

Marius Perianu
Mircea Fianu
Dana Heuberger

Matematică

Clasa a VIII-a

I



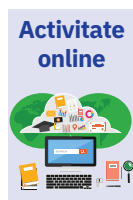
Pictograme utilizate

Prin pictograme specifice domeniilor de mai jos sunt indicate **problemele cu caracter interdisciplinar**.

 <p>Fizică</p>	 <p>Chimie</p>	 <p>Administrație publică</p>	 <p>Genetică</p>
 <p>Comerț</p>	 <p>Marketing</p>	 <p>Turism</p>	 <p>Artizanat</p>



Pentru a facilita interactivitatea, problemele care pot fi lucrate pe grupe de elevi sunt marcate prin **Activitate pe echipe**.



Prin **Activitate online** sunt marcate problemele care pot fi rezolvate cu ușurință în interacțiunea profesorului cu elevii prin intermediul internetului.

Algebră

I. Intervale de numere reale. Inecuații în \mathbb{R}

I.1.	Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor	10
I.2.	Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Intersecția și reuniunea intervalelor	16
I.3.	Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ (≤ 0 , > 0 , < 0)	24
	Teste de evaluare	33
	Fișă pentru portofoliul individual (A1)	35
I.4.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	37

II. Calcul algebric în \mathbb{R}

II.1.	Operații cu numere reale reprezentate prin litere	40
II.1.1.	Termeni asemenea. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere	41
II.1.2.	Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	44
II.1.3.	Ridicarea la putere cu exponent întreg a numerelor reale reprezentate prin litere. Ordinea efectuării operațiilor	46
II.2.	Formule de calcul prescurtat	49
II.3.	Raționalizarea numitorilor	58
II.4.	Descompunerea în factori	62
II.4.1.	Metoda factorului comun	62
II.4.2.	Utilizarea formulelor de calcul prescurtat	63
II.4.3.	Descompunerea în factori folosind metode combinate	66
	Teste de evaluare	69
	Fișă pentru portofoliul individual (A2)	71
II.5.	Fracții algebrice. Amplificarea. Simplificarea	73
II.6.	Operații cu fracții algebrice	77
II.6.1.	Adunarea și scăderea	77
II.6.2.	Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere. Expresii cu toate operațiile	81
	Teste de evaluare	89
	Fișă pentru portofoliul individual (A3)	91
II.7.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	93

Geometrie

III. Elemente ale geometriei în spațiu

III.1.	Puncte, drepte, plane	98
III.2.	Piramida	104
III.3.	Prisma dreaptă	108

III.4.	Cilindrul circular drept. Conul circular drept	113
	Teste de evaluare	116
	Fișă pentru portofoliul individual (G1)	117
III.5.	Drepte paralele. Unghiul a două drepte în spațiu	119
III.6.	Dreaptă paralelă cu un plan	124
III.7.	Plane paralele	128
III.8.	Secțiuni paralele cu bazele. Trunchiul de piramidă. Trunchiul de con	132
	Teste de evaluare	137
	Fișă pentru portofoliul individual (G2)	139
III.9.	Dreaptă perpendiculară pe un plan	141
III.10.	Înălțimea piramidei. Înălțimea conului	146
III.11.	Înălțimea prisme. Înălțimea cilindrului	149
III.12.	Înălțimea trunchiului de piramidă. Înălțimea trunchiului de con	152
	Teste de evaluare	155
	Fișă pentru portofoliul individual (G3)	157
III.13.	Plane perpendiculare	159
III.14.	Secțiuni diagonale și axiale	163
III.15.	Proiecții pe un plan	167
III.16.	Unghiul dintre o dreaptă și un plan	171
	Teste de evaluare	175
	Fișă pentru portofoliul individual (G4)	177
III.17.	Unghi diedru. Unghiul a două plane	179
III.18.	Teorema celor trei perpendiculare ($T3\perp$)	184
	Teste de evaluare	189
	Fișă pentru portofoliul individual (G5)	191
III.19.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	193

IV. Variante de subiecte pentru evaluarea sumativă

Varianta 1	200
Varianta 2	200
Varianta 3	201
Varianta 4	201
Varianta 5	202
Varianta 6	202
Varianta 7	203
Varianta 8	204
Varianta 9	204
Varianta 10	205

Soluții	206
---------	-----

Algebră

10	I.1	Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor
16	I.2	Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Intersecția și reuniunea intervalelor
24	I.3	Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ (≤ 0 , > 0 , < 0)
33		Teste de evaluare
35		Fișă pentru portofoliul individual (A1)
37	I.4	Probleme pentru performanță și olimpiade școlare

I

Intervale de numere reale. Inecuații în \mathbb{R}



I.1 Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

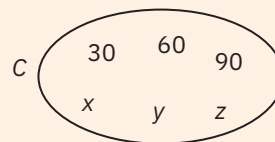
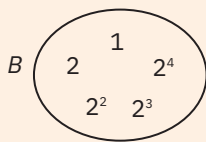
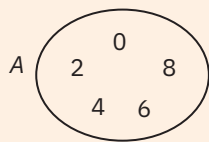
În clasele anterioare am considerat, fără a putea da o definiție riguroasă, că o *mulțime* este o colecție bine definită de obiecte distincte (numite elemente), considerată ca un întreg.

Mulțimile se notează, de regulă, cu litere mari ale alfabetului latin (A, B, M, N etc.), iar elementele se notează cu litere mici, simboluri, numere etc.

Moduri de definire a mulțimilor

a sintetic: prin enumerarea (listarea) elementelor între acolade sau prin diagrame Venn-Euler

Exemple. a $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4\}$, $C = \{30, 60, 90, x, y, z\}$.



b D este mulțimea cifrelor în baza 10: $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

c S este mulțimea culorilor de pe steagul României: $S = \{\text{roșu, galben, albastru}\}$.

b analitic: prin enunțarea unei proprietăți comune elementelor acelei mulțimi

Dacă elementele unei mulțimi M au o proprietate comună, notată cu p , specifică lor și numai lor, atunci mulțimea M se poate defini și astfel:

$$M = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}.$$

Citim: M este mulțimea formată din elementele x care au proprietatea p .

Exemple. Mulțimile A, B, S de mai sus se pot reprezenta astfel:

$$A = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}; \quad B = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}; \quad S = \{c \mid c \text{ este o culoare a steagului României}\}.$$

Observații

1 Pentru mulțimile cu un număr mare de elemente, scrierea întregii liste de elemente poate deveni nepracticabilă. De aceea, vom folosi o listă abreviată, indicată explicit prin simbolul ... (trei puncte), unde elementele specificate urmează un anumit șablon (un model, o schemă).

