Marius Perianu
Cătălin Stănică
Ioan Balica

Matematică

Cartea elevului

Clasa a VII-a

art Klett

Cuvânt-înainte

Matematica este arta de a construi realitatea și de a oferi înțelesuri noi cunoașterii umane. Urmând definiția artei, matematica presupune exersare și îndemânare, cunoaștere și simț estetic și, mai ales, imaginație și intuiție. Matematica este poezia ideilor logice, iar adevărurile matematice sunt gamele muzicale în care este scrisă simfonia legilor naturii.

Matematica clasei a VII-a este povestea marilor descoperiri: începem călătoria măsurând realitatea cu mărimi și forme noi (Unitatea 1: Mulțimea numerelor reale), apoi transpunem problemele practice în modele matematice (Unitatea 2: Ecuații și sisteme de ecuații liniare) și stabilim coordonate matematice pentru lumea înconjurătoare sau pentru activitățile cotidiene (Unitatea 3: Elemente de organizare a datelor). Realitatea se descrie în forme noi, drepte (Unitatea 4: Patrulatere) sau rotunde (Unitatea 5: Cercul), și se modelează în dimensiuni mai mari sau mai mici (Unitatea 5: Asemănarea triunghiurilor). Și, pentru că orice final amintește de început, ultima aventură aduce împreună numerele și formele geometrice (Unitatea 7: Relații metrice).

Pentru ca aventura noastră matematică să fie încununată de succes, cartea ne poartă printre idei, concepte, definiții și teoreme, folosind o exprimare prietenoasă, apropiată de elev, apelând la simțul practic și la intuiție. Introducerea conceptelor matematice se face plecând de la exemple din realitatea imediată, de la experiențele de zi cu zi. Cartea apare astfel ca o lume deschisă, vie, dinamică, în strânsă legătură cu toate domeniile de activitate, capabilă să formuleze, să descrie și să explice situații, probleme, fenomene sau procese.

Deși nu apare la cuprins, adevărata lecție din această carte este aceea care ne învață să ne punem întrebarea: „De ce?“. Educația matematică este nu doar o simplă activitate de învățare, ci reprezintă *antrenarea minții pentru a gândi*. Cartea oferă, la fiecare pas, momente de investigație, de reflecție, ocazii de a pune întrebări și de a corela răspunsurile posibile cu datele situațiilor analizate.

Matematica este cea mai frumoasă și mai profundă creație a spiritului uman. Umanitatea are nevoie de matematică, pentru că tot ceea ce există în Univers nu este doar descris de matematică, ci este construit din matematică.

Această carte este ghidul de călătorie în universul minunat al matematicii.

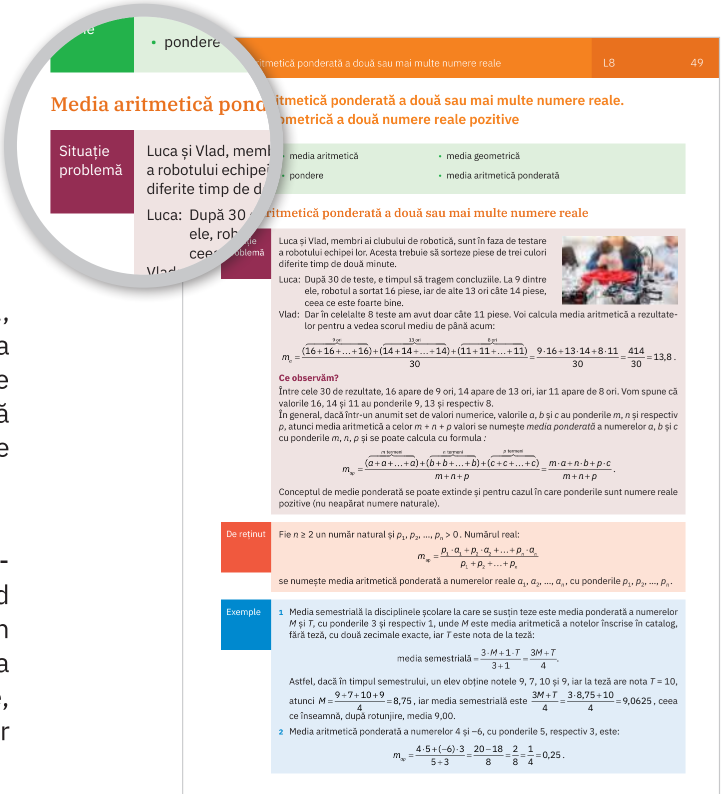
Autorii

Ce propune această carte

Cartea este împărțită în șapte unități care acoperă integral conținutul prevăzut de programa școlară. Lecțiile care compun o unitate sunt prezentate în mod coerent, unitar, într-un stil consecvent.

Fiecare lecție debutează cu o problemă practică, pe baza căreia se introduc noile concepte. Acestea sunt conturate apoi într-un limbaj matematic care echilibrează nivelul descriptiv cu rigoarea specifică matematicii. Noțiunile noi sunt însoțite de exemple semnificative, comentarii și aplicații.

Cartea acordă o atenție sporită gândirii critice și dezvoltării calculului mintal, prin zone dedicate, încurajând în același timp activitățile de grup, independența în gândire și dezvoltarea încrederii în sine. Evaluarea se realizează prin forme și instrumente diversificate, orientate spre formarea și dezvoltarea competențelor matematice.



…itmetică ponderată a două sau mai multe numere reale L8 49

…itmetică ponderată a două sau mai multe numere reale.
…ometrică a două numere reale pozitive

- media aritmetică
- media geometrică
- pondere
- media aritmetică ponderată

…ritmetică ponderată a două sau mai multe numere reale

Situație problemă

Luca și Vlad, membri ai clubului de robotică, sunt în faza de testare a robotului echipei lor. Acesta trebuie să sorteze piese de trei culori diferite timp de două minute.

Luca: După 30 de teste, e timpul să tragem concluziile. La 9 dintre ele, robotul a sortat 16 piese, iar de alte 13 ori câte 14 piese, ceea ce este foarte bine.

Vlad: Dar în celelalte 8 teste am avut doar câte 11 piese. Voi calcula media aritmetică a rezultatelor pentru a vedea scorul mediu de până acum:

$$m_a=\frac{\overbrace{(16+16+\ldots+16)}^{9\text{ ori}}+\overbrace{(14+14+\ldots+14)}^{13\text{ ori}}+\overbrace{(11+11+\ldots+11)}^{8\text{ ori}}}{30}=\frac{9\cdot16+13\cdot14+8\cdot11}{30}=\frac{414}{30}=13{,}8.$$

Ce observăm?

Între cele 30 de rezultate, 16 apare de 9 ori, 14 apare de 13 ori, iar 11 apare de 8 ori. Vom spune că valorile 16, 14 și 11 au ponderile 9, 13 și respectiv 8.

