CĂTĂLIN - PETRU NICOLESCU
MĂDĂLINA YUPARI Z. WILLIAMS

MATEMATICĂ

clasa a XI-a

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ
ANALIZĂ MATEMATICĂ

SINTEZE DE TEORIE
EXEMPLE REZOLVATE
EXERCIȚII ȘI PROBLEME

- **Fixarea cunoștințelor**
- **Aprofundarea cunoștințelor**
- **Performanță**
- **Autoevaluare**
- **Evaluare sumativă**

Ediția a patra revizuită și adăugită

EDITURA TOP PUBLISHING
BUCUREȘTI, 2023

Prezentul auxiliar didactic este aprobat pentru utilizare în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018

Referenți științifici:

prof. ***Ioana-Irinel Chiran***, București
prof. ***Nicușor Udrea***, București
prof. ***Marian Voinea***, București
prof. ***Rică Zamfir***, București
prof. ***Elena-Violeta Rădulescu***, Buc.
prof. ***Daniela Ulei***, București
prof. ***Otilia-Bogdana Lăstun***, Agnita
prof. ***Dorinel Bora***, Alba Iulia
prof. ***Valentina Rusu***, Alba Iulia
prof. ***Delia Stănilă***, Alba Iulia
prof. ***Petru-Dumitru Stănilă***, Alba Iulia
prof. ***Margareta Vecerzan***, Agnita
prof. ***Delia Goina***, Bistrița
prof. ***Cornel-Vasile Muscan***, Bistrița
prof. ***Daria-Maria Stoleru***, Bistrița
prof. ***Gheorghe Retegan***, Bistrița
prof. ***Anca-Daniela Petrescu***, Buftea
prof. ***Marius-Florin Zănoagă***, Buftea
prof. ***Antoanela Buzescu***, Caransebeș
prof. ***Delia Dragomir***, Caransebeș
prof. ***Ana Mandreși***, Caransebeș
prof. ***Bogdan Heroiu***, Câmpulung
prof. ***Ana Maria Getzi***, Cluj-Napoca
prof. ***Gheorghe Căzănel***, Comănești
prof. ***Livia Kovacs***, Covasna
prof. ***Mariana Draga Tătucu***, Drobeta
prof. ***Mariana-Magdalena Pătuleanu***, Drobeta-Turnu Severin
prof. ***Marcela Ionuț***, Făgăraș
prof. ***Corina Răduleț***, Făgăraș
prof. ***Simona Ghizdaru***, Făgăraș
prof. ***Adriana Nicoară***, Hațeg
prof. ***Simion Bade***, Hunedoara
prof. ***Valentina Blendea***, Iași
prof. ***Gheorghe Blendea***, Iași
prof. ***Tamara Calac***, Iași
prof. ***Andrei Nedelcu***, Iași
prof. ***Laura Stanciu***, Iași
prof. ***Sanda Nițoiu***, Jimbolia
prof. ***Domnica Rif***, Jimbolia
prof. ***Nicoleta Gheorghe***, Mangalia
prof. ***Aurica-Viuța Fazakaș***, Marghita
prof. ***Rodica Ursan***, Marghita
prof. ***Tatiana Voicu***, Marghita
prof. ***Dorina Boroș***, Marghita
prof. ***Mirela-Maria Maior***, Mediaș
prof. ***Alexandru Nicula***, Mediaș
prof. ***Anca-Nicoleta Oprea***, Mediaș
prof. ***Ileana Demian***, Ocna Mureș
prof. ***Ludovica Lazăr***, Năsăud
prof. ***Adriana Mihaela Grec***, Oradea
prof. ***Dana Kele***, Oradea
prof. ***Crăciun Negruț***, Oradea
prof. ***Corina Negruțiu***, Oradea
prof. ***Dumitru Pistrilă***, Oravița
prof. ***Alexandru Farago***, Orșova
prof. ***Luminița Ungureanu***, Pașcani
prof. ***Rodica Popovici***, Piatra Neamț
prof. ***Maria Lădescu***, Râșnov
prof. ***Paula-Maria Dărăban***, Reghin
prof. ***Gheorghe Dărăban***, Reghin
prof. ***Adreea Vișovan***, Reghin
prof. ***Claudia Denisia Otea***, Roman
prof. ***Adela Nica***, Sebiș
prof. ***Nicolae Papacu***, Slobozia
prof. ***Ioana Aleman***, Sibiu
prof. ***Adriana Mihălțan***, Sibiu
prof. ***Arhire Felix***, Tecuci
prof. ***Karina Preoteșoiu***, Timișoara
prof. ***Gheorghe Desculțu***, Turnu Măgurele
prof. ***Cornelia Costache***, Zărnești
prof. ***Doina Mureșan***, Zărnești