Exemplu. Mulțimea E a primelor o sută de numere naturale nenule se poate scrie:

$$E = \{1, 2, 3, \dots, 100\}.$$

2 Pentru definirea unei mulțimi se pot utiliza și două sau mai multe proprietăți pe care le verifică elementele sale, separate prin virgulă sau prin conjuncția „și”.

Exemplu. Mulțimea $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ se poate scrie sub una dintre formele:

$$P = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este număr par}, x \leq 12\} \quad \text{sau} \quad P = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}, k \leq 6\}.$$

3 Dacă elementele unei mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor sale aparțin unui domeniu dat (altfel spus, mulțimea dată este submulțime a unei mulțimi definite anterior), putem indica acest lucru înainte de bara verticală.

Exemplu. Mulțimea $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 100\}$ a numerelor naturale cel mult egale cu 100 se scrie mai simplu $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 100\}$.

4 Pentru simplificarea scrierii, dacă elementele se pot determina printr-o formulă de calcul (au o formă comună), această formulă (proprietate comună) se poate scrie înainte de bara verticală.

Exemplu. Mulțimea $T = \{x \mid x = 8k + 3, k \in \mathbb{N}\}$ a numerelor naturale care dau restul 3 la împărțirea cu 8 (adică mulțimea numerelor de forma $8k + 3$, unde $k \in \mathbb{N}$) se notează simplificat $T = \{8k + 3 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

5 Pentru mulțimile infinite, este mai avantajoasă scrierea acestora prin indicarea unei forme comune a elementelor.

Astfel, mulțimea multiplilor întregi ai unui număr natural nenul n se scrie: $M_n = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Mulțimea numerelor raționale se scrie $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 1 \right\}$ sau $\mathbb{Q} = \left\{ \pm \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exersare



1 Fie mulțimea $M = \left\{ -4, (7); 0; -2\sqrt{3}; \frac{\pi}{2}; -\frac{8}{4}; \sqrt{\frac{1}{9}}; 2-\sqrt{7}; \sqrt{5}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{9}}{3}; \sqrt{\frac{75}{12}} \right\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

- | | | |
|--|---|---|
| a $A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\};$ | b $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\};$ | c $C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}\};$ |
| d $D = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{Q}\};$ | e $E = \{x \in M \mid x \geq 0\};$ | f $F = \{x \in M \mid 0 < x < 1\};$ |
| g $G = \{x \in M \mid x \geq \sqrt{5}\};$ | h $H = \{x \in M \mid x > 10\};$ | i $I = \{x \in M \mid x < -2\}.$ |

2 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

- | | |
|--|---|
| a $P_1: \sqrt{2} \in \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\};$ | b $P_2: 652 \in \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\};$ |
| c $P_3: -8 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 8\};$ | d $P_4: \sqrt{18} \notin \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\};$ |
| e $P_5: 256 \notin \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{Z}\};$ | f $P_6: -\pi \notin \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 3\}.$ |



3 Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x < 10\}$ și $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- | | | |
|---|--|---|
| a $P_1: \{0, 1, 2, 3\} \subset A;$ | b $P_2: A \subset B;$ | c $P_3: \{3x \mid x \in A\} \subset C;$ |
| d $P_4: B = \{x \in \mathbb{N} \mid 32 \leq 2^x < 1024\};$ | e $P_5: C \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x : 3\};$ | f $P_6: A \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 \leq 13\}.$ |

4 Pentru fiecare dintre mulțimile următoare, definite printr-o proprietate comună a elementelor, stabiliți care dintre reprezentările prin enumerarea elementelor este corectă:

- | | | |
|---|---|--|
| $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < 3^x \leq 729\};$ | $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 25 < x^2 \leq 121\};$ | $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x = 4 \text{ sau } 4^x = 64\};$ |
| $D = \{7k - 4 \mid k \in \mathbb{N}, 3 < k \leq 8\};$ | $E = \{\overline{xy} \in \mathbb{N} \mid \overline{xy} : 3, x : 4\};$ | $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid 17 < 4x - 10 \leq 34\}.$ |
| a $A = \{2, 3, 4, 5, 6\};$ | B $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$ | C $A = \{3, 4, 5, 6\}.$ |
| b $A = B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\};$ | B $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\};$ | C $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}.$ |
| c $A = C = \emptyset;$ | B $C = \{0, 1, 2, 3\};$ | C $C = \{2, 3\}.$ |
| d $A = D = \{24, 31, 38, 45, 52\};$ | B $D = \{24, 31, 38, 45\};$ | C $D = \{17, 24, 31, 38, 45, 52\}.$ |
| e $A = E = \{42, 48, 84\};$ | B $E = \{42, 48, 60, 66, 84\};$ | C $E = \{42, 45, 48, 81, 84, 87\}.$ |
| f $A = F = \{8, 9, 10, 11\};$ | B $F = \{7, 8, 9, 10, 11\};$ | C $F = \{6, 7, 8, 9, 10\}.$ |

5 Pentru fiecare dintre mulțimile de mai jos, definite prin enumerarea elementelor, stabiliți care dintre reprezentările folosind o proprietate comună a elementelor este corectă:

- | | | |
|--|--|--|
| $A = \{0, 6, 12, 18, \dots, 72\};$ | $B = \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\};$ | $C = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\};$ |
| $D = \{1, 6, 11, 16, 21, 26, \dots\};$ | $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\};$ | $F = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$ |
| a $A = \{6k \mid 0 \leq k \leq 12\};$ | B $A = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}, k \leq 12\};$ | C $A = \{6k \mid k \in \mathbb{N}, k < 13\}.$ |
| b $A = B = \{\pm 3^k \mid k \in \mathbb{N}, k < 2\};$ | B $B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 2\};$ | C $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 9 : x\}.$ |

Activitate online



Activitate online



Activitate online



Activitate online



- c $A = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$; b $C = \{3k \mid k \in \mathbb{Q}, k \geq 0\}$; c $C = \{3k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 5\}$.
- d $A = \{5k + 1 \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 5\}$; b $D = \{5k - 4 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$; c $D = \{5k + 1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.
- e $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$; b $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2^{x+3} \leq 64\}$; c $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < 2x + 9 \leq 15\}$.
- f $A = \{x - 2 \mid x \in \mathbb{N}^*\}$; b $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 \leq 2^{x+4}\}$; c $F = \{x \in \mathbb{Q} \mid -5x - 13 < 2\}$.

6 Scrieți următoarele mulțimi indicând o proprietate comună a elementelor:

- a mulțimea numerelor naturale impare cuprinse între 17 și 28;
b mulțimea numerelor naturale mai mici decât 38, divizibile cu 3;
c mulțimea pătratelor perfecte mai mici decât 225 și mai mari decât 100;
d mulțimea tuturor cuburilor perfecte cuprinse între 7 și 130.