În general, dacă într-un anumit set de valori numerice, valorile a, b și c au ponderile m, n și respectiv p, atunci media aritmetică a celor $m + n + p$ valori se numește *media ponderată* a numerelor a, b și c cu ponderile m, n, p și se poate calcula cu formula :

$$m_{ap}=\frac{\overbrace{(a+a+\ldots+a)}^{m\text{ termeni}}+\overbrace{(b+b+\ldots+b)}^{n\text{ termeni}}+\overbrace{(c+c+\ldots+c)}^{p\text{ termeni}}}{m+n+p}=\frac{m\cdot a+n\cdot b+p\cdot c}{m+n+p}.$$

Conceptul de medie ponderată se poate extinde și pentru cazul în care ponderile sunt numere reale pozitive (nu neapărat numere naturale).

De reținut

Fie $n\geq2$ un număr natural și $p_1, p_2, \ldots, p_n>0$. Numărul real:

$$m_{ap}=\frac{p_1\cdot a_1+p_2\cdot a_2+\ldots+p_n\cdot a_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}$$

se numește media aritmetică ponderată a numerelor reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cu ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Exemple

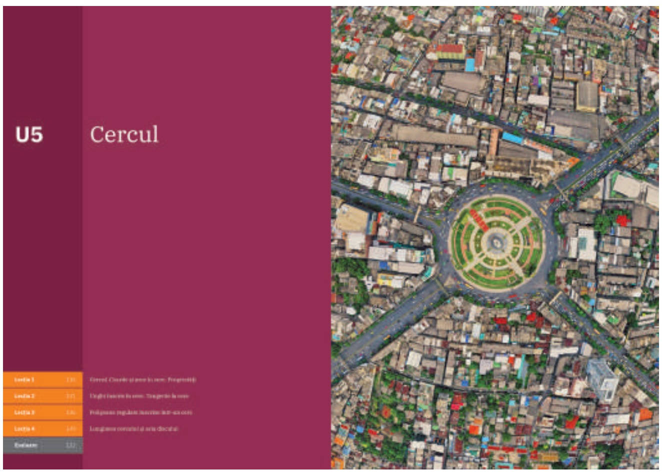
1 Media semestrială la disciplinele școlare la care se susțin teze este media ponderată a numerelor M și T, cu ponderile 3 și respectiv 1, unde M este media aritmetică a notelor înscrise în catalog, fără teză, cu două zecimale exacte, iar T este nota de la teză:

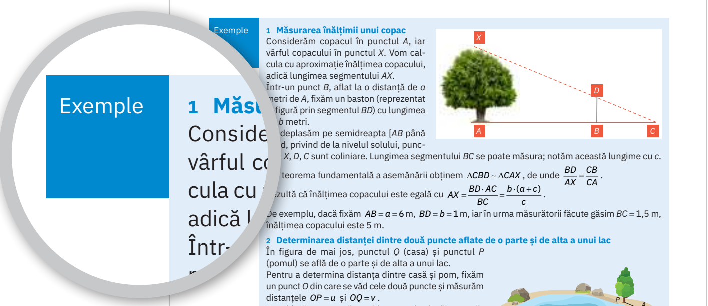
$$\text{media semestrială}=\frac{3\cdot M+1\cdot T}{3+1}=\frac{3M+T}{4}.$$

Astfel, dacă în timpul semestrului, un elev obține notele 9, 7, 10 și 9, iar la teză are nota $T = 10$, atunci $M=\frac{9+7+10+9}{4}=8{,}75$, iar media semestrială este $\frac{3M+T}{4}=\frac{3\cdot8{,}75+10}{4}=9{,}0625$, ceea ce înseamnă, după rotunjire, media 9,00.

2 Media aritmetică ponderată a numerelor 4 și –6, cu ponderile 5, respectiv 3, este:

$$m_{ap}=\frac{4\cdot5+(-6)\cdot3}{5+3}=\frac{20-18}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$





Exemple

1 Măsurarea înălțimii unui copac

Considerăm copacul în punctul A, iar vârful copacului în punctul X. Vom calcula cu aproximație înălțimea copacului, adică lungimea segmentului AX.
Într-un punct B, aflat la o distanță de a metri de A, fixăm un baston (reprezentat în figură prin segmentul BD) cu lungimea de b metri.
... deplasăm pe semidreapta $[AB$ până ... d, privind de la nivelul solului, punc... X, D, C sunt coliniare. Lungimea segmentului BC se poate măsura; notăm această lungime cu c.
... teorema fundamentală a asemănării obținem $\Delta CBD \sim \Delta CAX$, de unde $\frac{BD}{AX} = \frac{CB}{CA}$.
...zultă că înălțimea copacului este egală cu $AX = \frac{BD \cdot AC}{BC} = \frac{b \cdot (a+c)}{c}$.
De exemplu, dacă fixăm $AB = a = 6$ m, $BD = b = 1$ m, iar în urma măsurătorii făcute găsim $BC = 1{,}5$ m, înălțimea copacului este 5 m.

2 Determinarea distanței dintre două puncte aflate de o parte și de alta a unui lac

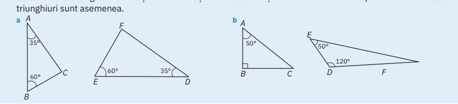
În figura de mai jos, punctul Q (casa) și punctul P (pomul) se află de o parte și de alta a unui lac.
Pentru a determina distanța dintre casă și pom, fixăm un punct O din care se văd cele două puncte și măsurăm distanțele $OP = u$ și $OQ = v$.
Considerăm un număr pozitiv $a < u$ și calculăm numărul $b = \frac{a \cdot v}{u}$; apoi alegem punctele A și B, aflate pe segmentele OP, respectiv OQ, astfel încât $OA = a$ și $OB = b$.
În alegerea lui a vom avea grijă ca dreapta AB să nu „intersecteze“ lacul. Măsurăm apoi distanța $AB = c$.
În condițiile de mai sus, avem $\frac{OA}{OP} = \frac{OB}{OQ}$ și, conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă $AB \parallel PQ$.
Aplicând teorema fundamentală a asemănării, obținem $\Delta OAB \sim \Delta OPQ$, de unde:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{OA}{OP} \Rightarrow \frac{c}{PQ} = \frac{a}{u} \Rightarrow PQ = \frac{c \cdot u}{a}.$$

De exemplu, să presupunem că în urma măsurătorilor obținem $OP = u = 320$ m și $OQ = 200$ m.
Alegem $a = 8$, pentru care găsim $b = 5$. Fixăm pe OP și OQ punctele A și B astfel încât $OA = 8$ m și $OB = 5$ m, după care, măsurând distanța dintre A și B, obținem $AB = c = 2{,}5$ m.
Atunci distanța PQ dintre casă și pom este de 100 de metri.

Probleme propuse

1 Se consideră triunghiurile ABC și DEF în situațiile $a - d$. Stabiliți în care dintre cazurile prezentate cele două triunghiuri sunt asemenea.



