Marius Perianu
Mircea Fianu
Dana Heuberger

Matematică

Clasa a VIII-a

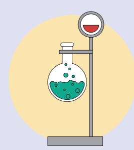
I

art Klett

Pictograme utilizate

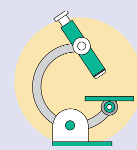
Prin pictograme specifice domeniilor de mai jos sunt indicate **problemele cu caracter interdisciplinar**.

Fizică

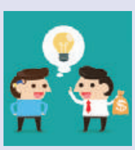


Chimie

Administrație publică



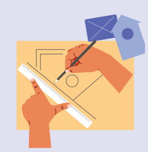
Genetică



Comerț

Marketing

Turism



Artizanat

Pentru a facilita interactivitatea, problemele care pot fi lucrate pe grupe de elevi sunt marcate prin **Activitate pe echipe**.

Prin **Activitate online** sunt marcate problemele care pot fi rezolvate cu ușurință în interacțiunea profesorului cu elevii prin intermediul internetului.

Cuprins

Algebră

I

Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

I.1 Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

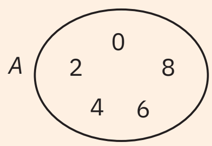
În clasele anterioare am considerat, fără a putea da o definiție riguroasă, că o *mulțime* este o colecție bine definită de obiecte distincte (numite elemente), considerată ca un întreg.

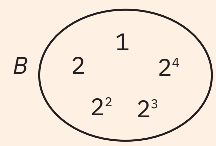
Mulțimile se notează, de regulă, cu litere mari ale alfabetului latin (*A*, *B*, *M*, *N* etc.), iar elementele se notează cu litere mici, simboluri, numere etc.

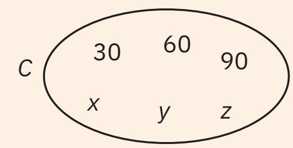
Moduri de definire a mulțimilor

a sintetic: prin enumerarea (listarea) elementelor între acolade sau prin diagrame Venn-Euler

Exemple. **a** $A=\{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4\}$, $C=\{30, 60, 90, x, y, z\}$.







b *D* este mulțimea cifrelor în baza 10: $D=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

c *S* este mulțimea culorilor de pe steagul României: $S=\{$roșu, galben, albastru$\}$.

b analitic: prin enunțarea unei proprietăți comune elementelor acelei mulțimi

Dacă elementele unei mulțimi *M* au o proprietate comună, notată cu *p*, specifică lor și numai lor, atunci mulțimea *M* se poate defini și astfel:

$$M=\{x \mid x \text{ are proprietatea } p\}.$$

Citim: *M* este mulțimea formată din elementele *x* care au proprietatea *p*.

Exemple. Mulțimile *A*, *B*, *S* de mai sus se pot reprezenta astfel:

$A=\{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$; $B=\{2^k \mid k\in\mathbb{N}, k\le 4\}$; $S=\{c \mid c \text{ este o culoare a steagului României}\}$.

Observații

1 Pentru mulțimile cu un număr mare de elemente, scrierea întregii liste de elemente poate deveni nepracticabilă. De aceea, vom folosi o listă abreviată, indicată explicit prin simbolul ... (trei puncte), unde elementele specificate urmează un anumit șablon (un model, o schemă).

Exemplu. Mulțimea *E* a primelor o sută de numere naturale nenule se poate scrie:

$$E=\{1, 2, 3, ..., 100\}.$$

2 Pentru definirea unei mulțimi se pot utiliza și două sau mai multe proprietăți pe care le verifică elementele sale, separate prin virgulă sau prin conjuncția „și".

Exemplu. Mulțimea $P=\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ se poate scrie sub una dintre formele:

$$P=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x \text{ este număr par}, x\le 12\} \quad \text{sau} \quad P=\{x \mid x=2k, k\in\mathbb{N}, k\le 6\}.$$

3 Dacă elementele unei mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor sale aparțin unui domeniu dat (altfel spus, mulțimea dată este submulțime a unei mulțimi definite anterior), putem indica acest lucru înainte de bara verticală.

Exemplu. Mulțimea $E=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x\le 100\}$ a numerelor naturale cel mult egale cu 100 se scrie mai simplu $E=\{x\in\mathbb{N} \mid x\le 100\}$.

4 Pentru simplificarea scrierii, dacă elementele se pot determina printr-o formulă de calcul (au o formă comună), această formulă (proprietatea comună) se poate scrie înainte de bara verticală.

Exemplu. Mulțimea $T=\{x \mid x=8k+3, k\in\mathbb{N}\}$ a numerelor naturale care dau restul 3 la împărțirea cu 8 (adică mulțimea numerelor de forma $8k+3$, unde $k\in\mathbb{N}$) se notează simplificat $T=\{8k+3 \mid k\in\mathbb{N}\}$.

5 Pentru mulțimile infinite, este mai avantajoasă scrierea acestora prin indicarea unei forme comune a elementelor.
Astfel, mulțimea multiplilor întregi ai unui număr natural nenul n se scrie: $M_n = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Mulțimea numerelor raționale se scrie $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \ge 1 \right\}$ sau $\mathbb{Q} = \left\{ \pm\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exersare

1 Fie mulțimea $M = \left\{ -4,(7)\,; 0\,; -2\sqrt{3}\,; \frac{\pi}{2}; -\frac{8}{4}; \sqrt{\frac{1}{9}}; 2-\sqrt{7}\,; \sqrt{5}\,; -\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{9}}{3}; \sqrt{\frac{75}{12}} \right\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

a $A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\}$; **b** $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$; **c** $C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}\}$;
d $D = \{x \in M \mid x \notin \mathbb{Q}\}$; **e** $E = \{x \in M \mid x \ge 0\}$; **f** $F = \{x \in M \mid 0 < x < 1\}$;
g $G = \{x \in M \mid x \ge \sqrt{5}\}$; **h** $H = \{x \in M \mid x > 10\}$; **i** $I = \{x \in M \mid x < -2\}$.

Activitate online

2 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a P_1: $\sqrt{2} \in \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \le 2\}$; **b** P_2: $652 \in \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$;
c P_3: $-8 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 8\}$; **d** P_4: $\sqrt{18} \notin \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$;
e P_5: $256 \notin \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{Z}\}$; **f** P_6: $-\pi \notin \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 3\}$.

Activitate online

3 Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \le x < 10\}$ și $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a P_1: $\{0, 1, 2, 3\} \subset A$; **b** P_2: $A \subset B$; **c** P_3: $\{3x \mid x \in A\} \subset C$;
d P_4: $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 32 \le 2^x < 1024\}$; **e** P_5: $C \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 3\}$; **f** P_6: $A \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 \le 13\}$.