7 a Se consideră mulțimile $A = \{2n + 7 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{3n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Arătați că $61 \in A \cap B$.

b Fie mulțimile $C = \{8n + 7 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $D = \{7n + 8 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Verificați dacă $43 \in C \cup D$ și $99 \in C \cup D$.

c Se dau mulțimile $E = \{9n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $F = \{5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

$$P_1: 40 \in E \setminus F; \quad P_2: 53 \in F \setminus E; \quad P_3: 58 \notin E \cap F; \quad P_4: 101 \in E \cup F; \quad P_5: 107 \notin E \cup F.$$

Activitate online



8 Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite sau infinite:

- a $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 200\}$; b $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 220\}$; c $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 222\}$;
d $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq 3x + 1 \leq 61\}$; e $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4x - 5 \geq 19\}$; f $F = \{x \in \mathbb{Q} \mid 7x \in \mathbb{Z}\}$;
g $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 2000\}$; h $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2^x > 1000\}$; i $I = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x| > 1000\}$.

Consolidare



Activitate pe echipe



9 a Se dau mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{x \mid x = 7a + 2, a \in A\}$. Determinați elementele mulțimii B .

b Scrieți prin enumerarea elementelor mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 25^{10} < 5^x \leq 125^8\}$ și $B = \{3x - 11 \mid x \in A\}$.

c Fie $A = \{0, 2, 4, 6\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea $B = \{x \mid x = 3^a - 2^a, a \in A\}$.

10 Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor lor:

a $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10} \right\}$; b $B = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{9}{11} \right\}$;

c $C = \{\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{5}, \sqrt{30}, \sqrt{42}, 2\sqrt{14}\}$; d $D = \{\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 6, 4\sqrt{5}, 5\sqrt{6}, 6\sqrt{7}, 14\sqrt{2}\}$.

11 Se consideră mulțimea $A = \{5, 9, 13, 17, \dots, 201\}$.

a Scrieți mulțimea A cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor sale.

b Determinați cardinalul mulțimii A .

c Arătați că media aritmetică a elementelor din A nu aparține mulțimii A .

12 Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = 8k + 4, k \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$.

a Scrieți câte trei elemente din fiecare mulțime.

b Verificați dacă numerele 224, 804 și 782 aparțin celor două mulțimi.

c Arătați că $A \subset B$ și $B \not\subset A$.

13 Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

a $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4x + 6 = 9x - 24\}$;

b $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 16 = 19 - 4x^2\}$;

c $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + 3y = 7 \text{ și } 2x + 5y = 17\}$;

d $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 5x - 2y = -2 \text{ și } 4x + y = 14\}$;

e $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2x + 3x + \dots + 11x = 462\}$;

f $F = \{x \in \mathbb{N} \mid (10^2)^{10^x} : (10^3 \cdot 10^6 \cdot 10^9)^x = 10\,000\}$.

14 Determinați mulțimile:

a $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 88 + xy = 33\}$;

b $B = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid xy - 3x - 3y = 5\}$;

c $C = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid xy + 2x + 4y = 22\}$;

d $D = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 3x + 7y = 60\}$.

15 Calculați suma celor mai mici 101 elemente ale mulțimii $\left\{n \in \mathbb{N} \mid \text{fracția } \frac{n-3}{3n-2} \text{ este reducibilă}\right\}$.

Indicație. Fie d un divizor comun al numerelor $n-3$ și $3n-2$. Folosind proprietățile relației de divizibilitate, determinați un număr natural a astfel încât $d \mid a$.

16 Se consideră mulțimile $A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{12} \in \mathbb{N}\right\}$, $B = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{15} \in \mathbb{N}\right\}$ și $C = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{36} \in \mathbb{N}\right\}$. Aflați cel mai mic număr natural nenul a cu proprietatea că $a \in A \cap B \cap C$.



17 Se consideră mulțimile:

$A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \text{fracția } \frac{6}{n} \text{ este subunitară}\right\}$;

$B = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \text{fracția } \frac{6}{n} \text{ este ireducibilă}\right\}$;

$C = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \text{fracția } \frac{6}{n} \text{ este periodică simplă}\right\}$;

$D = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \text{fracția } \frac{6}{n} \text{ este periodică mixtă}\right\}$.

a Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

$P_1: 1 \in A$;

$P_2: 4 \in B$;

$P_3: 9 \in C$;

$P_4: 30 \in D$;

$P_5: 28 \in D$;

$P_6: 5 \in A \cap B$;

$P_7: 12 \in A \setminus C$;

$P_8: C \cup D = \mathbb{N}^*$;

$P_9: 7 \in B \cap C$;

$P_{10}: D \setminus B \neq \emptyset$.

b Alegeți varianta corectă de răspuns:

i Numărul de elemente al mulțimii A este egal cu:

A 6

B 7

C 5

D o infinitate.

ii Relația $n \in B$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geq 5$ cu proprietatea:

A $n : 6$

B n este prim

C n este impar

D $n : 7$.

iii Dintre următoarele mulțimi X , afirmația $X \subset C$ este adevărată pentru:

A $X = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$

B $X = \{3^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$

C $X = \{6^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$

D $X = \{11^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

iv Cardinalul mulțimii $E = \{n \in D \mid n \leq 50\}$ este egal cu:

A 5

B 7

C 10

D 8.

18 Scrieți elementele mulțimilor:

a $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{4}{x+2} \in \mathbb{N}\right\}$;

b $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$;

c $C = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{5}{x-2} \in \mathbb{Z}\right\}$;

d $D = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{3x+11}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$;

e $E = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{4x+11}{3x+2} \in \mathbb{Z}\right\}$;

f $F = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{5x+13}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

19 Determinați mulțimile:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \quad A &= \{a \in \{0,1,2,\dots,9\} \mid \overline{4a1} : 3\}; & \mathbf{b} \quad B &= \{b \in \{0,1,2,\dots,9\} \mid \overline{11b5} : 9\}; & \mathbf{c} \quad C &= \{c \in \{0,1,2,\dots,9\} \mid \overline{44c2} : 2\}; \\ \mathbf{d} \quad D &= \{d \in \{0,1,2,\dots,9\} \mid \overline{8d5} : 25\}; & \mathbf{e} \quad E &= \{e \in \{0,1,2,\dots,9\} \mid \overline{713e} : 6\}; & \mathbf{f} \quad F &= \{f \in \{0,1,2,\dots,9\} \mid \overline{f4f} : 12\}. \end{aligned}$$