ISBN 978-606-9702-29-1

Redactor: *prof.* ***Mădălina Yupari Z. Williams***
Coperta: ***Elena Drăgulelei Dumitru***
Grafica: *pictor* ***Nadejda-Luminița Nicolescu***
Tehnoredactare computerizată: S.C. TABIR S.R.L.

ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

I Permutări

Permutări. Transpoziții

Breviar de teorie

Noțiuni introductive

• Fie mulțimea finită $A = \{1, 2, ..., n\}$. O funcție bijectivă $\sigma : A \to A$, se numește *permutare de ordinul n* sau *permutare de gradul n*, unde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

• Mulțimea tuturor permutărilor de ordin n se notează cu S_n, iar card $S_n = n!$.

• Orice permutare de ordinul n, se reprezintă astfel:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \tau(1) & \tau(2) & ... & \tau(n) \end{pmatrix}.$$

• Permutarea $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix}$ se numește *permutare identică* de ordin n (se mai notează și simplu cu e).

• *Exemple*:

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$, unde $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$.

2) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$, unde $\tau(1) = 4$, $\tau(2) = 3$, $\tau(3) = 2$, $\tau(4) = 1$.

3) $e_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$.

Compunerea permutărilor

Definiție. Considerăm permutările: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$ și

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix}$, σ, τ ∈ S_n. Atunci permutarea

$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \ldots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$ se numește *compusa permutărilor* σ cu τ.

Observații:

1. Dacă $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_n$, atunci $\sigma \circ \tau \in S_n$ și $\tau \circ \sigma \in S_n$
2. În general, $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.
3. Prin convenție, $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$ și $\sigma^n = \sigma^{n-1} \circ \sigma$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exemplu (de compunere de permutări):

Fie permutările σ, τ ∈ S_4, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, iar $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Avem $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, deoarece:

$(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 4$, adică $1 \to 4$,

$(\sigma \circ \tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2$, adică $2 \to 2$,

$(\sigma \circ \tau)(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 3$, adică $3 \to 3$,

$(\sigma \circ \tau)(4) = \sigma(\tau(4)) = \sigma(4) = 1$, adică $4 \to 1$.

Avem $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, deoarece:

$(\tau \circ \sigma)(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(2) = 1$, adică $1 \to 1$,

$(\tau \circ \sigma)(2) = \tau(\sigma(2)) = \tau(3) = 2$, adică $2 \to 2$,

$(\tau \circ \sigma)(3) = \tau(\sigma(3)) = \tau(4) = 4$, adică $3 \to 4$,

$(\tau \circ \sigma)(4) = \tau(\sigma(4)) = \tau(1) = 3$, adică $4 \to 3$.

Proprietăți (ale compunerii permutărilor)

1. Compunerea permutărilor este asociativă, dar nu este comutativă.
2. Compunerea permutărilor admite elementul neutru $e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, adică: $\sigma \circ e_n = e_n \circ \sigma = \sigma$, pentru orice permutare $\sigma \in S_n$.

Inversa unei permutări

Propoziție. Pentru orice permutare $\sigma \in S_n$, există o unică permutare, notată cu σ^{-1}, unde $\sigma^{-1} \in S_n$, astfel încât $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e_n$.