Activitate online

4 Pentru fiecare dintre mulțimile următoare, definite printr-o proprietate comună a elementelor, stabiliți care dintre reprezentările prin enumerarea elementelor este corectă:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < 3^x \le 729\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 25 < x^2 \le 121\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x = 4 \text{ sau } 4^x = 64\}$;
$D = \{7k - 4 \mid k \in \mathbb{N}, 3 < k \le 8\}$; $E = \{\overline{xy} \in \mathbb{N} \mid \overline{xy} \,\vdots\, 3, x \,\vdots\, 4\}$; $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid 17 < 4x - 10 \le 34\}$.

a **A** $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; **B** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; **C** $A = \{3, 4, 5, 6\}$.
b **A** $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; **B** $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; **C** $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$.
c **A** $C = \varnothing$; **B** $C = \{0, 1, 2, 3\}$; **C** $C = \{2, 3\}$.
d **A** $D = \{24, 31, 38, 45, 52\}$; **B** $D = \{24, 31, 38, 45\}$; **C** $D = \{17, 24, 31, 38, 45, 52\}$.
e **A** $E = \{42, 48, 84\}$; **B** $E = \{42, 48, 60, 66, 84\}$; **C** $E = \{42, 45, 48, 81, 84, 87\}$.
f **A** $F = \{8, 9, 10, 11\}$; **B** $F = \{7, 8, 9, 10, 11\}$; **C** $F = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Activitate online

5 Pentru fiecare dintre mulțimile de mai jos, definite prin enumerarea elementelor, stabiliți care dintre reprezentările folosind o proprietate comună a elementelor este corectă:

$A = \{0, 6, 12, 18, \ldots, 72\}$; $B = \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$; $C = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$;
$D = \{1, 6, 11, 16, 21, 26, \ldots\}$; $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; $F = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$.

a **A** $A = \{6k \mid 0 \le k \le 12\}$; **B** $A = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}, k \le 12\}$; **C** $A = \{6k \mid k \in \mathbb{N}, k < 13\}$.
b **A** $B = \{\pm 3^k \mid k \in \mathbb{N}, k < 2\}$; **B** $B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}, -2 \le k \le 2\}$; **C** $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 9 \,\vdots\, x\}$.

c A $C=\{3k \mid k\in\mathbb{Z}, k\geq 0\}$; B $C=\{3k \mid k\in\mathbb{Q}, k\geq 0\}$; C $C=\{3k \mid k\in\mathbb{N}, k\leq 5\}$.

d A $D=\{5k+1 \mid k\in\mathbb{N}, k\leq 5\}$; B $D=\{5k-4 \mid k\in\mathbb{N}^*\}$; C $D=\{5k+1 \mid k\in\mathbb{N}^*\}$.

e A $E=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|<3\}$; B $E=\{x\in\mathbb{Z} \mid 2^{x+3}\leq 64\}$; C $E=\{x\in\mathbb{Z} \mid 2<2x+9\leq 15\}$.

f A $F=\{x-2 \mid x\in\mathbb{N}^*\}$; B $F=\{x\in\mathbb{Z} \mid 4\leq 2^{x+4}\}$; C $F=\{x\in\mathbb{Q} \mid -5x-13<2\}$.

6 Scrieți următoarele mulțimi indicând o proprietate comună a elementelor:

a mulțimea numerelor naturale impare cuprinse între 17 și 28;

b mulțimea numerelor naturale mai mici decât 38, divizibile cu 3;

c mulțimea pătratelor perfecte mai mici decât 225 și mai mari decât 100;

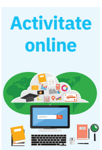
d mulțimea tuturor cuburilor perfecte cuprinse între 7 și 130.

7 **a** Se consideră mulțimile $A=\{2n+7 \mid n\in\mathbb{N}\}$ și $B=\{3n+4 \mid n\in\mathbb{N}\}$. Arătați că $61\in A\cap B$.

b Fie mulțimile $C=\{8n+7 \mid n\in\mathbb{N}\}$ și $D=\{7n+8 \mid n\in\mathbb{N}\}$. Verificați dacă $43\in C\cup D$ și $99\in C\cup D$.

c Se dau mulțimile $E=\{9n+4 \mid n\in\mathbb{N}\}$ și $F=\{5n+3 \mid n\in\mathbb{N}\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

P_1: $40\in E\setminus F$; P_2: $53\in F\setminus E$; P_3: $58\notin E\cap F$; P_4: $101\in E\cup F$; P_5: $107\notin E\cup F$.



8 Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite sau infinite:

a $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x\leq 200\}$; **b** $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\leq 220\}$; **c** $C=\{x\in\mathbb{Q} \mid 0\leq x\leq 222\}$;

d $D=\{x\in\mathbb{N} \mid 2\leq 3x+1\leq 61\}$; **e** $E=\{x\in\mathbb{Z} \mid 4x-5\geq 19\}$; **f** $F=\{x\in\mathbb{Q} \mid 7x\in\mathbb{Z}\}$;

g $G=\{x\in\mathbb{N} \mid x^2\leq 2000\}$; **h** $H=\{x\in\mathbb{Z} \mid 2^x>1000\}$; **i** $I=\{x\in\mathbb{Q} \mid |x|>1000\}$.

Consolidare

9 **a** Se dau mulțimile $A=\{0,1,2,3,4\}$ și $B=\{x \mid x=7a+2,\ a\in A\}$. Determinați elementele mulțimii B.

b Scrieți prin enumerarea elementelor mulțimile $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 25^{10}<5^x\leq 125^8\}$ și $B=\{3x-11 \mid x\in A\}$.

c Fie $A=\{0,2,4,6\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea $B=\{x \mid x=3^a-2^a, a\in A\}$.

10 Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor lor:

a $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},\frac{9}{10}\right\}$; **b** $B=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{7}{9},\frac{4}{5},\frac{9}{11}\right\}$;

c $C=\{\sqrt{2},\sqrt{6},2\sqrt{3},2\sqrt{5},\sqrt{30},\sqrt{42},2\sqrt{14}\}$; **d** $D=\{\sqrt{2},2\sqrt{3},6,4\sqrt{5},5\sqrt{6},6\sqrt{7},14\sqrt{2}\}$.

11 Se consideră mulțimea $A=\{5, 9, 13, 17, ..., 201\}$.

a Scrieți mulțimea A cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor sale.

b Determinați cardinalul mulțimii A.

c Arătați că media aritmetică a elementelor din A nu aparține mulțimii A.