20 Fie U mulțimea cifrelor în baza 10. Determinați numărul de elemente ale mulțimilor:

$$\mathbf{a} \quad A = \{(a,b) \in U \times U \mid \overline{62ab} : 15\}; \quad \mathbf{b} \quad A = \{(a,b) \in U \times U \mid \overline{2a3b} : 36\}; \quad \mathbf{c} \quad A = \{(a,b) \in U \times U \mid \overline{aa4b} : 45\}.$$

21 Fie $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \quad A &= \left\{x \in U \mid \sqrt{\frac{1x28}{3}} \in \mathbb{N}\right\}; & \mathbf{b} \quad B &= \left\{x \in U \mid \sqrt{\frac{17x}{11}} \notin \mathbb{N}\right\}; & \mathbf{c} \quad C &= \left\{x \in U \mid \sqrt{\frac{2x9x}{18}} \in \mathbb{N}\right\}; \\ \mathbf{d} \quad D &= \left\{x \in U \mid \sqrt{\frac{28x}{18}} \in \mathbb{Q}\right\}; & \mathbf{e} \quad E &= \left\{x \in U \mid \sqrt{\frac{7x}{50}} \in \mathbb{Q}\right\}; & \mathbf{f} \quad F &= \left\{x \in U \mid \sqrt{\frac{x67}{27}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right\}. \end{aligned}$$

Aprofundare



Activitate pe echipe



22 Se consideră mulțimile $A = \{1, 5, 9, 13, 17, \dots\}$, $B = \{3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$ și $C = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

a Scrieți mulțimile A și B cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor lor.

b Identificați cele mai mici cinci elemente ale mulțimii $A \cap C$.

c Arătați că mulțimile B și C sunt disjuncte.

d Demonstrați că $A \cap B = \emptyset$.

23 Determinați numărul natural n pentru care mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^n \leq x \leq 3^{n+2}\}$ are 217 elemente.

24 Se dau mulțimile $A = \left\{\frac{1}{n(n+1)} \mid n \in \mathbb{N}^*, n \leq 100\right\}$ și $B = \left\{\frac{n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}^*, n \leq 100\right\}$.

a Stabiliți câte elemente au mulțimile A și B .

b Comparați suma elementelor mulțimii A cu produsul elementelor mulțimii B .

Indicație b: Utilizați egalitatea $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

25 Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 21 \leq x \leq a, a \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 7\}$. Determinați toate numerele naturale a pentru care mulțimea $A \cap B$ are 25 de elemente.

26 Aflați cardinalul mulțimii $A = \{n \in \mathbb{N}, n < 604 \mid \text{cel puțin o cifră a lui } n \text{ este egală cu } 3\}$.

27 **a** Fie mulțimile $A = \{x = \sqrt{4n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x = \sqrt{5n+3} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Arătați că $A \cup B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b Arătați că mulțimea $M = \{x = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 28} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ nu conține niciun număr rațional.

Probleme de șapte stele



28 Fie mulțimea $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \mid a, b, c \in \mathbb{N}\}$. Arătați că printre oricare 9 elemente ale lui A există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

29 Se consideră mulțimea $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 50\}$.

a Aflați numărul perechilor (a, b) de elemente din A , cu $a < b$, pentru care $a + b = 100$.

b Dacă suma a 46 de elemente ale mulțimii A este 2020, arătați că cel puțin două dintre aceste elemente sunt egale.

30 Se consideră mulțimea A , formată din numere naturale, cu proprietatea că mulțimile $B = \{5x + 1 \mid x \in A\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 7x + 4 \in A\}$ sunt submulțimi ale lui A . Știind că $9 \in A$, arătați că $6 \in A$.

Indicație. Deoarece $B \subset A$, rezultă că dacă $x \in A$, atunci $5 \cdot x + 1 \in A$. Cum $9 \in A$, rezultă că $46 \in A$. Folosiți relația $C \subset A$ pentru a arăta că $6 \in A$.



31 Fie A o mulțime de numere naturale cu proprietatea că $B = \{3x + 2 \mid x \in A\}$ și $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 1 \in A\}$ sunt submulțimi ale lui A . Știind că $1 \in A$, arătați că numerele 4, 5 și 26 aparțin mulțimii A .

I.2 Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Intersecția și reuniunea intervalelor

Intervale de numere reale

Un *interval de numere reale* este o mulțime I de numere reale cu proprietatea că, pentru orice două numere reale $a, b \in I$, cu $a < b$, orice număr real cuprins între a și b aparține mulțimii I . Cu alte cuvinte, o mulțime $I \subset \mathbb{R}$ este interval dacă:

pentru orice $a, b \in I$, $a < b$, și orice $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < x < b$, rezultă $x \in I$.

Având în vedere corespondența dintre mulțimea numerelor reale și axa numerelor, *intervalele de numere reale se reprezintă geometric* ca submulțimi *neîntrerupte* ale axei numerelor, adică sub formă de segment, semidreaptă, punct sau dreaptă.

În funcție de reprezentarea geometrică, intervalele se clasifică în:

- *intervale mărginite* – a căror reprezentare geometrică este un segment sau un punct;
- *intervale nemărginite* – a căror reprezentare geometrică este o semidreaptă sau o dreaptă.

În tabelele de mai jos sunt prezentate toate tipurile de intervale de numere reale, denumirile lor, cât și reprezentarea geometrică a acestora pe axa numerelor.

Simbolurile $-\infty$ (*minus infinit*) și $+\infty$ (*plus infinit*) nu sunt numere reale; acestea se utilizează pentru a scrie intervale nemărginite de numere reale.

Intervale mărginite

Reprezentarea geometrică	Figura geometrică	Definiția intervalului	Denumirea intervalului
	segment închis	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	interval închis: $a, b \in [a, b]$
	segment deschis	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	interval deschis: $a, b \notin (a, b)$
	segment semideschis	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	interval deschis la stânga și închis la dreapta: $a \notin (a, b], b \in (a, b]$
	segment semideschis	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	interval închis la stânga și deschis la dreapta: $a \in [a, b), b \notin [a, b)$

Intervale nemărginite

Reprezentarea geometrică	Figura geometrică	Definiția intervalului	Denumirea intervalului
	semidreaptă închisă	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	interval închis la stânga: $a \in [a, +\infty)$
	semidreaptă deschisă	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	interval deschis la stânga: $a \notin (a, +\infty)$
	semidreaptă închisă	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	interval închis la dreapta: $b \in (-\infty, b]$
	semidreaptă deschisă	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	interval deschis la dreapta: $b \notin (-\infty, b)$
	dreaptă	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$	mulțimea numerelor reale

Observații

1 Intervalele prezentate anterior se numesc intervale nedegenerate (propri).

Intervalul $[a, a]$ se reduce la un punct (interval degenerat):

$$[a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq a\} = \{a\}.$$

2 Notățiile $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ sau $(a, +\infty)$ nu au sens.

Mulțimile notate (a, a) , $(a, a]$ sau $[a, a)$ nu conțin numere reale: $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \emptyset$.