De reținut

...mentele triunghiului echilateral (în funcție de raza cercului circumscris)

...tura (l_3)	perimetrul (P_3)	apotema (a_3)	înălțimea	aria (A_3)
$R\sqrt{3}$	$3R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

..., aria și apotema unui pătrat
...ul $ABCD$, de latură a, înscris în cercul de centru O și rază R, în care ...ema OM, cu $M \in BC$.
...te dreptunghic isoscel, de catete $OB = OC = R$.
...Pitagora, avem $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = R\sqrt{2}$, deci aria pătratului este:
$A_{ABCD} = BC^2 = 2R^2$.
...ediană în triunghiul OBC, deci $OM = \frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

De reținut

Elementele pătratului (în funcție de raza cercului circumscris)

latura (l_4)	perimetrul (P_4)	apotema (a_4)	aria (A_4)
$R\sqrt{2}$	$4R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$

Latura, perimetrul, aria și apotema unui hexagon regulat
Fie hexagonul regulat $ABCDEF$, de latură a, înscris în cercul de centru O și rază R.
Fiecare unghi la centru opus unei laturi are 60°, deci diagonalele mari AD, BE și CF împart hexagonul în șase triunghiuri echilaterale.
Atunci $BC = OB = R$ și, considerând apotema OM, cu $M \in BC$, obținem:

$$OM = R\sin 60° = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Aria hexagonului este:

$$A_{ABCDEF} = 6 \cdot A_{OBC} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot OM \cdot BC = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

De reținut

Elementele hexagonului regulat (în funcție de raza cercului circumscris)

latura (l_6)	perimetrul (P_6)	apotema (a_6)	aria (A_6)
R	$6R$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Aproximarea în practică a distanțelor folosind relații metrice

În situațiile întâlnite în viața de zi cu zi avem deseori nevoie să estimăm distanțe și suprafețe, în care intervin una sau mai multe variabile.
Dacă trebuie să amenajăm o grădină sau să realizăm instalația electrică a unei camere, trebuie să cunoaștem, încă din etapa de proiectare, valori precum perimetrul, aria etc. Astfel, vom putea determina din start cantitatea de materiale necesare pentru a ne pune în practică ideile, ceea ce ne va permite să economisim timp și să reducem costurile.

Cuprins

Competențe generale și competențe specifice

Competențe vizate

- 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1
- 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2
- 1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3
- 1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4, 6.4
- 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5
- 1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6, 6.6
- 1.7, 2.7, 3.7, 4.7, 5.7, 6.7

Competențe generale

1 Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

2 Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

3 Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

4 Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

5 Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

6 Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

1.1 Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui $\mathbb{R}$
1.2 Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare
1.3 Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame
1.4 Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date
1.5 Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date
1.6 Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date
1.7 Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată
2.1 Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale
2.2 Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare
2.3 Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora
2.4 Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date
2.5 Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc
2.6 Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri
2.7 Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia
3.1 Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
3.2 Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare
3.3 Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora
3.4 Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme
3.5 Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme
3.6 Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii
3.7 Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic
4.1 Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
4.2 Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare
4.3 Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor
4.4 Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere
4.5 Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic
4.6 Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea
4.7 Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic
5.1 Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
5.2 Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare
5.3 Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor
5.4 Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii
5.5 Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice
5.6 Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice
5.7 Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic
6.1 Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale
6.2 Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare
6.3 Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)
6.4 Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere
6.5 Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri
6.6 Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor
6.7 Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic

U1 Mulțimea numerelor reale

Lecția 1: Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Cuvinte cheie
- pătrat perfect
- rădăcină pătrată
- radical

Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Mate practică

Terenul din imagine are forma unui pătrat, iar aria sa este egală cu 6 400 m². Ce lungime are latura terenului?

Vlad: Aria unui pătrat este egală cu pătratul lungimii laturii pătratului.
Eliza: Notând cu l lungimea laturii terenului, exprimată în metri, aria terenului este l^2 metri pătrați.
Luca: Așadar, $l^2 = 6\,400$. Cum $80^2 = 6\,400$, obținem $l = 80$ m.

Ce observăm?
În anumite situații practice, este necesar să determinăm un număr natural n cunoscând cât este pătratul său n^2. Această operație se numește *extragerea rădăcinii pătrate* a numărului n^2.
Un număr natural care este pătratul unui alt număr natural se numește pătrat perfect.

De reținut

Se numește *rădăcina pătrată* a unui număr natural pătrat perfect a numărul natural n care verifică relația $n^2 = a$.
Numărul n se notează $\sqrt{a}$ și se citește *radical* din a. Astfel, se poate scrie:

$$\sqrt{a} = n \text{ dacă și numai dacă } n^2 = a.$$

Exemple

1 $\sqrt{0} = 0$, deoarece $0^2 = 0$;
2 $\sqrt{25} = 5$, deoarece $5^2 = 25$;
3 $\sqrt{121} = 11$, deoarece $11^2 = 121$;
4 $\sqrt{729} = 27$, deoarece $27^2 = 729$;
5 $\sqrt{1024} = 32$, deoarece $32^2 = 1024$;
6 $\sqrt{7225} = 85$, deoarece $85^2 = 7225$.

Observație

Legătura dintre operația de ridicare la pătrat și operația de extragere a rădăcinii pătrate

Din definiția rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect rezultă imediat că:
1 $\sqrt{n^2} = n$, pentru orice număr natural n.
2 $(\sqrt{a})^2 = a$, pentru orice număr natural pătrat perfect a.
Cu alte cuvinte, operațiile de ridicare la pătrat și de extragere a rădăcinii pătrate sunt operații inverse una celeilalte.

$$n \xrightarrow{\text{ridicare la pătrat}} n^2 \qquad n \xleftarrow{\text{extragerea rădăcinii pătrate}} n^2$$

Exemple

1 $\sqrt{7^2} = 7$, deoarece $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$;
3 $\sqrt{5^2} = 5$, deoarece $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$;
2 $(\sqrt{16})^2 = 16$, deoarece $(\sqrt{16})^2 = 4^2 = 16$;
4 $(\sqrt{81})^2 = 81$, deoarece $(\sqrt{81})^2 = 9^2 = 81$.

Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional

În paragraful anterior, am văzut că, dacă un număr natural a se poate scrie ca pătratul unui alt număr natural n, atunci a se numește pătrat perfect, iar n se numește rădăcina pătrată (sau radicalul) lui a.
Vom extinde această definiție și pentru numere raționale.

Activitate pe grupe

1 Lucrând în echipe de câte 2 elevi, copiați și completați tabelul:

x	0,7	1,2	1,3	1,4	1,5	4,5	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{11}{101}$
x^2	0,49					20,25		$\frac{49}{25}$		

2 Transcrieți pe caiete tabelul de mai jos, verificați corectitudinea datelor și determinați, prin încercări, valorile numerelor raționale pozitive x care trebuie scrise în cea de a doua linie a tabelului astfel încât să existe corespondența indicată între x^2 și x:

x^2	0,01	1,69	1,96	2,25	8,41	30,25	$\frac{4}{9}$	$\frac{49}{25}$	$\frac{169}{81}$	$\frac{256}{625}$
x	0,1				2,9		$\frac{2}{3}$			

3 Comparați, între echipe, rezultatele obținute, atât pentru primul, cât și pentru al doilea tabel, și discutați despre legăturile ce există între datele din cele două tabele.