12 Se consideră mulțimile $A=\{x \mid x=8k+4, k\in\mathbb{Z}\}$ și $B=\{x \mid x=4k, k\in\mathbb{Z}\}$.

a Scrieți câte trei elemente din fiecare mulțime.

b Verificați dacă numerele 224, 804 și 782 aparțin celor două mulțimi.

c Arătați că $A\subset B$ și $B\not\subset A$.

13 Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

a $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 4x+6=9x-24\}$;
b $B=\{x\in\mathbb{R} \mid 3x^2-16=19-4x^2\}$;
c $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+3y=7 \text{ și } 2x+5y=17\}$;
d $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 5x-2y=-2 \text{ și } 4x+y=14\}$;
e $E=\{x\in\mathbb{N} \mid x+2x+3x+\ldots+11x=462\}$;
f $F=\left\{x\in\mathbb{N} \;\middle|\; \left(10^2\right)^{10x}:\left(10^3\cdot10^6\cdot10^9\right)^x=10\,000\right\}$.

14 Determinați mulțimile:

a $A=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid 88+xy=33\}$;
b $B=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid xy-3x-3y=5\}$;
c $C=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid xy+2x+4y=22\}$;
d $D=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 3x+7y=60\}$.

15 Calculați suma celor mai mici 101 elemente ale mulțimii $\left\{n\in\mathbb{N} \;\middle|\; \text{fracția } \dfrac{n-3}{3n-2} \text{ este reductibilă}\right\}$.

Indicație. Fie d un divizor comun al numerelor $n-3$ și $3n-2$. Folosind proprietățile relației de divizibilitate, determinați un număr natural a astfel încât $d\,|\,a$.

16 Se consideră mulțimile $A=\left\{n\in\mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{n}{12}\in\mathbb{N}\right\}$, $B=\left\{n\in\mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{n}{15}\in\mathbb{N}\right\}$ și $C=\left\{n\in\mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{n}{36}\in\mathbb{N}\right\}$. Aflați cel mai mic număr natural nenul a cu proprietatea că $a\in A\cap B\cap C$.

Activitate pe echipe

17 Se consideră mulțimile:

$A=\left\{n\in\mathbb{N} \;\middle|\; \text{fracția } \dfrac{6}{n} \text{ este subunitară}\right\}$;
$B=\left\{n\in\mathbb{N} \;\middle|\; \text{fracția } \dfrac{6}{n} \text{ este ireductibilă}\right\}$;

$C=\left\{n\in\mathbb{N} \;\middle|\; \text{fracția } \dfrac{6}{n} \text{ este periodică simplă}\right\}$;
$D=\left\{n\in\mathbb{N} \;\middle|\; \text{fracția } \dfrac{6}{n} \text{ este periodică mixtă}\right\}$.

a Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

P_1: $1\in A$; P_2: $4\in B$; P_3: $9\in C$; P_4: $30\in D$; P_5: $28\in D$;
P_6: $5\in A\cap B$; P_7: $12\in A\setminus C$; P_8: $C\cup D=\mathbb{N}^*$; P_9: $7\in B\cap C$; P_{10}: $D\setminus B\neq\varnothing$.

b Alegeți varianta corectă de răspuns:

i Numărul de elemente al mulțimii A este egal cu:

A 6 **B** 7 **C** 5 **D** o infinitate.

ii Relația $n\in B$ este adevărată pentru orice număr natural $n\geq5$ cu proprietatea:

A $n\,\vdots\,6$ **B** n este prim **C** n este impar **D** $n\,\vdots\,7$.

iii Dintre următoarele mulțimi X, afirmația $X\subset C$ este adevărată pentru:

A $X=\{2^k \mid k\in\mathbb{N}^*\}$ **B** $X=\{3^k \mid k\in\mathbb{N}^*\}$ **C** $X=\{6^k \mid k\in\mathbb{N}^*\}$ **D** $X=\{11^k \mid k\in\mathbb{N}^*\}$.

iv Cardinalul mulțimii $E=\{n\in D \mid n\leq50\}$ este egal cu:

A 5 **B** 7 **C** 10 **D** 8.

18 Scrieți elementele mulțimilor:

a $A=\left\{x\in\mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{4}{x+2}\in\mathbb{N}\right\}$;
b $B=\left\{x\in\mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{7}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$;
c $C=\left\{x\in\mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{5}{x-2}\in\mathbb{Z}\right\}$;
d $D=\left\{x\in\mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{3x+11}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$;
e $E=\left\{x\in\mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{4x+11}{3x+2}\in\mathbb{Z}\right\}$;
f $F=\left\{x\in\mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{5x+13}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

19 Determinați mulțimile:

a $A=\left\{a\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{4a1}\,\vdots\,3\right\}$; **b** $B=\left\{b\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{11b5}\,\vdots\,9\right\}$; **c** $C=\left\{c\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{44c2}\,\vdots\,2\right\}$;

d $D=\left\{d\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{8d5}\,\vdots\,25\right\}$; **e** $E=\left\{e\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{713e}\,\vdots\,6\right\}$; **f** $F=\left\{f\in\{0,1,2,\ldots,9\}\,\middle|\,\overline{f4f}\,\vdots\,12\right\}$.

20 Fie U mulțimea cifrelor în baza 10. Determinați numărul de elemente ale mulțimilor:

a $A=\left\{(a,b)\in U\times U\,\middle|\,\overline{62ab}\,\vdots\,15\right\}$; **b** $A=\left\{(a,b)\in U\times U\,\middle|\,\overline{2a3b}\,\vdots\,36\right\}$; **c** $A=\left\{(a,b)\in U\times U\,\middle|\,\overline{aa4b}\,\vdots\,45\right\}$.

21 Fie $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile:

a $A=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\dfrac{\overline{1x28}}{3}}\in\mathbb{N}\right\}$; **b** $B=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\dfrac{\overline{17x}}{11}}\notin\mathbb{N}\right\}$; **c** $C=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\dfrac{\overline{2x9x}}{18}}\in\mathbb{N}\right\}$;

d $D=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\dfrac{\overline{28x}}{18}}\in\mathbb{Q}\right\}$; **e** $E=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\dfrac{\overline{7x}}{50}}\in\mathbb{Q}\right\}$; **f** $F=\left\{x\in U\,\middle|\,\sqrt{\dfrac{\overline{x67}}{27}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right\}$.

