CUPRINS

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

* *E – enunțuri*

** *R – răspunsuri, rezolvări*

Scanned with CamScanner

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul I. TESTE PREDICTIVE

Capitolul II. PRIMITIVE. INTEGRALA NEDEFINITĂ A UNEI FUNCȚII

Capitolul III. METODE DE CALCUL ALE PRIMITIVELOR

* *E – enunțuri*
** *R – răspunsuri, rezolvări*

Scanned with CamScanner

* *E – enunţuri*
** *R – răspunsuri, rezolvări*

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

I Legi de compoziție

1. Legi de compoziție pe o mulțime. Parte stabilă

Breviar de teorie

Lege de compoziție

Definiție. Fie M o mulțime nevidă. Se numește *lege de compoziție sau operație algebrică* definită pe M, o aplicație $\varphi : M \times M \to M$, care asociază fiecărei perechi $(x, y) \in M \times M$, un unic element $\varphi(x, y) \in M$.

Observații:

1. Elementul $\varphi(x, y)$ se numește *compusul* lui x cu y prin legea φ.
2. În general, operația $\varphi(x, y)$ se va desemna printr-un simbol special: $*$, $\circ$, $\top$, $\perp$, $\oplus$, $\odot$ etc. De asemenea, se poate utiliza notația aditivă $(+)$ sau notația multiplicativă $(\cdot)$.

Parte stabilă

Definiție. Fie M o mulțime nevidă și „$\circ$" o lege de compoziție pe M. O submulțime nevidă $H \subseteq M$ se numește *parte stabilă a lui M în raport cu operația „$\circ$"*, dacă pentru orice $x, y \in H$, rezultă că $x \circ y \in H$.

Observații:

1. Numele de „parte stabilă" pentru o submulțime H a lui M în raport cu operația „$\circ$" precizează că dacă $x, y \in H$, atunci și compusul lor $x \circ y$ rămâne în H.
2. Dacă H este o parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție „$\circ$", atunci spunem că $(H, \circ)$ este o *lege de compoziție indusă de legea de compoziție* de pe M.

Clase de resturi modulo n ($\mathbb{Z}_n$)

Definiție. Fie un număr $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, spunem că *a este congruent cu b modulo n* și scriem $a \equiv b \pmod{n}$, dacă $n \mid (a - b)$ sau dacă $\dfrac{a-b}{n} \in \mathbb{Z}$.

Altfel spus: *numărul a este congruent cu numărul b modulo n*, dacă și numai dacă dau același rest r, prin împărțire la n:

Scanned with CamScanner

• *Înmulțirea claselor de resturi* $\hat{a}$ și $\hat{b}$ se definește astfel:

$\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{r}_1$, unde $\hat{r}_1$ reprezintă restul împărțirii produsului $a \cdot b$ la n.

- Oricare ar fi $\hat{a}$, $\hat{b} \in \mathbb{Z}_n$, atunci $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{b} \cdot \hat{a}$.

- Dacă $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{1}$ și $\hat{a} \neq \hat{0}$, spunem că $\hat{b}$ este inversa clasei $\hat{a}$ și notăm $\hat{b} = \hat{a}^{-1}$.

Rezolvarea unei ecuații elementare: $\hat{a} \cdot x = \hat{b}$

Mai putem scrie $x = \hat{a}^{-1} \cdot \hat{b}$, iar pentru a determina inversa clasei $\hat{a}$,

procedăm astfel: fie $\hat{a}^{-1} = \hat{c} \in \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow ac \equiv 1(\text{mod}n) \Leftrightarrow \dfrac{ac-1}{n} \in \mathbb{Z}$ și

determinăm numărul întreg c, ca fiind egal, de exemplu, cu α, adică $\hat{a}^{-1} = \hat{\alpha}$.

În concluzie $x = \hat{a}^{-1} \cdot \hat{b} \Rightarrow x = \hat{\alpha} \cdot \hat{b} \Rightarrow x = \widehat{\alpha \cdot b}$.

Tabla unei legi de compoziție

Dacă „$\circ$" este o lege de compoziție pe M, iar mulțimea M este finită, $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, atunci legea poate fi redată printr-un tablou, numit *tabla operației* „$\circ$", astfel:

$\circ$	x_1	x_2		x_j		x_n
x_1	$x_1 \circ x_1$	$x_1 \circ x_2$	...	$x_1 \circ x_j$	...	$x_1 \circ x_n$
x_2	$x_2 \circ x_1$	$x_2 \circ x_2$	...	$x_2 \circ x_j$	...	$x_2 \circ x_n$
...	...	...		...		...
x_i	$x_i \circ x_1$	$x_i \circ x_2$	...	$x_i \circ x_j$	...	$x_i \circ x_n$
...	...	...		...		...
x_n	$x_n \circ x_1$	$x_n \circ x_2$	...	$x_n \circ x_j$	...	$x_n \circ x_n$

În acest tabel, elementul $x_i \circ x_j$ este situat pe linia i și pe coloana j.

Probleme rezolvate

1. Considerăm mulțimea $M = [2, +\infty)$.

a) Să se arate că operația $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, definește pe M, o lege de compoziție.

b) Să se calculeze numerele $a = 2 \circ 3$ și $b = (-1) \circ 4$.

Scanned with CamScanner