De reținut

Fie a un număr rațional pozitiv care se poate scrie ca pătratul unui număr rațional.
Numărul rațional pozitiv x cu proprietatea $x^2 = a$ se numește *rădăcina pătrată* a numărului rațional a.
Ca și mai înainte, x se notează $\sqrt{a}$ și se citește *radical* din a. Astfel, dacă numărul rațional $a > 0$ este pătratul unui număr rațional, se poate scrie:

$$\sqrt{a} = x \text{ dacă și numai dacă } x^2 = a \text{ și } x > 0.$$

Întrucât $\sqrt{0} = 0$, relația anterioară se scrie mai general, pentru $a \geq 0$, sub forma:

$$\sqrt{a} = x \text{ dacă și numai dacă } x^2 = a \text{ și } x \geq 0.$$

Exemple

1 $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$, deoarece $(0{,}2)^2 = 0{,}04$;

2 $\sqrt{11{,}56} = 3{,}4$, deoarece $3{,}4^2 = 11{,}56$;

3 $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$, deoarece $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$;

4 $\sqrt{\frac{121}{729}} = \frac{11}{27}$, deoarece $\left(\frac{11}{27}\right)^2 = \frac{121}{729}$.

Observații

1 Dacă numărul rațional $a > 0$ este pătratul unui număr rațional x, atunci $a = x^2 = (-x)^2$.

Exemple: a $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$; b $5{,}76 = (2{,}4)^2 = (-2{,}4)^2$.

Definiția de mai sus arată că rădăcina pătrată a lui a este un număr pozitiv. Ca urmare:

a $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ și $\sqrt{\frac{1}{4}} \neq -\frac{1}{2}$; b $\sqrt{5{,}76} = 2{,}4$ și $\sqrt{5{,}76} \neq -2{,}4$.

2 Legătura dintre operația de ridicare la pătrat și extragerea rădăcinii pătrate se păstrează și în cazul numerelor raționale, cu respectarea condiției de pozitivitate de mai sus. Deoarece modulul unui număr rațional este nenegativ și $|-x| = |x|$, din definiția rădăcinii pătrate rezultă că:

a $(\sqrt{a})^2 = a$, pentru orice număr rațional $a \geq 0$ care este pătratul unui număr rațional;

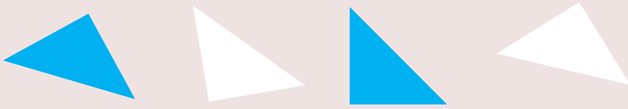
b $\sqrt{x^2} = |x|$, pentru orice număr rațional x.

Rădăcina pătrată a unui număr rațional

Mate practică

Vlad și Luca sunt pasionați de aeromodelism. Pentru realizarea modelului preferat, trebuie să confecționeze din placaj patru piese de forma unui triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de lungime 1 dm.

Eliza: Piesele sunt foarte reușite! Cum ați procedat?



Vlad: Am desenat pe foaia de placaj un dreptunghi de dimensiuni de 1 dm și 2 dm, pe care l-am împărțit în două pătrate de latură 1 dm. Am trasat diagonalele acestor pătrate, am decupat și piesele au fost gata.

Dina: Într-adevăr, putem așeza piesele astfel încât să obținem dreptunghiul de la care ați plecat (figura 1). Dar dacă le aranjăm într-un alt mod, ele formează un pătrat (figura 2).

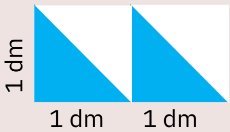


Figura 1

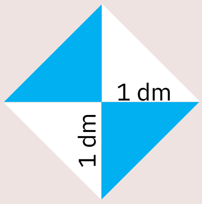


Figura 2

Luca: Interesant! Dar, pentru a decupa acest pătrat din bucata de placaj fără a face risipă de material, ar trebui să știm lungimea laturii pătratului. Nu îmi dau seama care este aceasta.

Eliza: Nu e chiar atât de greu de aflat! Aria pătratului este egală cu aria dreptunghiului, adică 2 dm^2. Așadar, lungimea laturii pătratului este un număr pozitiv x, cu proprietatea $x^2 = 2$.

Luca: Totuși, ce valoare are acest x? Pentru că nu cunosc niciun număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2. Cu toate acestea, cum $1^2 < 2 < 2^2$, pot spune că x trebuie să fie cuprins între 1 și 2.

Vlad: De fapt, deoarece $1{,}4^2 = 1{,}96$ și $1{,}5^2 = 2{,}25$, înseamnă că $1{,}4 < x < 1{,}5$. Pot să fiu și mai precis: $1{,}41 < x < 1{,}42$, întrucât $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$ și $1{,}42^2 = 2{,}0164 > 2$.

Ce observăm?

Situația practică descrisă mai sus demonstrează că există un număr pozitiv x, cu proprietatea $x^2 = 2$, a cărui valoare, chiar dacă nu poate fi indicată cu exactitate, poate fi aproximată la un număr întreg sau la o fracție zecimală finită cu una, două sau mai multe zecimale.

Asemănător, putem arăta că, pentru orice număr rațional pozitiv a, există un număr pozitiv x al cărui pătrat este a. Mai mult, se poate demonstra că x este unicul număr cu această proprietate.

Astfel, putem extinde noțiunea de rădăcină pătrată și pentru numerele raționale oarecare.

De reținut

Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv a este un număr pozitiv x, cu proprietatea $x^2 = a$.

Ca și până acum, notăm $x = \sqrt{a}$ și spunem că x este *radicalul* numărului a (sau radical din a).

De asemenea, sunt valabile relațiile:

a $\sqrt{a} = x$ dacă și numai dacă $x^2 = a$;

b $(\sqrt{a})^2 = a$, pentru orice număr rațional $a \geq 0$.

Exemple

În problema practică de mai înainte, lungimea x a laturii pătratului verifică relația $x^2 = 2$, deci, conform definiției, $x = \sqrt{2}$.

Similar, în urma rezolvării unor probleme practice, putem obține numerele $\sqrt{3}$, $\sqrt{3{,}14}$ sau $\sqrt{\frac{5}{12}}$.

Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional

Pentru a putea utiliza în practică un număr de forma $\sqrt{a}$, unde a este număr rațional pozitiv, vom folosi aproximări ale sale la numere întregi sau la fracții zecimale finite, încadrând numărul rațional a între pătratele a două numere raționale.

Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv prin încadrarea între pătrate de numere raționale

Să considerăm, de exemplu, numărul rațional 5,61. Încadrăm acest număr între două pătrate perfecte consecutive: $2^2 < 5{,}61 < 3^2$, de unde rezultă că $2 < \sqrt{5{,}61} < 3$.

Prin urmare, aproximarea lui $\sqrt{5{,}61}$ la ordinul unităților este egală cu 2, dacă aproximarea se face prin lipsă, respectiv cu 3, dacă aproximarea se face prin adaos.