Aprofundare

Activitate pe echipe

22 Se consideră mulțimile $A=\{1,5,9,13,17,\ldots\}$, $B=\{3,7,11,15,19,\ldots\}$ și $C=\left\{k^2\,\middle|\,k\in\mathbb{N}\right\}$.

a Scrieți mulțimile A și B cu ajutorul unei proprietăți comune elementelor lor.

b Identificați cele mai mici cinci elemente ale mulțimii $A\cap C$.

c Arătați că mulțimile B și C sunt disjuncte.

d Demonstrați că $A\cap B=\varnothing$.

23 Determinați numărul natural n pentru care mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,3^n\le x\le 3^{n+2}\right\}$ are 217 elemente.

24 Se dau mulțimile $A=\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*,\ n\le 100\right\}$ și $B=\left\{\dfrac{n}{n+2}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*,\ n\le 100\right\}$.

a Stabiliți câte elemente au mulțimile A și B.

b Comparați suma elementelor mulțimii A cu produsul elementelor mulțimii B.

Indicație b: Utilizați egalitatea $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

25 Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,21\le x\le a,\ a\in\mathbb{N}\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,x\,\vdots\,7\right\}$. Determinați toate numerele naturale a pentru care mulțimea $A\cap B$ are 25 de elemente.

26 Aflați cardinalul mulțimii $A=\{n\in\mathbb{N},\ n<604 \mid \text{cel puțin o cifră a lui } n \text{ este egală cu } 3\}$.

27 **a** Fie mulțimile $A=\left\{x=\sqrt{4n+2}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$ și $B=\left\{x=\sqrt{5n+3}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$. Arătați că $A\cup B\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b Arătați că mulțimea $M=\left\{x=\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n+28}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*\right\}$ nu conține niciun număr rațional.

Probleme de șapte stele

28 Fie mulțimea $A=\left\{2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\,\middle|\,a,b,c\in\mathbb{N}\right\}$. Arătați că printre oricare 9 elemente ale lui A există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

29 Se consideră mulțimea $A=\{2k+1 \mid k\in\mathbb{N}, k\leq 50\}$.

a Aflați numărul perechilor (a, b) de elemente din A, cu $a<b$, pentru care $a+b=100$.

b Dacă suma a 46 de elemente ale mulțimii A este 2020, arătați că cel puțin două dintre aceste elemente sunt egale.

30 Se consideră mulțimea A, formată din numere naturale, cu proprietatea că mulțimile $B=\{5x+1 \mid x\in A\}$ și $C=\{x\in\mathbb{N} \mid 7x+4\in A\}$ sunt submulțimi ale lui A. Știind că $9\in A$, arătați că $6\in A$.
Indicație. Deoarece $B\subset A$, rezultă că dacă $x\in A$, atunci $5\cdot x+1\in A$. Cum $9\in A$, rezultă că $46\in A$. Folosiți relația $C\subset A$ pentru a arăta că $6\in A$.

31 Fie A o mulțime de numere naturale cu proprietatea că $B=\{3x+2 \mid x\in A\}$ și $C=\{x\in\mathbb{N} \mid x^2+1\in A\}$ sunt submulțimi ale lui A. Știind că $1\in A$, arătați că numerele 4, 5 și 26 aparțin mulțimii A.

I.2 Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Intersecția și reuniunea intervalelor

Intervale de numere reale

Un interval de numere reale este o mulțime I de numere reale cu proprietatea că, pentru orice două numere reale $a, b \in I$, cu $a < b$, orice număr real cuprins între a și b aparține mulțimii I.
Cu alte cuvinte, o mulțime $I \subset \mathbb{R}$ este interval dacă:

pentru orice $a, b \in I$, $a < b$, și orice $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < x < b$, rezultă $x \in I$.

Având în vedere corespondența dintre mulțimea numerelor reale și axa numerelor, *intervalele de numere reale se reprezintă geometric* ca submulțimi *neîntrerupte* ale axei numerelor, adică sub formă de segment, semidreaptă, punct sau dreaptă.

În funcție de reprezentarea geometrică, intervalele se clasifică în:
- *intervale mărginite* – a căror reprezentare geometrică este un segment sau un punct;
- *intervale nemărginite* – a căror reprezentare geometrică este o semidreaptă sau o dreaptă.

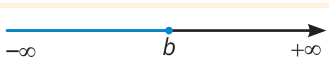
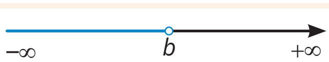
În tabelele de mai jos sunt prezentate toate tipurile de intervale de numere reale, denumirile lor, cât și reprezentarea geometrică a acestora pe axa numerelor.

Simbolurile $-\infty$ (*minus infinit*) și $+\infty$ (*plus infinit*) nu sunt numere reale; acestea se utilizează pentru a scrie intervale nemărginite de numere reale.

Intervale mărginite

Reprezentarea geometrică	Figura geometrică	Definiția intervalului	Denumirea intervalului
	segment închis	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	interval închis: $a, b \in [a, b]$
	segment deschis	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	interval deschis: $a, b \notin (a, b)$
	segment semideschis	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	interval deschis la stânga și închis la dreapta: $a \notin (a, b]$, $b \in (a, b]$
	segment semideschis	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	interval închis la stânga și deschis la dreapta: $a \in [a, b)$, $b \notin [a, b)$

Intervale nemărginite

Reprezentarea geometrică	Figura geometrică	Definiția intervalului	Denumirea intervalului
	semidreaptă închisă	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	interval închis la stânga: $a \in [a, +\infty)$
	semidreaptă deschisă	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	interval deschis la stânga: $a \notin (a, +\infty)$
	semidreaptă închisă	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	interval închis la dreapta: $b \in (-\infty, b]$
	semidreaptă deschisă	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	interval deschis la dreapta: $b \notin (-\infty, b)$
	dreaptă	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$	mulțimea numerelor reale

Observații

1 Intervalele prezentate anterior se numesc intervale nedegenerate (proprii).
Intervalul $[a, a]$ se reduce la un punct (interval degenerat):

$$[a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le a\} = \{a\}.$$

2 Notațiile $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $[a, +\infty]$ sau $(a, +\infty]$ nu au sens.
Mulțimile notate (a, a), $(a, a]$ sau $[a, a)$ nu conțin numere reale: $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \varnothing$.

Intersecția și reuniunea intervalelor

Se consideră două intervale de numere reale, I și J. Atunci:

- mulțimea $I \cup J = \{x \mid x \in I \text{ sau } x \in J\}$ se numește *reuniunea intervalelor I și J*;
- mulțimea $I \cap J = \{x \mid x \in I \text{ și } x \in J\}$ se numește *intersecția intervalelor I și J*.

Pentru determinarea intersecției și a reuniunii a două sau a mai multor intervale, se poate utiliza reprezentarea lor geometrică pe axa numerelor.