Permutarea σ^{-1} se numește *inversa* permutării σ.

Exemplu:

Inversa permutării $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ este permutarea $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$(\tau \circ \tau^{-1})(1) = 1 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(1)) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(1) = 2$, adică $1 \to 2$,

$(\tau \circ \tau^{-1})(2) = 2 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(2)) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(2) = 3$, adică $2 \to 3$,

$(\tau \circ \tau^{-1})(3) = 3 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(3)) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(3) = 1$, adică $3 \to 1$,

$(\tau \circ \tau^{-1})(4) = 4 \Rightarrow \tau(\tau^{-1}(4)) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(4) = 4$, adică $4 \to 4$.

$(\tau^{-1} \circ \tau)(1) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(1)) = 1 \Rightarrow \tau^{-1}(3) = 1$, adică $3 \to 1$,

$(\tau^{-1} \circ \tau)(2) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(2)) = 2 \Rightarrow \tau^{-1}(1) = 2$, adică $1 \to 2$,

$(\tau^{-1} \circ \tau)(3) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(3)) = 3 \Rightarrow \tau^{-1}(2) = 3$, adică $2 \to 3$,

$(\tau^{-1} \circ \tau)(4) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(\tau(4)) = 4 \Rightarrow \tau^{-1}(4) = 4$, adică $4 \to 4$.

Inversiunile unei permutări. Semnul unei permutări

- Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de ordin n, atunci o pereche ordonată (i, j) din mulțimea $M = \{(i, j) | 1 \le i < j \le n\}$ cu proprietatea $i < j$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$, se numește *inversiune* a permutării σ.

  Mai putem spune că *o inversiune în permutarea* σ este o pereche de numere naturale $(\sigma(i), \sigma(j))$ situată pe linia a doua a tabloului, având proprietatea $i < j$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$.

- Numărul inversiunilor permutării σ se notează $\mathrm{m}(\sigma)$.

  Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\mathrm{m}(\sigma)}$ se numește *signatura* (*semnul*) permutării σ.

  - Dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$, atunci permutarea se numește *permutare pară*.
  - Dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$, atunci permutarea se numește *permutare impară*.

- Oricare ar fi permutarea $\sigma \in S_n$, $n \ge 2$, avem:

$$0 \le m(\sigma) \le \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proprietate. Dacă $\sigma_1 \in S_n$, $\sigma_2 \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2)$.

Exemplu:

Să se determine semnul permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

Aplicăm definiția inversiunii într-o permutare:

$1 < 2 \Rightarrow 3 > 2$, $\quad$ $2 < 4 \Rightarrow 2 \not> 5$,

$1 < 3 \Rightarrow 3 > 1$, $\quad$ $2 < 5 \Rightarrow 2 \not> 4$,

$1 < 4 \Rightarrow 3 \not> 5$, $\quad$ $3 < 4 \Rightarrow 1 \not> 5$,

$1 < 5 \Rightarrow 3 \not> 4$, $\quad$ $3 < 5 \Rightarrow 1 \not> 4$,

$2 < 3 \Rightarrow 2 > 1$, $\quad$ $4 < 5 \Rightarrow 5 > 4$.

Inversiunile sunt (3, 2), (3, 1), (2, 1), (5, 4), deci $m(\sigma) = 4$.

Atunci $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = (-1)^4 = 1$, deci permutarea σ este pară.

Transpoziții

Permutarea de ordin n, notată τ_{ij} și definită prin

$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$ se numește *transpoziție* (τ_{ij} permută numai elementele i și j din linia a doua a tabloului, restul elementelor rămânând neschimbate).

Observații:

1) Orice transpoziție este o permutare impară.

2) $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$ și $\tau_{ij}^{\,2} = e_n$.

Probleme rezolvate

1. Fie permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați permutările α^{-1} și β^{-1}.

b) Rezolvați ecuațiile $x \circ \alpha = \beta$ și $\beta \circ y = \alpha$, în S_3.