Intersecția și reuniunea intervalelor

Se consideră două intervale de numere reale, I și J . Atunci:

• mulțimea $I \cup J = \{x \mid x \in I \text{ sau } x \in J\}$ se numește *reuniunea intervalelor I și J* ;

• mulțimea $I \cap J = \{x \mid x \in I \text{ și } x \in J\}$ se numește *intersecția intervalelor I și J* .

Pentru determinarea intersecției și a reuniunii a două sau a mai multor intervale, se poate utiliza reprezentarea lor geometrică pe axa numerelor.

Intersecția a două intervale poate fi:

un interval	un punct	mulțimea vidă
$(2, 6) \cap (-1, 4) = (2, 4)$	$[0, 2] \cap [2, 5] = \{2\}$	$(-2, 1) \cap (2, 4) = \emptyset$
$[-2, 3] \cap [1, \infty) = [1, 3]$	$(-1, 1] \cap [1, \infty) = \{1\}$	$(-\infty, 2) \cap [2, 4] = \emptyset$

Reuniunea a două intervale poate fi:

un interval	o mulțime care nu este interval
$[0, 2] \cup [2, 5] = [0, 5]$	$(-2, 1) \cup (3, 5)$
$(-\infty, 1) \cup (0, 4) = (-\infty, 4)$	$(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$
$(-\infty, 5) \cup (-1, \infty) = \mathbb{R}$	$[0, 4] \cup (8, \infty)$

Modulul unui număr real

Se consideră un număr real a , $a > 0$. Atunci:

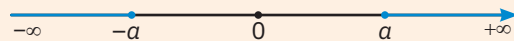
1 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = [-a, a]$



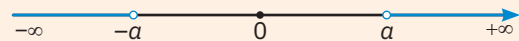
2 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\} = (-a, a)$



3 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$



4 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$



Exemple

a $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\} = (-3, 3)$;

b $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 6\} = [-6, 6]$;

c $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3\} = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$;

d $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \sqrt{3}\} = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$;

e $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq -1\} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$;

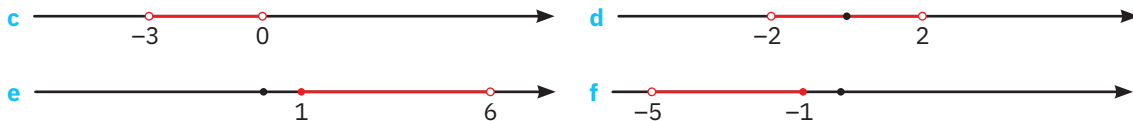
f $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}^*$.

Exersare



1 Indicați, în fiecare dintre cazurile următoare, intervalul I reprezentat pe axa numerelor prin segmentul colorat cu roșu (sau porțiunea colorată cu roșu a axei numerelor):





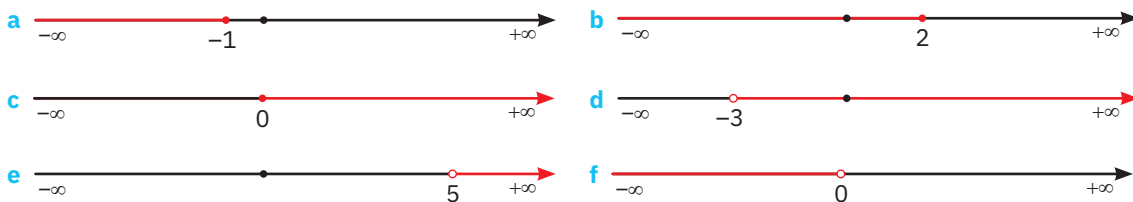
2 Scrieți sub formă de interval mărginit și apoi reprezentați pe axă mulțimea numerelor reale x , care satisfac relația:

- a** $0 \leq x \leq 3$; **b** $-2 < x < \sqrt{7}$; **c** $1 \leq x < 6$; **d** $2 < x \leq 2\sqrt{2}$;
e $\frac{8}{3} > x \geq 0$; **f** $4 \geq x > -\frac{1}{2}$; **g** $3 \geq x \geq -3$; **h** $\sqrt{6} > x > -\sqrt{6}$.

Activitate online



3 Indicați, în fiecare dintre cazurile de mai jos, intervalul I reprezentat pe axa numerelor prin semi-dreapta colorată cu roșu (sau porțiunea colorată cu roșu a axei numerelor):



4 Scrieți sub formă de interval nemărginit și apoi reprezentați pe axă mulțimea numerelor reale x care satisfac relația:

- a** $x > 0$; **b** $x < -1$; **c** $x \leq \sqrt{5}$; **d** $x \geq -\sqrt{3}$;
e $7 > x$; **f** $-2\sqrt{3} \leq x$; **g** $-\frac{3}{2} \geq x$; **h** $\frac{5}{3} < x$.

5 Scrieți următoarele mulțimi de numere reale sub formă de intervale, folosind simboluri ca în exemplul dat:

- a** intervalul deschis la stânga în -7 și închis la dreapta în 3 se scrie $(-7; 3]$;
b intervalul deschis la stânga în 0 și la dreapta în 7 se scrie;
c intervalul închis la stânga în -1 și la dreapta în $+1$ se scrie;
d intervalul deschis la stânga în 4 și nemărginit la dreapta se scrie;
e intervalul nemărginit la stânga și închis la dreapta în 9 se scrie;
f intervalul închis la stânga în -6 și nemărginit la dreapta se scrie

6 Completați spațiile libere cu răspunsul corect, scris sub formă de interval:

- a** mulțimea numerelor reale negative este;
b mulțimea numerelor reale mai mici decât 5 este;
c mulțimea numerelor reale mai mari sau egale cu -4 este;
d mulțimea numerelor reale mai mari decât -3 și mai mici sau egale cu 6 este;
e mulțimea numerelor reale pozitive mai mici decât 10 este;
f mulțimea numerelor reale mai mici decât 20 și mai mari sau egale cu $\sqrt{5}$ este

Activitate online



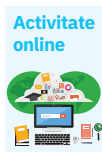
7 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a** $P_1: -3 \in [-3, +\infty)$; **b** $P_2: -2 \in (-2, 10]$; **c** $P_3: 4 \in (-5, 7)$; **d** $P_4: 7 \in (-2, 6)$;
e $P_5: -5 \notin (-\infty, -4)$; **f** $P_6: -3 \notin (-\infty, -4)$; **g** $P_7: 7 \notin (-7, 7)$; **h** $P_8: -2 \notin [-2, +\infty)$.