Intersecția a două intervale poate fi:

un interval	un punct	mulțimea vidă
$(2, 6) \cap (-1, 4) = (2, 4)$	$[0, 2] \cap [2, 5] = \{2\}$	$(-2, 1) \cap (2, 4) = \varnothing$
$[-2, 3] \cap [1, \infty) = [1, 3]$	$(-1, 1] \cap [1, \infty) = \{1\}$	$(-\infty, 2) \cap [2, 4] = \varnothing$

Reuniunea a două intervale poate fi:

un interval	o mulțime care nu este interval
$[0, 2] \cup [2, 5] = [0, 5]$	$(-2, 1) \cup (3, 5)$
$(-\infty, 1) \cup (0, 4) = (-\infty, 4)$	$(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$
$(-\infty, 5) \cup (-1, \infty) = \mathbb{R}$	$[0, 4] \cup (8, \infty)$

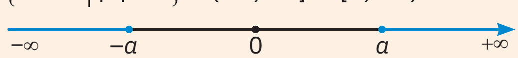
Modulul unui număr real

Se consideră un număr real a, $a > 0$. Atunci:

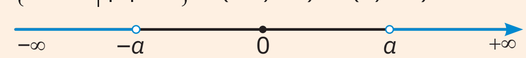
1 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le a\} = [-a, a]$

2 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\} = (-a, a)$

3 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge a\} = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$



4 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$



Exemple

a $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\} = (-3, 3)$;

b $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 6\} = [-6, 6]$;

c $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3\} = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$;

d $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge \sqrt{3}\} = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \infty\right)$;

e $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge -1\} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$;

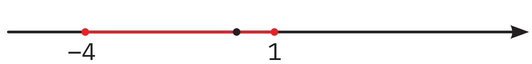
f $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}^*$.

Exersare

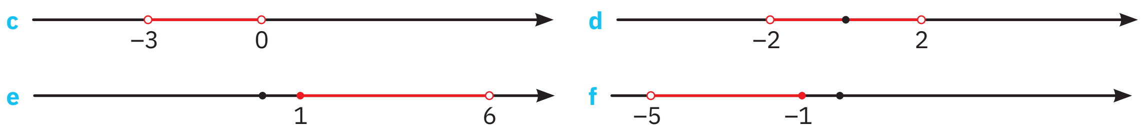
Activitate online

1 Indicați, în fiecare dintre cazurile următoare, intervalul I reprezentat pe axa numerelor prin segmentul colorat cu roșu (sau porțiunea colorată cu roșu a axei numerelor):

a



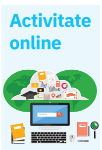
b



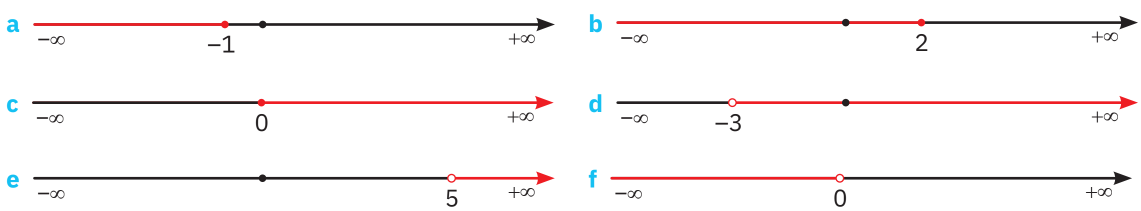
2 Scrieți sub formă de interval mărginit și apoi reprezentați pe axă mulțimea numerelor reale x, care satisfac relația:

a $0 \le x \le 3$; **b** $-2 < x < \sqrt{7}$; **c** $1 \le x < 6$; **d** $2 < x \le 2\sqrt{2}$;

e $\frac{8}{3} > x \ge 0$; **f** $4 \ge x > -\frac{1}{2}$; **g** $3 \ge x \ge -3$; **h** $\sqrt{6} > x > -\sqrt{6}$.



3 Indicați, în fiecare dintre cazurile de mai jos, intervalul I reprezentat pe axa numerelor prin semidreapta colorată cu roșu (sau porțiunea colorată cu roșu a axei numerelor):



4 Scrieți sub formă de interval nemărginit și apoi reprezentați pe axă mulțimea numerelor reale x care satisfac relația:

a $x > 0$; **b** $x < -1$; **c** $x \le \sqrt{5}$; **d** $x \ge -\sqrt{3}$;

e $7 > x$; **f** $-2\sqrt{3} \le x$; **g** $-\frac{3}{2} \ge x$; **h** $\frac{5}{3} < x$.

5 Scrieți următoarele mulțimi de numere reale sub formă de intervale, folosind simboluri ca în exemplul dat:

a intervalul deschis la stânga în –7 și închis la dreapta în 3 se scrie (–7; 3];

b intervalul deschis la stânga în 0 și la dreapta în 7 se scrie ....;

c intervalul închis la stânga în –1 și la dreapta în +1 se scrie ....;

d intervalul deschis la stânga în 4 și nemărginit la dreapta se scrie ....;

e intervalul nemărginit la stânga și închis la dreapta în 9 se scrie ....;

f intervalul închis la stânga în –6 și nemărginit la dreapta se scrie ....

6 Completați spațiile libere cu răspunsul corect, scris sub formă de interval:

a mulțimea numerelor reale negative este ....;

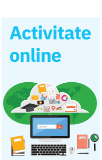
b mulțimea numerelor reale mai mici decât 5 este ....;

c mulțimea numerelor reale mai mari sau egale cu –4 este ....;

d mulțimea numerelor reale mai mari decât –3 și mai mici sau egale cu 6 este ....;

e mulțimea numerelor reale pozitive mai mici decât 10 este ....;

f mulțimea numerelor reale mai mici decât 20 și mai mari sau egale cu $\sqrt{5}$ este ....



7 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a P_1: $-3 \in [-3, +\infty)$; **b** P_2: $-2 \in (-2, 10]$; **c** P_3: $4 \in (-5, 7)$; **d** P_4: $7 \in (-2, 6)$;

e P_5: $-5 \notin (-\infty, -4)$; **f** P_6: $-3 \notin (-\infty, -4)$; **g** P_7: $7 \notin (-7, 7)$; **h** P_8: $-2 \notin [-2, +\infty)$.