Pentru a determina aproximările lui $\sqrt{5{,}61}$ la ordinul zecimilor și al sutimilor vom proceda astfel:

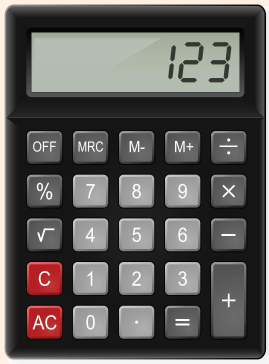
Pasul 1: Calculăm pătratele numerelor de forma $\overline{2,a}$, unde $a \in \{1,2,...,9\}$.
Obținem $2{,}3^2 < 5{,}61 < 2{,}4^2$, deci $\sqrt{5{,}61} \simeq 2{,}3...$.

Pasul 2: Calculăm pătratele numerelor de forma $\overline{2,3a}$, unde $a \in \{1,2,...,9\}$.
Obținem $2{,}36^2 < 5{,}61 < 2{,}37^2$, de unde rezultă $\sqrt{5{,}61} \simeq 2{,}36...$.

Continuând în acest fel se pot obține aproximări cu oricâte zecimale.

Utilizarea minicalculatorului pentru aflarea valorii aproximative a rădăcinii pătrate

Folosind minicalculatorul, rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv se află introducând în calculator numărul respectiv, în formă zecimală, și apăsând apoi tasta pe care este marcat semnul *radical*.



De exemplu, valoarea aproximativă a lui $\sqrt{2}$ se află apăsând, în ordine, tastele:

$\boxed{2} \rightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \rightarrow \boxed{1{,}4142135}$

Dacă numărul rațional este dat sub forma unei fracții ordinare, atunci folosim tasta de împărțire pentru a aduce numărul la forma zecimală, apoi apăsăm tasta radical.

Observații

Căutați pe internet:

- algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv exprimat printr-o fracție zecimală finită;
- metoda babiloniană pentru determinarea valorii aproximative a rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv.

Tabel cu valorile radicalilor numerelor naturale cuprinse între 1 și 25

$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{6}=2{,}4494...$	$\sqrt{11}=3{,}3166...$	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{21}=4{,}5825...$
$\sqrt{2}=1{,}4142...$	$\sqrt{7}=2{,}6457...$	$\sqrt{12}=3{,}4641...$	$\sqrt{17}=4{,}1231...$	$\sqrt{22}=4{,}6904...$
$\sqrt{3}=1{,}7320...$	$\sqrt{8}=2{,}8284...$	$\sqrt{13}=3{,}6055...$	$\sqrt{18}=4{,}2426...$	$\sqrt{23}=4{,}7958...$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{14}=3{,}7416...$	$\sqrt{19}=4{,}3588...$	$\sqrt{24}=4{,}8989...$
$\sqrt{5}=2{,}2360...$	$\sqrt{10}=3{,}1622...$	$\sqrt{15}=3{,}8729...$	$\sqrt{20}=4{,}4721...$	$\sqrt{25}=5$

Exerciții și probleme rezolvate. Idei, metode, tehnici aplicative

1 Arătați că numărul a este pătrat perfect, apoi calculați $\sqrt{a}$:

a $a=25\cdot13+25\cdot20-25\cdot17$; **b** $a=12\cdot(1+2+3+...+24)$; **c** $a=14^{60}$; **d** $a=3^{24}\cdot7^{12}$.

Rezolvare:

a $a=25\cdot13+25\cdot20-25\cdot17=25\cdot(13+20-17)=25\cdot16=5^2\cdot4^2=(5\cdot4)^2=20^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a}=\sqrt{20^2}=20$.

b $a=12\cdot(1+2+3+...+24)=12\cdot\frac{24\cdot25}{2}=12\cdot\frac{24}{2}\cdot25=12\cdot12\cdot25=12^2\cdot5^2=(12\cdot5)^2=60^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a}=\sqrt{60^2}=60$.

c $a=14^{60}=14^{30\cdot2}=(14^{30})^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a}=\sqrt{(14^{30})^2}=14^{30}$.

d $a=3^{24}\cdot7^{12}=(3^{12})^2\cdot(7^6)^2=(3^{12}\cdot7^6)^2$, deci a este pătrat perfect. Obținem apoi $\sqrt{a}=\sqrt{(3^{12}\cdot7^6)^2}=3^{12}\cdot7^6$.

2 Calculați:

a $\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}+\sqrt{100}:\sqrt{25}+\sqrt{25\cdot\sqrt{81}}$;

b $\sqrt{4^2\cdot15+4^2\cdot5^2-4^3}$.

Rezolvare:

a Calculăm mai întâi radicalii, apoi respectăm ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale:
$\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}+\sqrt{100}:\sqrt{25}+\sqrt{25\cdot\sqrt{81}}=4\cdot3+10:5+\sqrt{25\cdot9}=12+2+\sqrt{5^2\cdot3^2}=14+\sqrt{15^2}=14+15=29$.

b $\sqrt{4^2\cdot15+4^2\cdot5^2-4^3}=\sqrt{4^2\cdot(15+5^2-4)}=\sqrt{4^2\cdot36}=\sqrt{4^2\cdot6^2}=\sqrt{24^2}=24$.

Probleme propuse

1 Precizați care dintre numerele următoare este pătrat perfect:
a 16; **b** 24; **c** 63; **d** 81; **e** 121; **f** 144; **g** 200; **h** 400; **i** 625.

2 Scrieți pătratele perfecte cuprinse între 10 și 150.

3 Copiați în caiet, apoi completați tabelul următor:

x	3	7	9		15		23		
x^2		49		100		400		625	900

4 Stabiliți dacă următoarele egalități sunt adevărate sau false:
a $\sqrt{4}=2$; **b** $\sqrt{5}=25$; **c** $\sqrt{36}=6$; **d** $\sqrt{100}=50$; **e** $\sqrt{64}=4$; **f** $\sqrt{144}=12$.

5 Calculați:
a $\sqrt{25}$; **b** $\sqrt{81}$; **c** $\sqrt{1}$; **d** $\sqrt{400}$; **e** $\sqrt{576}$; **f** $\sqrt{900}$.

6 Calculați:
a $\sqrt{4}+\sqrt{36}$; **b** $\sqrt{49}-\sqrt{9}$; **c** $\sqrt{1}+\sqrt{0}+\sqrt{16}$; **d** $\sqrt{100}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{25}:5$.

7 Folosind eventual minicalculatorul, calculați:
a $\sqrt{441}+\sqrt{961}$; **b** $\sqrt{4096}-\sqrt{1225}$; **c** $\sqrt{2209}+2\cdot\sqrt{1369}$; **d** $(\sqrt{17424}-\sqrt{1024}):\sqrt{4}$.

8 Calculați:
a $\sqrt{3^2}$; **b** $\sqrt{14^2}$; **c** $\sqrt{45^2}$; **d** $\sqrt{5^4}$; **e** $\sqrt{8^6}$; **f** $\sqrt{2^8}$; **g** $\sqrt{3^{10}}$.