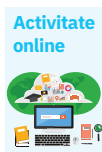
8 Efectuați următoarele operații cu mulțimi, alegând răspunsul corect dintre variantele **A–D** indicate:

- a $(-\infty, 7) \cup \{7\} =$ **A** $(-\infty, 7)$ **B** $(-\infty, 7]$ **C** $(-\infty, 8)$ **D** $(-\infty, 8]$;
 b $(-3, -1) \cup \{-1\} =$ **A** $(-3, -1]$ **B** $(-3, -1)$ **C** $[-3, -1]$ **D** $[-3, -1]$;
 c $(-2, 4] \cup \{-2, 4\}$ **A** $[-2, 4)$ **B** $[-2, 4]$ **C** $(-2, 4)$ **D** $(-2, 4]$;
 d $(-2, 6) \cap \{5\} =$ **A** $(-2, 5)$ **B** $(-2, 5]$ **C** $\{5\}$ **D** $(-2, 6)$;
 e $(-\infty, 4) \cap \{0, 4\} =$ **A** $(-\infty, 4)$ **B** $\{0, 4\}$ **C** $\{0\}$ **D** $(0, 4)$;
 f $[-3, \infty) \setminus \{-3\} =$ **A** $[-3, \infty)$ **B** $(-3, \infty)$ **C** $(-2, \infty)$ **D** \emptyset .



9 Efectuați următoarele **intersecții** de intervale, alegând răspunsul corect dintre variantele **A–D** indicate:

- a $(-1, 5) \cap (2, 8) =$ **A** $(2, 5)$ **B** $(-1, 5)$ **C** $(-1, 8)$ **D** $(-\infty, 8]$;
 b $[0, 8] \cap [4, 12] =$ **A** $[0, 12]$ **B** $[0, 4]$ **C** $[4, 8]$ **D** $[8, 12]$;
 c $(-2, 2) \cap [4, 7] =$ **A** $(-2, 7]$ **B** \emptyset **C** $(2, 4]$ **D** $(2, 4)$;
 d $(0, 4] \cap [4, \infty) =$ **A** \emptyset **B** $(0, 4)$ **C** $\{4\}$ **D** $(0, \infty)$.



10 Efectuați următoarele **reuniuni** de intervale, alegând răspunsul corect dintre variantele **A–D** indicate:

- a $(-1, 6) \cup [4, 10] =$ **A** $[4, 6)$ **B** $(-1, 6)$ **C** $(-1, 10]$ **D** $(6, 10]$;
 b $[-2, 2] \cup (2, 6] =$ **A** $[-2, 2)$ **B** $[-2, 6]$ **C** $[2, 6]$ **D** \emptyset ;
 c $(-4, 3) \cup [-6, 3] =$ **A** $[-6, -4)$ **B** $[-6, -4]$ **C** $[-4, 3]$ **D** $[-6, 3]$;
 d $[0, 8) \cup (2, 5] =$ **A** $[0, 5]$ **B** $(2, 8)$ **C** $(2, 5]$ **D** $[0, 8)$.

Consolidare



11 Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a $P_1: 9 \in \left(-\infty, \frac{47}{5}\right]$; b $P_2: \frac{4}{7} \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$; c $P_3: \frac{13}{8} \in \left[\frac{14}{9}, \frac{12}{7}\right]$; d $P_4: -\frac{5}{2} \notin \left(-3, -\frac{1}{2}\right]$;
 e $P_5: \sqrt{2} \notin (-\infty, 1)$; f $P_6: -3 \notin \left(-\infty, -\sqrt{10}\right)$; g $P_7: 5\sqrt{3} \in (6\sqrt{2}, 4\sqrt{5})$; h $P_8: \sqrt{17} \notin (\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$.

12 a Precizați cel mai mic număr întreg care aparține intervalului indicat:

- i $I = [-2, 5)$; ii $I = \left(-3, \frac{11}{7}\right)$; iii $I = \left[-\frac{8}{3}, \infty\right)$; iv $I_4 = \left(-\frac{3}{10}, \frac{1}{2}\right]$.

b Precizați cel mai mic număr întreg care **nu** aparține intervalului indicat:

- i $I = (-\infty, 5)$; ii $I = (-\infty, 8]$; iii $I = (-\infty, 3\sqrt{7}]$; iv $I = \left(-\infty, \frac{15}{4}\right)$.

13 a Determinați cel mai mare număr întreg care aparține intervalului J , dacă:

- i $J = [-4, 3]$; ii $J = \left(-4, \frac{17}{12}\right)$; iii $J = (-\infty, -2]$; iv $J = \left(-8, -\frac{3}{2}\right)$.

b Determinați cel mai mare număr întreg care **nu** aparține intervalului J , dacă:

- i $J = [-2, \infty)$; ii $J = (-3, \infty)$; iii $J = \left[-\frac{11}{4}, \infty\right)$; iv $J = \left(-\frac{3}{10}, \infty\right)$.



14 Efectuați următoarele **intersecții** de intervale, alegând răspunsul corect dintre variantele **A–D** indicate:

a $(-\infty, 3\sqrt{5}) \cap [2\sqrt{10}, \infty) =$ **A** $(-\infty, 3\sqrt{5})$ **B** $[2\sqrt{10}, 3\sqrt{5})$ **C** \emptyset **D** $(2\sqrt{10}, 3\sqrt{5})$;

b $[-\frac{1}{2}, \infty) \cap (\sqrt{5}, \infty) =$ **A** $(\sqrt{5}, \infty)$ **B** $[-\frac{1}{2}, \sqrt{5})$ **C** $[-\frac{1}{2}, \sqrt{5})$ **D** $[\sqrt{5}, \infty)$;

c $(-2, \sqrt{10}) \cap [-2, \frac{17}{6}] =$ **A** $(-2, \frac{17}{6})$ **B** $(-2, \frac{17}{6}]$ **C** $(-2, \sqrt{10})$ **D** $[-2, \frac{17}{6}]$;

d $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cap [\frac{1}{2}, \infty) =$ **A** $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ **B** $(-\infty, -\frac{1}{2})$ **C** $[\frac{1}{2}, \infty)$ **D** \emptyset .