Activitate pe echipe

8 Efectuați următoarele operații cu mulțimi, alegând răspunsul corect dintre variantele **A – D** indicate:

a $(-\infty, 7) \cup \{7\} =$ **A** $(-\infty, 7)$ **B** $(-\infty, 7]$ **C** $(-\infty, 8)$ **D** $(-\infty, 8]$;

b $(-3, -1) \cup \{-1\} =$ **A** $(-3, -1]$ **B** $(-3, -1)$ **C** $[-3, -1]$ **D** $[-3, -1)$;

c $(-2, 4] \cup \{-2, 4\}$ **A** $[-2, 4)$ **B** $[-2, 4]$ **C** $(-2, 4)$ **D** $(-2, 4]$;

d $(-2, 6) \cap \{5\} =$ **A** $(-2, 5)$ **B** $(-2, 5]$ **C** $\{5\}$ **D** $(-2, 6)$;

e $(-\infty, 4) \cap \{0, 4\} =$ **A** $(-\infty, 4)$ **B** $\{0, 4\}\}$ **C** $\{0\}$ **D** $(0, 4)$;

f $[-3, \infty) \setminus \{-3\} =$ **A** $[-3, \infty)$ **B** $(-3, \infty)$ **C** $(-2, \infty)$ **D** $\varnothing$.

Activitate online

9 Efectuați următoarele **intersecții** de intervale, alegând răspunsul corect dintre variantele **A – D** indicate:

a $(-1, 5) \cap (2, 8) =$ **A** $(2, 5)$ **B** $(-1, 5)$ **C** $(-1, 8)$ **D** $(-\infty, 8]$;

b $[0, 8] \cap [4, 12] =$ **A** $[0, 12]$ **B** $[0, 4]$ **C** $[4, 8]$ **D** $[8, 12]$;

c $(-2, 2) \cap [4, 7] =$ **A** $(-2, 7]$ **B** $\varnothing$ **C** $(2, 4]$ **D** $(2, 4)$;

d $(0, 4] \cap [4, \infty) =$ **A** $\varnothing$ **B** $(0, 4)$ **C** $\{4\}$ **D** $(0, \infty)$.

Activitate online

10 Efectuați următoarele **reuniuni** de intervale, alegând răspunsul corect dintre variantele **A – D** indicate:

a $(-1, 6) \cup [4, 10] =$ **A** $[4, 6)$ **B** $(-1, 6)$ **C** $(-1, 10]$ **D** $(6, 10]$;

b $[-2, 2] \cup (2, 6] =$ **A** $[-2, 2)$ **B** $[-2, 6]$ **C** $[2, 6]$ **D** $\varnothing$;

c $(-4, 3) \cup [-6, 3] =$ **A** $[-6, -4)$ **B** $[-6, -4]$ **C** $[-4, 3]$ **D** $[-6, 3]$;

d $[0, 8) \cup (2, 5] =$ **A** $[0, 5]$ **B** $(2, 8)$ **C** $(2, 5]$ **D** $[0, 8)$.

Consolidare

Activitate online

11 Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a P_1: $9 \in \left(-\infty, \frac{47}{5}\right]$; **b** P_2: $\frac{4}{7} \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$; **c** P_3: $\frac{13}{8} \in \left[\frac{14}{9}, \frac{12}{7}\right]$; **d** P_4: $-\frac{5}{2} \notin \left(-3, -\frac{1}{2}\right]$;

e P_5: $\sqrt{2} \notin (-\infty, 1)$; **f** P_6: $-3 \notin \left(-\infty, -\sqrt{10}\right)$; **g** P_7: $5\sqrt{3} \in \left(6\sqrt{2}, 4\sqrt{5}\right)$; **h** P_8: $\sqrt{17} \notin \left(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right)$.

12 **a** Precizați cel mai mic număr întreg care aparține intervalului indicat:

i $I = [-2, 5)$; **ii** $I = \left(-3, \frac{11}{7}\right)$; **iii** $I = \left[-\frac{8}{3}, \infty\right)$; **iv** $I_4 = \left(-\frac{3}{10}, \frac{1}{2}\right]$.

b Precizați cel mai mic număr întreg care **nu** aparține intervalului indicat:

i $I = (-\infty, 5)$; **ii** $I = (-\infty, 8]$; **iii** $I = \left(-\infty, 3\sqrt{7}\right]$; **iv** $I = \left(-\infty, \frac{15}{4}\right)$.

13 **a** Determinați cel mai mare număr întreg care aparține intervalului J, dacă:

i $J = [-4, 3]$; **ii** $J = \left(-4, \frac{17}{12}\right)$; **iii** $J = (-\infty, -2]$; **iv** $J = \left(-8, -\frac{3}{2}\right]$.

b Determinați cel mai mare număr întreg care **nu** aparține intervalului J, dacă:

i $J = [-2, \infty)$; **ii** $J = (-3, \infty)$; **iii** $J = \left[-\frac{11}{4}, \infty\right)$; **iv** $J = \left(-\frac{3}{10}, \infty\right]$.

Activitate online

14 Efectuați următoarele **intersecții** de intervale, alegând răspunsul corect dintre variantele **A – D** indicate:

a $\left(-\infty, 3\sqrt{5}\right)\cap\left[2\sqrt{10}, \infty\right)=$ **A** $\left(-\infty, 3\sqrt{5}\right)$ **B** $\left[2\sqrt{10}, 3\sqrt{5}\right)$ **C** $\varnothing$ **D** $\left(2\sqrt{10}, 3\sqrt{5}\right)$;

b $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)\cap\left(\sqrt{5}, \infty\right)=$ **A** $\left(\sqrt{5}, \infty\right)$ **B** $\left[-\frac{1}{2}, \sqrt{5}\right]$ **C** $\left[-\frac{1}{2}, \sqrt{5}\right)$ **D** $\left[\sqrt{5}, \infty\right)$;

c $\left(-2, \sqrt{10}\right)\cap\left[-2, \frac{17}{6}\right]=$ **A** $\left(-2, \frac{17}{6}\right)$ **B** $\left(-2, \frac{17}{6}\right]$ **C** $\left(-2, \sqrt{10}\right)$ **D** $\left[-2, \frac{17}{6}\right]$;

d $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\cap\left[\frac{1}{2}, \infty\right)=$ **A** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **B** $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ **C** $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ **D** $\varnothing$.