9 Calculați:

a $\sqrt{5^2-3^2}+\sqrt{3^2+4^2}$; b $\sqrt{9^2+12^2}-\sqrt{3\cdot12}$; c $\sqrt{25^2-20^2}:3+2\cdot\sqrt{121}$.

10 Calculați:

a $(\sqrt{196}-\sqrt{169})\cdot\sqrt{100}+\sqrt{225}$; b $(\sqrt{400}-\sqrt{144}):4+\sqrt{196}:7$;

c $\sqrt{3+\sqrt{36}}+\sqrt{16-\sqrt{49}}$; d $\sqrt{6\cdot\sqrt{36}}+\sqrt{9\cdot\sqrt{81}}-\sqrt{20\cdot\sqrt{25}}$.

11 Arătați că numărul a este pătrat perfect, apoi calculați $\sqrt{a}$:

a $a=1+2+3+...+8$; b $a=1+2+3+...+49$; c $a=41\cdot(1+2+3+...+81)$.

12 Efectuați:

a $\sqrt{2^2\cdot5+2^2\cdot4}$; b $\sqrt{3^2\cdot15+3^2\cdot14-3^2\cdot4}$; c $\sqrt{10^2\cdot81+10^2\cdot18+10^2}$;

d $\sqrt{2^4\cdot3^2+2^4\cdot11+2^4\cdot5}$; e $\sqrt{5^4\cdot20-5^4\cdot16+5^5}$; f $\sqrt{6^4\cdot13+6^4\cdot5^2-6^4\cdot2}$.

13 Aflați x din relațiile următoare:

a $\dfrac{x}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}}$; b $\dfrac{\sqrt{25}}{x}=\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{144}}$; c $\dfrac{2\cdot\sqrt{121}}{x}=\dfrac{\sqrt{49}-\sqrt{9}}{\sqrt{64}}$; d $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{196}}}{x}=\dfrac{\sqrt{6^2+8^2}}{\sqrt{5+\sqrt{400}}}$.

14 Efectuați:

a $\sqrt{3^2\cdot6^2}$; b $\sqrt{8^2\cdot5^2\cdot2^2}$; c $\sqrt{3^4\cdot5^4}$; d $\sqrt{5^{20}\cdot6^{20}}$; e $\sqrt{2^8\cdot3^{10}}$; f $\sqrt{7^{16}\cdot10^{28}}$.

15 Folosind eventual minicalculatorul, efectuați:

a $(\sqrt{15129}+\sqrt{2116}):\sqrt{169}-(\sqrt{13225}+\sqrt{841}):\sqrt{144}$;

b $(3\cdot\sqrt{91809}+\sqrt{8281}):(\sqrt{32400}+2\cdot\sqrt{25600}):(\sqrt{168100}-\sqrt{166464})$.

Minitest

1 Calculați:

a $\sqrt{16}$; b $\sqrt{81}$; c $\sqrt{25}+\sqrt{49}-\sqrt{36}$; d $\sqrt{6^2+8^2}:\sqrt{4\cdot5^2}$.

(3p)

2 Rezultatul calculului $\sqrt{5\cdot\sqrt{144}+4\cdot\sqrt{400}+\sqrt{16}}:\sqrt{3^3-5^2+2}-\sqrt{8+\sqrt{49}+7\cdot\sqrt{9}}$ este:

a 0; b 1; c 2; d 3.

(3p)

3 Calculați $\sqrt{a}$,unde:

a $a=2^4\cdot3^4\cdot5^4$; b $a=17\cdot(1+2+3+...+17)$; c $a=6^4\cdot47+6^4\cdot11+6^5$.

(3p)

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.

Lecția 2: Mulțimea numerelor reale

Cuvinte cheie

- număr natural
- număr întreg
- număr rațional
- număr irațional
- număr real
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- axa numerelor
- modulul unui număr real
- opusul unui număr real

Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale

Situație problemă

Vlad: Acest $\sqrt{2}$ reprezintă lungimea laturii unui pătrat. Pentru că este rezultatul unei măsurători, el trebuie să fie un număr. Dar ce fel de număr este $\sqrt{2}$?

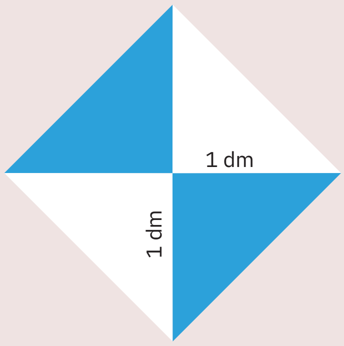
Dina: Ce vrei să spui? Cum adică, ce fel de număr? Fii mai explicit!

Vlad: Folosind calculatorul meu de buzunar, am obținut:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135\ldots\ .$$

Dar ecranul calculatorului meu afișează cel mult 8 cifre, așa că am folosit o aplicație a telefonului mobil și am obținut 15 zecimale:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373095\ldots\ .$$



Luca: Computerul meu personal are o aplicație numită calculator științific. Iată ce obținem:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots\ .$$

Eliza: Înțeleg ce te contrariază! Cel puțin din ce vedem până aici, zecimalele nu se repetă periodic.

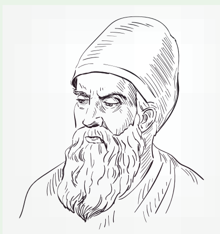
Dina: Chiar e ciudat! Numerele raționale se pot scrie ca fracții zecimale, finite sau periodice, ceea ce nu pare a fi cazul lui $\sqrt{2}$. Așa că... ce fel de număr este $\sqrt{2}$?

Ce observăm?

Aproximările făcute arată că *este posibilă* existența unor numere exprimate ca fracții zecimale neperiodice (în care zecimalele nu se repetă periodic). Cu alte cuvinte, aceste numere nu sunt nici fracții zecimale finite, nici fracții zecimale periodice (simple sau mixte), deci nu sunt numere raționale.

Istoria matematicii

Chiar dacă mai sus am analizat un număr suficient de mare de zecimale ale lui $\sqrt{2}$, am studiat doar un număr *finit* de zecimale. Bazându-ne doar pe calculele de mai sus, nu putem indica dacă $\sqrt{2}$ este sau nu este număr rațional.


Euclid

În cartea sa *Elementele*, Euclid (n. aprox. 325 î. Hr.) a demonstrat că:

$$\sqrt{2} \text{ nu este număr rațional.}$$

Într-adevăr, dacă $\sqrt{2}$ ar fi număr rațional, atunci ar exista numerele naturale nenule p și q, prime între ele, astfel încât $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, sau, echivalent, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Rezultă $p^2 = 2q^2$, deci p este divizibil cu 2. Dacă $p = 2s$, atunci $4s^2 = 2q^2$, adică $q^2 = 2s^2$, deci și q este divizibil cu 2. Am obținut că numerele p și q au divizorul comun 2, contradicție cu faptul că p și q sunt prime între ele. Presupunerea făcută este falsă, deci $\sqrt{2}$ nu este număr rațional.

În particular, întrucât nu este număr rațional, $\sqrt{2}$ se scrie ca fracție zecimală infinită și neperiodică.