15 Efectuați următoarele **reuniuni** de intervale, alegând răspunsul corect dintre variantele **A–D** indicate:

a $[0, \infty) \cup [-\sqrt{2}, 0) =$ **A** $(-\infty, -\sqrt{2}]$ **B** $[-\sqrt{2}, 0)$ **C** $[-\sqrt{2}, \infty)$ **D** $[0, \infty)$;

b $(-\infty, \sqrt{2}] \cup (-\sqrt{2}, \infty) =$ **A** \mathbb{R} **B** $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ **C** $(-\infty, \sqrt{2}]$ **D** $(-\sqrt{2}, \infty)$;

c $[-\frac{4}{3}, \infty) \cup (-\sqrt{2}, \infty) =$ **A** $[-\sqrt{2}, -\frac{4}{3}]$ **B** $[-\frac{4}{3}, \infty)$ **C** $(-\sqrt{2}, -\frac{4}{3})$ **D** $(-\sqrt{2}, \infty)$;

d $(-\infty, \frac{8}{3}) \cup [\frac{13}{5}, 6\sqrt{2}) =$ **A** $(-\infty, 6\sqrt{2})$ **B** $[\frac{13}{5}, \frac{8}{3})$ **C** $(-\infty, \frac{8}{3})$ **D** $(-\infty, \frac{13}{5})$.

16 Pornind de la echivalența „ $|x| \leq a$ dacă și numai dacă $-a \leq x \leq a$ ”, unde $a \geq 0$, scrieți următoarele mulțimi sub formă de intervale și reprezentați-le pe axa numerelor:

a $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 7\}$; b $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$; c $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2\}$;

d $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 3| \leq 9\}$; e $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{3x - 2}{4} \right| < 1\}$; f $F = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| 2x - \frac{1}{3} \right| \leq 0, (3)\}$.

17 Pornind de la echivalența „ $|x| \geq a$ dacă și numai dacă $x \leq -a$ sau $x \geq a$ ”, unde $a \geq 0$, scrieți următoarele mulțimi ca reuniune de două intervale și reprezentați-le pe axa numerelor:

a $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 3\}$; b $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 7\}$; c $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| > 0\}$;

d $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2-x}{4} \right| \geq 1\}$; e $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{4x-1}{3} \right| > 3\}$; f $F = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{3x-\sqrt{3}}{2} \right| \geq \sqrt{3}\}$.

18 Dacă a și b , cu $a < b$, sunt două numere reale și I este un interval mărginit de capete a și b (închis, deschis sau semideschis), numărul $l(I) = |a - b|$ se numește *lungimea intervalului mărginit I*. Calculați lungimea fiecăruia dintre intervalele:

a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; b $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; c $(-\frac{3}{7}, \frac{11}{7})$; d $[-\frac{3}{7}, \frac{11}{7})$; e $(-\frac{8}{5}, \frac{7}{5})$; f $[-\frac{3}{10}, \frac{1}{2}]$.



19 Scrieți următoarele mulțimi ca intervale mărginite și calculați lungimea fiecărui interval obținut:

a $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < \frac{x+3}{5} \leq 6\}$; b $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq \frac{x-3}{2} \leq 3\}$; c $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq \frac{4x+1}{5} < \frac{2}{3}\}$;

d $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \in (-3, 5)\}$; e $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 - 3x \in (-1, 8)\}$; f $F = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5-2x}{6} \in (-\frac{11}{6}, \frac{5}{3})\}$.

Rezolvare: b Înmulțind cu 2 fiecare membru al dublei inegalități, obținem $-6 \leq x - 3 \leq 6$. Adunând apoi 3 în fiecare membru, rezultă $-3 \leq x \leq 9$, deci $B = [-3, 9]$, de unde $l(B) = |9 - (-3)| = 12$.

20 Arătați că fiecare dintre următoarele mulțimi reprezintă un interval nemărginit:

$$\begin{aligned} \text{a } A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 < 7\}; & \text{b } B &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\sqrt{2}x+2}{4} > -\frac{1}{2}\right\}; & \text{c } B &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3x-2}{4} \geq 5-2x\right\}; \\ \text{d } D &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2+4x}{3} \in \left(\frac{1}{6}, \infty\right)\right\}; & \text{e } E &= \{x \in \mathbb{R} \mid 4-3x \in (-\infty, 1)\}; & \text{f } F &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x+1}{3} \in \left(\frac{3x+1}{4}, \infty\right)\right\}. \end{aligned}$$

21 Determinați Card X în fiecare dintre cazurile:

$$\begin{aligned} \text{a } X &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \in (-3, 5)\}; & \text{b } X &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in [-4, 2]\}; & \text{c } X &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}; \\ \text{d } X &= \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 4\}; & \text{e } X &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in [0, n+1]\}, n \in \mathbb{N}; & \text{f } X &= \left\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < \frac{x-1}{3} < 1\right\}. \end{aligned}$$

22 Scrieți mulțimile A și B ca intervale sau reuniuni de intervale și efectuați $A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, B \cap \mathbb{N}$, în fiecare dintre cazurile:

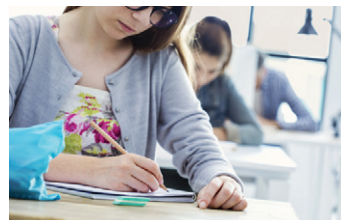
$$\begin{aligned} \text{a } A &= \{x \in \mathbb{R} \mid |-x+1| < 3\}; & \text{b } A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2|x| \leq 30-7|x|\}; \\ B &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5x+4}{3} \in \left(-2; 7\frac{2}{3}\right)\right\}; & B &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|\frac{2x-3}{5}\right| \leq 2\right\}; \\ \text{c } A &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| > 1\}; & \text{d } A &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x+5| \geq 8\}; \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \sqrt{5}\}; & B &= \left\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < \frac{2x+5}{3} \leq 9\right\}. \end{aligned}$$

23 Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ știind că:

$$\begin{aligned} \text{a } \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \in [m, n]\}; \\ \text{b } \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq 5\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [m, n]\}. \end{aligned}$$

24 Determinați numerele reale m și $n, m < n$, știind că:

$$\begin{aligned} \text{a } [m, \infty) \cup [0, 4] &= [-1, \infty); & \text{b } [m, n] \cap [m, 5] &= [-1, 3]; \\ \text{c } [m, n] \cup (-2, 3) &= [-5, 4]; & \text{d } [m, 6] \cap (-1, n) &= [0, 2); \\ \text{e } (m, n] \cap [-10, n) &= (-7, 0); & \text{f } [m, n] \setminus (1, 4) &= [0, 1] \cup [4, 10]. \end{aligned}$$