Activitate online

15 Efectuați următoarele **reuniuni** de intervale, alegând răspunsul corect dintre variantele **A – D** indicate:

a $[0, \infty)\cup\left[-\sqrt{2}, 0\right)=$ **A** $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right]$ **B** $\left[-\sqrt{2}, 0\right)$ **C** $\left[-\sqrt{2}, \infty\right)$ **D** $[0, \infty)$;

b $\left(-\infty, \sqrt{2}\right]\cup\left(-\sqrt{2}, \infty\right)=$ **A** $\mathbb{R}$ **B** $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ **C** $\left(-\infty, \sqrt{2}\right]$ **D** $\left(-\sqrt{2}, \infty\right)$;

c $\left[-\frac{4}{3}, \infty\right)\cup\left(-\sqrt{2}, \infty\right)=$ **A** $\left[-\sqrt{2}, -\frac{4}{3}\right]$ **B** $\left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$ **C** $\left(-\sqrt{2}, -\frac{4}{3}\right)$ **D** $\left(-\sqrt{2}, \infty\right)$;

d $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right)\cup\left[\frac{13}{5}, 6\sqrt{2}\right)=$ **A** $\left(-\infty, 6\sqrt{2}\right)$ **B** $\left[\frac{13}{5}, \frac{8}{3}\right)$ **C** $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right)$ **D** $\left(-\infty, \frac{13}{5}\right]$.

16 Pornind de la echivalența „$|x| \le a$ dacă și numai dacă $-a \le x \le a$“, unde $a \ge 0$, scrieți următoarele mulțimi sub formă de intervale și reprezentați-le pe axa numerelor:

a $A=\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 7\}$; **b** $B=\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$; **c** $C=\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 2\}$;

d $D=\{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| \le 9\}$; **e** $E=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|\frac{3x-2}{4}\right| < 1\right\}$; **f** $F=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|2x-\frac{1}{3}\right| \le 0,(3)\right\}$.

17 Pornind de la echivalența „$|x| \ge a$ dacă și numai dacă $x \le -a$ sau $x \ge a$“, unde $a \ge 0$, scrieți următoarele mulțimi ca reuniune de două intervale și reprezentați-le pe axa numerelor:

a $A=\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge 3\}$; **b** $B=\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 7\}$; **c** $C=\{x \in \mathbb{R} \mid |2x-1| > 0\}$;

d $D=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|\frac{2-x}{4}\right| \ge 1\right\}$; **e** $E=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|\frac{4x-1}{3}\right| > 3\right\}$; **f** $F=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|\frac{3x-\sqrt{3}}{2}\right| \ge \sqrt{3}\right\}$.

18 Dacă a și b, cu $a < b$, sunt două numere reale și I este un interval mărginit de capete a și b (închis, deschis sau semideschis), numărul $l(I) = |a - b|$ se numește *lungimea intervalului mărginit I*. Calculați lungimea fiecăruia dintre intervalele:

a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; **b** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; **c** $\left(-\frac{3}{7}, \frac{11}{7}\right)$; **d** $\left[-\frac{3}{7}, \frac{11}{7}\right)$; **e** $\left(-\frac{8}{5}, \frac{7}{5}\right]$; **f** $\left[-\frac{3}{10}, \frac{1}{2}\right]$.

Activitate pe echipe

19 Scrieți următoarele mulțimi ca intervale mărginite și calculați lungimea fiecărui interval obținut:

a $A=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2 < \frac{x+3}{5} \le 6\right\}$; **b** $B=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -3 \le \frac{x-3}{2} \le 3\right\}$; **c** $C=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le \frac{4x+1}{5} < \frac{2}{3}\right\}$;

d $D=\{x \in \mathbb{R} \mid 2x-1 \in (-3, 5)\}$; **e** $E=\{x \in \mathbb{R} \mid 5-3x \in (-1, 8)\}$; **f** $F=\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{5-2x}{6} \in \left(-\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)\right\}$.

Rezolvare: b Înmulțind cu 2 fiecare membru al dublei inegalități, obținem $-6 \le x-3 \le 6$. Adunând apoi 3 în fiecare membru, rezultă $-3 \le x \le 9$, deci $B=[-3, 9]$, de unde $l(B) = |9 - (-3)| = 12$.

20 Arătați că fiecare dintre următoarele mulțimi reprezintă un interval nemărginit:

a $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 2x-1<7\}$; **b** $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\frac{\sqrt{2}x+2}{4}>-\frac{1}{2}\right\}$; **c** $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{3x-2}{4}\geq 5-2x\right\}$;

d $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{2+4x}{3}\in\left(\frac{1}{6},\infty\right)\right\}$; **e** $E=\{x\in\mathbb{R}\mid 4-3x\in(-\infty,1)\}$; **f** $F=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{2x+1}{3}\in\left(\frac{3x+1}{4},\infty\right)\right\}$.

21 Determinați Card X în fiecare dintre cazurile:

a $X=\{x\in\mathbb{N}\mid x\in(-3,5)\}$; **b** $X=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\in[-4,2]\}$; **c** $X=\{x\in\mathbb{N}\mid x\leq 3\}$;

d $X=\{x\in\mathbb{Z}^*\mid |x|<4\}$; **e** $X=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\in[0,n+1]\}$, $n\in\mathbb{N}$; **f** $X=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,-1<\frac{x-1}{3}<1\right\}$.

22 Scrieți mulțimile A și B ca intervale sau reuniuni de intervale și efectuați $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $B\cap\mathbb{N}$, în fiecare dintre cazurile:

a $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |-x+1|<3\}$;
$B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{5x+4}{3}\in\left(-2;7\frac{2}{3}\right)\right\}$;

b $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 2|x|\leq 30-7|x|\}$;
$B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|\frac{2x-3}{5}\right|\leq 2\right\}$;

c $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |x-2|>1\}$;
$B=\left\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\leq\sqrt{5}\right\}$;

d $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |x+5|\geq 8\}$;
$B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,-1<\frac{2x+5}{3}\leq 9\right\}$.

23 Determinați $m, n\in\mathbb{R}$ știind că:

a $\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\leq 3\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x+1\in[m,n]\}$;

b $\{x\in\mathbb{R}\mid |x-3|\leq 5\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in[m,n]\}$.

24 Determinați numerele reale m și n, $m<n$, știind că:

a $[m,\infty)\cup[0,4]=[-1,\infty)$; **b** $[m,n]\cap[m,5]=[-1,3]$;

c $[m,n]\cup(-2,3)=[-5,4]$; **d** $[m,6]\cap(-1,n)=[0,2)$;

e $(m,n]\cap[-10,n)=(-7,0)$; **f** $[m,n]\setminus(1,4)=[0,1]\cup[4,10]$.

25 Determinați, în fiecare caz, intervalul I care îndeplinește simultan condițiile:

a $I\cup(-2,5]=(-2,7)$ și $I\cap(-2,5]=[-1,5]$; **b** $I\cap(-1,4]=(0,4]$ și $I\cup(-1,4]=(-1,5)$;

c $I\cup[-5;3)=[-5;5]$ și $I\cap[-5;3)=(0;3)$; **d** $I\cap(2;8)=(2;6]$ și $I\cup(2;8)=[-3;8)$;

e $I\cup[-7;-1]=[-7;4)$ și $I\cap[-7;-1]=[-3;-1]$; **f** $I\cap(-2;8]=(-2;2)$ și $I\cup(-2;8]=(-5;8]$.