De reținut

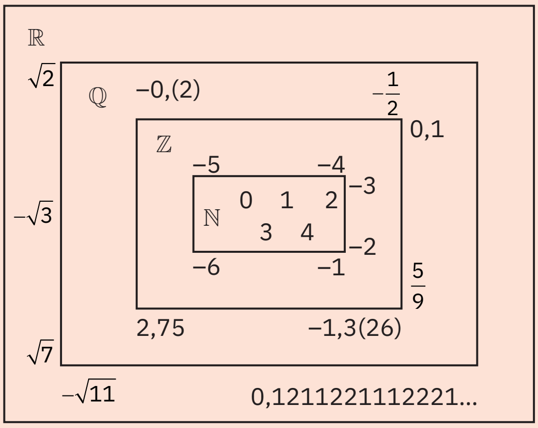
Numerele care se pot scrie ca fracții zecimale infinite și neperiodice se numesc *numere iraționale*.
Astfel, $\sqrt{2}$ este număr irațional.
Mai general, dacă numărul natural n nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{n}$ este irațional.

Exemple

1. Raportul dintre lungimea cercului și diametrul său este un număr irațional, notat cu litera grecească π (*pi*). Valoarea aproximativă este $\pi = 3,1415926535...$.
2. Raportul de aur, notat cu litera grecească φ (*phi*), este primul număr irațional descoperit și definit în istoria matematicii. Valoarea aproximativă este 1,6180339887... .
3. Numărul $A = 1,010010001000010000010...$, în scrierea căruia, după fiecare cifră de 1, numărul cifrelor de 0 crește cu o unitate, este număr irațional.
Într-adevăr, dacă A ar fi o fracție zecimală periodică, cu perioada de n cifre, printre cele n cifre ar trebui să se afle neapărat cifra 1, pentru că perioada nu poate conține doar cifra 0. Ca urmare, printre orice n zecimale consecutive ale lui A ar trebui să se afle măcar un 1. Însă imediat după cea de-a n-a cifră 1 din A urmează de $n + 1$ ori cifra 0, deci A este irațional.

De reținut

Mulțimea numerelor reale, notată $\mathbb{R}$, este reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale.
Deoarece mulțimea numerelor reale conține mulțimea numerelor raționale, rezultă $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
În consecință, are loc șirul de incluziuni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Mulțimea numerelor iraționale se notează cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Așadar, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



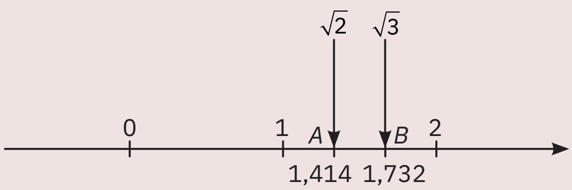
Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor

Mate practică

Vlad și Luca vor să construiască din hârtie două pătrate cu ariile de 2 cm^2, respectiv 3 cm^2.

Luca: Laturile celor două pătrate au lungimile egale cu $\sqrt{2}$ cm, respectiv $\sqrt{3}$ cm. Dar cum construim segmente de aceste dimensiuni?

Vlad: Considerăm mai întâi aproximările lor: $\sqrt{2} = 1,414...$, $\sqrt{3} = 1,732...$.
Reprezentăm aceste aproximări pe axa numerelor, pe care fixăm unitatea de măsură de 1 cm, și obținem, pe axă, punctele A și B. Segmentele OA și OB au lungimile aproximativ egale cu $\sqrt{2}$ cm, respectiv $\sqrt{3}$ cm.



Ce observăm?
Un număr irațional se poate reprezenta pe axa numerelor folosind aproximările la numere raționale ale numărului irațional respectiv.

De reținut

O dreaptă pe care se fixează un punct numit *origine*, un sens de parcurgere de la stânga spre dreapta, indicat de o săgeată, numit *sens pozitiv*, și un segment numit *unitate de măsură* se numește *axa numerelor*.
Fiecărui număr real îi corespunde, pe axa numerelor, un punct. Mai mult, fiecărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un număr real, numit coordonata sau abscisa punctului. Originea axei are coordonata 0 (zero).
Intuitiv, numerele reale ocupă toate punctele de pe axă. Întrucât unor numere reale diferite le corespund puncte distincte pe axa numerelor, putem identifica fiecare punct al axei cu un număr real.

Observații

1 Numerele reale care se reprezintă în dreapta originii se numesc numere reale *pozitive*, iar în scrierea lor zecimală, înainte de prima cifră, se scrie semnul „+“.
Ca și în cazul numerelor raționale, semnul unui număr pozitiv poate fi omis.
Mulțimea numerelor reale pozitive se notează $\mathbb{R}_+$.
Exemple de numere reale pozitive: $+3 = 3$; $+\sqrt{6} = \sqrt{6}$; $+7,(51) = 7,(51)$ etc.

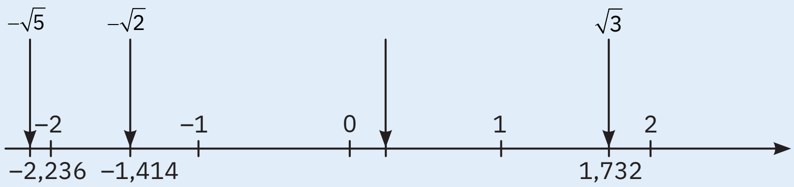
2 Numerele reale care se reprezintă în stânga originii se numesc numere reale *negative*, iar în scrierea lor zecimală, înainte de prima cifră, se scrie semnul „–“.
Mulțimea numerelor reale negative se notează $\mathbb{R}_-$.
Exemple de numere reale negative: -2; $-\sqrt{11}$; $-7,1$; $-1,(3)$ etc.

3 Numărul real 0 nu are semn (nu este nici pozitiv, nici negativ).
Mulțimea numerelor reale nenule se notează $\mathbb{R}^*$.
Avem $\mathbb{R} = \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

Exemple

În figura de mai jos, utilizând aproximările zecimale, sunt reprezentate următoarele numere reale:

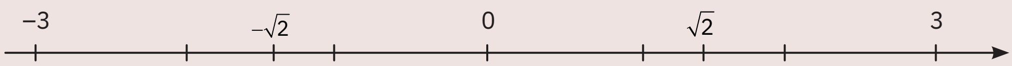
a $-\sqrt{2} = -1,414...$; b $\sqrt{3} = 1,732...$; c $-\sqrt{5} = -2,236...$.



Modulul unui număr real

Situație problemă

Dina reprezintă pe axa numerelor următoarele numere: -3, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ și 3, apoi o întreabă pe Eliza dacă observă vreo legătură între anumite numere.



Eliza: Numerele -3 și 3 sunt situate, pe axă, la aceeași distanță față de origine. La fel, $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$ sunt la aceeași distanță față de origine.

Dina: Deoarece -3 și 3 sunt numere opuse, putem spune că $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$ sunt, de asemenea, numere opuse.

Ce observăm?
Orice număr real are un opus. Numerele reale opuse sunt situate pe axa numerelor la aceeași distanță față de origine, de o parte și de cealaltă a acesteia.