Rezolvare.

a) $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $x \circ \alpha = \beta$. Se compune cu α^{-1}, la dreapta ecuației:

$$x = \beta \circ \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\beta \circ y = \alpha$. Se compune cu β^{-1}, la stânga ecuației:

$$y=\beta^{-1}\circ\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

2. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\in S_4$. Să se calculeze:

a) σ^2, σ^3, σ^4.
b) σ^{2012}.
Rezolvare

a) $\sigma^2=\sigma\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

$$\sigma^3=\sigma^2\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

$$\sigma^4=\sigma^3\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=e.$$

b) $\sigma^{2012}=\sigma^{2008+4}=\sigma^{2008}\circ\sigma^4=\left(\sigma^4\right)^{502}\circ\sigma^4=e^{502}\circ\sigma^4=e\circ\sigma^4=\sigma^4=e$.

3. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

a) Să se determine numărul de inversiuni și signatura permutării σ.
b) Să se arate că ecuația $x^2=\sigma$ nu are soluții în S_4.
Rezolvare.
a) Aplicăm definiția inversiunii în permutarea σ:

$1<2\Rightarrow 4>3$, $\quad 2<3\Rightarrow 3>1$,
$1<3\Rightarrow 4>1$, $\quad 2<4\Rightarrow 3>2$,
$1<4\Rightarrow 4>2$, $\quad 3<4\Rightarrow 1\not>2$.

Inversiunile sunt (4, 3), (4, 1), (4, 2), (3, 1), (3, 2). Deci $m(\sigma)=5$, de unde rezultă că $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^5=-1$.
b) Deoarece $\varepsilon(x^2)=\varepsilon(x\circ x)=\varepsilon(x)\cdot\varepsilon(x)=[\varepsilon(x)]^2=1\Rightarrow\varepsilon(x^2)=1$, iar $\varepsilon(\sigma)=-1$, deducem că x^2 este o permutare pară pentru orice $x\in S_4$, iar σ este o permutare impară. Cum $\varepsilon(x^2)\neq\varepsilon(\sigma)$, adică $1\neq-1$, atunci ecuația nu poate avea soluții.

4. Să se scrie următoarele permutări ca un produs de transpoziții:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

a) Cum $\sigma(1) = 3 \neq 1$, atunci considerăm transpoziția $\tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Efectuăm compunerea $\sigma' = \tau_{13} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Cum $\sigma'(2) = 5 \neq 2$, considerăm transpoziția $\tau_{25} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Efectuăm compunerea $\sigma'' = \tau_{25} \circ \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \tau_{45}$.

Cum $\tau_{45} = \tau_{25} \circ \sigma' = \tau_{25} \circ \tau_{13} \circ \sigma$, pentru a determina permutarea σ, amplificăm egalitatea la stânga cu $\tau_{25}^{-1} = \tau_{25}$, apoi cu $\tau_{13}^{-1} = \tau_{13}$, astfel am obținut $\sigma = \tau_{13} \circ \tau_{25} \circ \tau_{45}$.

b) Cum $\sigma(1) = 3 \neq 1$, atunci considerăm transpoziția $\tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Efectuăm compunerea $\sigma' = \tau_{13} \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Cum $\sigma'(2) = 3 \neq 2$, considerăm transpoziția $\tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Efectuăm compunerea $\sigma'' = \tau_{23} \circ \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Cum $\sigma''(4) = 5 \neq 4$, considerăm transpoziția $\tau_{45} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Efectuăm compunerea $\sigma''' = \tau_{45} \circ \sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e$.

Deci $e = \tau_{45} \circ \sigma'' = \tau_{45} \circ \tau_{23} \circ \sigma' = \tau_{45} \circ \tau_{23} \circ \tau_{13} \circ \sigma$, de unde $\sigma = \tau_{13} \circ \tau_{23} \circ \tau_{45}$.

Reamintim: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$, $\tau_{ij}^{2} = e_n$.