26 Determinați numerele întregi a și b astfel încât:

a $(a,b)\cap\mathbb{N}=\{3\}$; **b** $[a,b]\cap\mathbb{Z}=\{-3,-2\}$; **c** $(a,b)\cap\mathbb{Z}=\{-3\}$;

d $[3,a]\cap[b,7]=[4,6]$; **e** $(a,b)\cap\mathbb{Z}=\{2,3\}$; **f** $(a,-2)\cup(-3,b]=(-5,8]$.

Rezolvare: a Deoarece $3\in(a,b)$, rezultă $a<3$ și $3<b$. Presupunând că $a<2$, ar rezulta $2\in(a,b)\cap\mathbb{N}$, fals. Dacă $a\geq 3$, atunci $3\notin(a,b)$. Deci $a=2$. Analog, $b=4$.

Aprofundare

27 Determinați $m, n\in\mathbb{R}$ știind că:

a $[m,n]\subset\{x\in\mathbb{R}\mid 2\leq x+5\leq 11\}$ și $\{-3,6\}\subset[m,n]$; **b** $\{-2,3\}\subset[m,n]\subset\{x\in\mathbb{R}\mid |2x-1|\leq 5\}$.

28 Fie n un număr natural nenul. Calculați suma numerelor pare din intervalul $[n^2-n+1, n^2+n+1]$.

29 **a** Se consideră intervalul $I = (3, \infty)$. Arătați că $xy - 3x - 3y + 12 \in I$, pentru orice $x, y \in I$.

b Se consideră numerele reale $x, y > 0$ astfel încât $4x + 7y = 28$. Arătați că $x + y \in (4, 7)$.

Activitate pe echipe

30 Stabiliți dacă:

a numărul $a = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}$ aparține intervalului $\left[\frac{1}{2}; 0{,}9\right]$;

b numărul $b = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100}$ aparține intervalului $\left[\frac{51}{100}; 1\frac{1}{10}\right]$;

c numărul $c = \frac{6}{2\cdot 8} + \frac{10}{8\cdot 18} + \frac{14}{18\cdot 32}$ aparține intervalului $\left(-1; \frac{7}{8}\right)$.

31 Se consideră numerele reale a și b, $a < b$. Arătați că oricare ar fi $t \in [0, 1]$, numărul $x = (1 - t)\cdot a + t\cdot b$ aparține intervalului $[a, b]$.

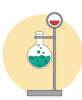
32 Fie numerele reale a și b, cu $0 \le a < b$ și $I = [a, b]$. Arătați că:

a $\frac{a+b}{2} \in I$; **b** $\sqrt{ab} \in I$; **c** $\frac{2ab}{a+b} \in I$; **d** $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \in I$.

33  **(Fizică)** În electricitate, legea lui Ohm afirmă că intensitatea curentului electric pe o porțiune de circuit este direct proporțională cu tensiunea aplicată și invers proporțională cu rezistența electrică pe circuit.

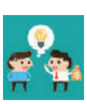
Formula matematică a legii lui Ohm este $I = \frac{U}{R}$, unde I este intensitatea curentului, măsurată în amperi (A), U este tensiunea aplicată, măsurată în volți (V), iar R este rezistența, măsurată în ohmi (Ω).

Un aspirator are rezistența $R = 40\ \Omega$. Știind că tensiunea variază între 220 V și 230 V, determinați în ce interval ia valori intensitatea curentului ce trece prin aspirator.

34  **(Chimie)** Legea Gay-Lussac afirmă că, la presiune constantă, volumul ocupat de o masă bine determinată de gaz variază direct proporțional cu temperatura sa absolută.

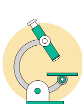
Pentru un anumit gaz ideal, volumul V (exprimat în centimetri cubi) este de 24 de ori mai mare decât temperatura sa absolută T (exprimată în Kelvin). Știind că temperatura variază de la 10 °C la 40 °C, determinați intervalul în care ia valori volumul gazului considerat.

Notă. Temperatura absolută, exprimată în Kelvin (K), se determină din formula $T = t + 273{,}15$, unde t este temperatura exprimată în grade Celsius (°C).

35  **(Comerț)** Un vânzător de autoturisme rulate primește, pentru fiecare mașină vândută, un comision de 40 de euro plus 40% din valoarea adăugată peste prețul cerut de proprietarul mașinii. În funcție de marcă și model, valoarea adăugată peste prețul cerut de proprietar variază între 250 euro și 2000 de euro.

a Un autoturism pentru care proprietarul cere 2500 de euro se vinde cu 3000 de euro. Calculați comisionul vânzătorului.

b Determinați intervalul în care ia valori comisionul primit pentru fiecare vânzare.

36  **(Genetică)** Cele 200 de bacterii dintr-o cultură de laborator sunt pregătite în vederea clonării genelor pentru sinteza penicilinei, procedeu care se realizează cu ajutorul unor formațiuni numite plasmide. Într-o celulă bacteriană, numărul de plasmide aparține valorilor întregi din intervalul $[10, 200]$, fiecare plasmidă având de la 6 la 10 gene. Determinați numărul minim, respectiv numărul maxim de gene care pot fi utilizate pentru clonarea terapeutică și obținerea penicilinei, dacă în urma intervențiilor in vitro, numai 55% dintre gene rămân funcționale.

37 În intervalul $[0, 1]$ se consideră numerele iraționale a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, distincte două câte două. Arătați că există $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $i \neq j$, astfel încât $\left|a_i - a_j\right| < \frac{1}{4}$.

38 Se consideră intervalul deschis și mărginit I, cu proprietatea că $l(I) > 1$. Demonstrați că $I \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$.

39 Se consideră intervalele $I = (a, 3b + 1)$ și $J = (3a - 5, b + 2)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $I \cap J \cap \mathbb{N} = \{2\}$.

b Arătați că $I \cap J \neq \varnothing$, pentru orice alegere a numerelor reale a și b.

40 Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$, se consideră intervalul $I_n = \left[1 + \frac{4}{n}, 10 - \frac{4}{n}\right]$.

a Determinați mulțimile $I_1 \cap \mathbb{N}$, $I_2 \cap \mathbb{N}$, $I_5 \cap \mathbb{N}$.

b Demonstrați că $I_n \subset I_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$.