25 Determinați, în fiecare caz, intervalul I care îndeplinește simultan condițiile:

$$\begin{aligned} \text{a } I \cup (-2, 5] &= (-2, 7) \text{ și } I \cap (-2, 5] = [-1, 5]; & \text{b } I \cap (-1, 4] &= (0, 4] \text{ și } I \cup (-1, 4] = (-1, 5); \\ \text{c } I \cup [-5, 3) &= [-5, 5] \text{ și } I \cap [-5, 3) = (0, 3); & \text{d } I \cap (2, 8) &= (2, 6] \text{ și } I \cup (2, 8) = [-3, 8); \\ \text{e } I \cup [-7, -1] &= [-7, 4] \text{ și } I \cap [-7, -1] = [-3, -1]; & \text{f } I \cap (-2, 8) &= (-2, 2) \text{ și } I \cup (-2, 8) = (-5, 8]. \end{aligned}$$

26 Determinați numerele întregi a și b astfel încât:

$$\begin{aligned} \text{a } (a, b) \cap \mathbb{N} &= \{3\}; & \text{b } [a, b] \cap \mathbb{Z} &= \{-3, -2\}; & \text{c } (a, b) \cap \mathbb{Z} &= \{-3\}; \\ \text{d } [3, a] \cap [b, 7] &= [4, 6]; & \text{e } (a, b) \cap \mathbb{Z} &= \{2, 3\}; & \text{f } (a, -2) \cup (-3, b) &= (-5, 8]. \end{aligned}$$

Rezolvare: a Deoarece $3 \in (a, b)$, rezultă $a < 3$ și $3 < b$. Presupunând că $a < 2$, ar rezulta $2 \in (a, b) \cap \mathbb{N}$, fals. Dacă $a \geq 3$, atunci $3 \notin (a, b)$. Deci $a = 2$. Analog, $b = 4$.

Aprofundare



27 Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ știind că:

$$\text{a } [m, n] \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x+5 \leq 11\} \text{ și } \{-3, 6\} \subset [m, n]; \quad \text{b } \{-2, 3\} \subset [m, n] \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-1| \leq 5\}.$$

28 Fie n un număr natural nenul. Calculați suma numerelor pare din intervalul $[n^2 - n + 1, n^2 + n + 1]$.

29 a Se consideră intervalul $I = (3, \infty)$. Arătați că $xy - 3x - 3y + 12 \in I$, pentru orice $x, y \in I$.

b Se consideră numerele reale $x, y > 0$ astfel încât $4x + 7y = 28$. Arătați că $x + y \in (4, 7)$.



30 Stabiliți dacă:

a numărul $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$ aparține intervalului $\left[\frac{1}{2}; 0,9\right]$;

b numărul $b = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ aparține intervalului $\left[\frac{51}{100}; 1\frac{1}{10}\right]$;

c numărul $c = \frac{6}{2 \cdot 8} + \frac{10}{8 \cdot 18} + \frac{14}{18 \cdot 32}$ aparține intervalului $\left(-1; \frac{7}{8}\right)$.

31 Se consideră numerele reale a și b , $a < b$. Arătați că oricare ar fi $t \in [0, 1]$, numărul $x = (1 - t) \cdot a + t \cdot b$ aparține intervalului $[a, b]$.


32 Fie numerele reale a și b , cu $0 \leq a < b$ și $I = [a, b]$. Arătați că:

a $\frac{a+b}{2} \in I$;

b $\sqrt{ab} \in I$;

c $\frac{2ab}{a+b} \in I$;


d $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \in I$.

33  **(Fizică)** În electricitate, legea lui Ohm afirmă că intensitatea curentului electric pe o porțiune de circuit este direct proporțională cu tensiunea aplicată și invers proporțională cu rezistența electrică pe circuit.

Formula matematică a legii lui Ohm este $I = \frac{U}{R}$, unde I este intensitatea curentului, măsurată


în amperi (A), U este tensiunea aplicată, măsurată în volți (V), iar R este rezistența, măsurată în ohmi (Ω).

Un aspirator are rezistența $R = 40 \Omega$. Știind că tensiunea variază între 220 V și 230 V, determinați în ce interval ia valori intensitatea curentului ce trece prin aspirator.

34  **(Chimie)** Legea Gay-Lussac afirmă că, la presiune constantă, volumul ocupat de o masă bine determinată de gaz variază direct proporțional cu temperatura sa absolută.


Pentru un anumit gaz ideal, volumul V (exprimat în centimetri cubi) este de 24 de ori mai mare decât temperatura sa absolută T (exprimată în Kelvin). Știind că temperatura variază de la 10 °C la 40 °C, determinați intervalul în care ia valori volumul gazului considerat.

Notă. Temperatura absolută, exprimată în Kelvin (K), se determină din formula $T = t + 273,15$, unde t este temperatura exprimată în grade Celsius (°C).

35  **(Comerț)** Un vânzător de autoturisme rulate primește, pentru fiecare mașină vândută, un comision de 40 de euro plus 40% din valoarea adăugată peste prețul cerut de proprietarul mașinii. În funcție de marcă și model, valoarea adăugată peste prețul cerut de proprietar variază între 250 euro și 2000 de euro.

a Un autoturism pentru care proprietarul cere 2500 de euro se vinde cu 3000 de euro. Calculați comisionul vânzătorului.

b Determinați intervalul în care ia valori comisionul primit pentru fiecare vânzare.

36  **(Genetică)** Cele 200 de bacterii dintr-o cultură de laborator sunt pregătite în vederea clonării genelor pentru sinteza penicilinei, procedeu care se realizează cu ajutorul unor formațiuni numite plasmide. Într-o celulă bacteriană, numărul de plasmide aparține valorilor întregi din intervalul $[10, 200]$, fiecare plasmidă având de la 6 la 10 gene. Determinați numărul minim, respectiv numărul maxim de gene care pot fi utilizate pentru clonarea terapeutică și obținerea penicilinei, dacă în urma intervențiilor in vitro, numai 55% dintre gene rămân funcționale.



- 37** În intervalul $[0, 1]$ se consideră numerele iraționale a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , distincte două câte două. Arătați că există $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $i \neq j$, astfel încât $|a_i - a_j| < \frac{1}{4}$.
- 38** Se consideră intervalul deschis și mărginit I , cu proprietatea că $l(I) > 1$. Demonstrați că $I \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$.
- 39** Se consideră intervalele $I = (a, 3b + 1)$ și $J = (3a - 5, b + 2)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.
- a** Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $I \cap J \cap \mathbb{N} = \{2\}$.
- b** Arătați că $I \cap J \neq \emptyset$, pentru orice alegere a numerelor reale a și b .
- 40** Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$, se consideră intervalul $I_n = \left[1 + \frac{4}{n}, 10 - \frac{4}{n}\right]$.
- a** Determinați mulțimile $I_1 \cap \mathbb{N}, I_2 \cap \mathbb{N}, I_5 \cap \mathbb{N}$.
- b** Demonstrați că $I_n \subset I_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$.