widehat{\alpha \cdot b}$.

Tabla unei legi de compoziție

Dacă „ \circ ” este o lege de compoziție pe M , iar mulțimea M este finită, $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, atunci legea poate fi redată printr-un tablou, numit *tabla operației „ \circ ”*, astfel:

\circ	x_1	x_2	\dots	x_j	\dots	x_n
x_1	$x_1 \circ x_1$	$x_1 \circ x_2$	\dots	$x_1 \circ x_j$	\dots	$x_1 \circ x_n$
x_2	$x_2 \circ x_1$	$x_2 \circ x_2$	\dots	$x_2 \circ x_j$	\dots	$x_2 \circ x_n$
\dots	\dots	\dots		\dots		\dots
x_i	$x_i \circ x_1$	$x_i \circ x_2$	\dots	$x_i \circ x_j$	\dots	$x_i \circ x_n$
\dots	\dots	\dots		\dots		\dots
x_n	$x_n \circ x_1$	$x_n \circ x_2$	\dots	$x_n \circ x_j$	\dots	$x_n \circ x_n$

În acest tabel, elementul $x_i \circ x_j$ este situat pe linia i și pe coloana j .

Probleme rezolvate

1. Considerăm mulțimea $M = [2, +\infty)$.
 - Să se arate că operația $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, definește pe M , o lege de compoziție.
 - Să se calculeze numerele $a = 2 \circ 3$ și $b = (-1) \circ 4$.