De reținut

Două numere reale nenule se numesc *opuse* dacă pe axa numerelor le corespund două puncte egal depărtate de origine.
Dacă x este un număr real, $-x$ se numește opusul lui x.

Exemplu

1 Opusul lui 6 este −6.

2 Opusul lui −1,(5) este 1,(5).

3 Opusul lui $\sqrt{3}$ este $-\sqrt{3}$.

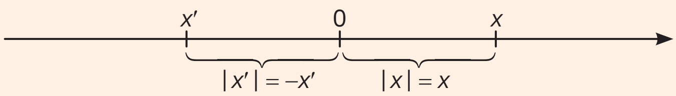
4 Opusul lui 3,5055055505... este −3,5055055505... .

De reținut

Modulul unui număr real x reprezintă distanța de la origine la punctul ce îi corespunde numărului x pe axa numerelor.
Modulul numărului real x, numit și valoarea absolută a numărului x, se notează $|x|$.

Observații

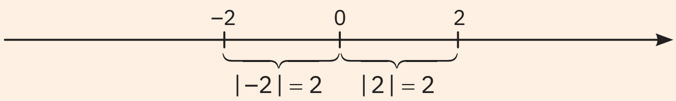
1 Din interpretarea modulului ca distanță, rezultă că modulul unui număr real pozitiv este numărul însuși, iar modulul unui număr real negativ este egal cu opusul numărului respectiv:



Astfel, avem:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}.$$

2 Modulele a două numere opuse sunt egale: $|-x| = |x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$:



3 Proprietățile modulului unui număr real

a Modulul oricărui număr real este mai mare sau egal cu 0 (este număr nenegativ):

$$|x| \geq 0, \text{ pentru orice număr real } x.$$

În plus, $|x| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.

b Modulul produsului a două numere reale este egal cu produsul modulelor celor două numere:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \text{ pentru orice numere reale } x, y.$$

c Modulul sumei a două numere reale este cel mult egal cu suma modulelor celor două numere:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \text{ pentru orice numere reale } x, y.$$

Exemple

Verificați proprietățile de mai sus folosind exemplele din următorul tabel:

x	y	$\|x\|$	$\|y\|$	$\|x \cdot y\|$	$\|x + y\|$	$\|x\| + \|y\|$
2	3	2	3	6	5	5
−3	−2	3	2	6	5	5
0	−8	0	8	0	8	8
4	−7	4	7	28	3	11
$-2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	36	$4\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$
$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	7	0	$2\sqrt{7}$

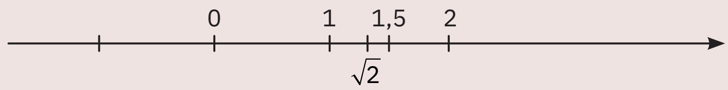
Observați în ce situații se obține egalitate în inegalitatea $|x + y| \leq |x| + |y|$. Justificați!

Compararea și ordonarea numerelor reale

Situație problemă

Vlad: Dintre numerele $\sqrt{2}$ și 1,5, care este mai mare?

Luca: Din moment ce $\sqrt{2}=1,414...$, rezultă că $\sqrt{2}<1,5$.
Pot demonstra acest lucru și reprezentând cele două numere pe axa numerelor:



Pentru că 1,5 este situat în dreapta lui $\sqrt{2}$, înseamnă că 1,5 este mai mare decât $\sqrt{2}$.

Ce observăm?

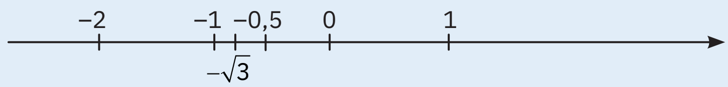
Știm că dintre două numere raționale reprezentate pe axa numerelor, mai mare este numărul aflat în dreapta celuilalt. Observăm că acest lucru este valabil și în cazul în care unul dintre numere este irațional sau dacă ambele numere sunt iraționale.

De reținut

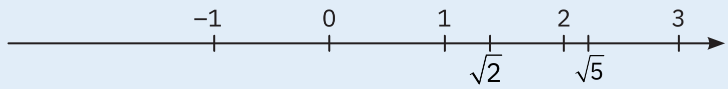
Dintre două numere reale diferite, este mai mare numărul reprezentat mai la dreapta pe axa numerelor.

Exemple

1 $-\sqrt{3}<-0,5$, deoarece, pe axa numerelor, punctul corespunzător lui $-0,5$ este situat în dreapta punctului ce corespunde numărului $-\sqrt{3}$:



2 $\sqrt{5}>\sqrt{2}$, deoarece punctul corespunzător lui $\sqrt{5}$ este situat în dreapta punctului ce corespunde numărului $\sqrt{2}$, pe axa numerelor:



Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1 Dați două exemple de numere:

a reale negative;
b iraționale pozitive;
c raționale, care nu sunt întregi;
d raționale care nu sunt reale.

Rezolvare:

a $-1,6$ și $-\sqrt{15}$.
b $\sqrt{5}$ și $\sqrt{11}$.
c 3,(2) și $-\frac{4}{7}$.
d Nu există numere raționale care să nu fie reale.

2 Dați două exemple de numere reale:

a opuse;
b care au modulele egale cu $\sqrt{6}$;
c care au modulele egale cu -5;
d care se află la o distanță de 6 unități față de origine pe axa numerelor.

Rezolvare:

a 2 și -2.
b Numerele reale care au modulul egal cu $\sqrt{6}$ sunt $-\sqrt{6}$ și $\sqrt{6}$.
c Modulul unui număr real este mai mare sau egal cu zero. Prin urmare, nu există numere reale care să aibă modulul egal cu -5.
d Numerele reale care se află la distanța de 6 unități față de origine, pe axa numerelor, sunt numerele care au modulul egal cu 6, adică -6 și 6.

3 Reprezentați pe axa numerelor, apoi ordonați crescător următoarele numere:

$-\sqrt{2}$; $-1{,}5$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{\frac{25}{4}}$; $\sqrt{6}$.

Rezolvare:
Pentru a reprezenta pe axă numerele date, mai întâi le calculăm, iar în cazul numerelor iraționale folosim o aproximare a lor.

Astfel, $-\sqrt{2}=-1{,}41\ldots$, $\sqrt{0{,}64}=0{,}8$, $\sqrt{\frac{25}{4}}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$, $\sqrt{6}=2{,}44\ldots$.

Folosind reprezentarea pe axă, ordinea crescătoare este: $-1{,}5<-\sqrt{2}<\sqrt{0{,}64}<\sqrt{6}<\sqrt{\frac{25}{4}}$.

4 Încadrați fiecare număr real între două numere întregi consecutive:

a $\square<1{,}6<\square$; **b** $\square<-\sqrt{10}<\square$; **c** $\square<\sqrt{6{,}25}<\square$.

Rezolvare: a $1<1{,}6<2$.
b Putem proceda în două moduri:
1 Calculăm cu aproximație $-\sqrt{10}$: $-\sqrt{10}=-3{,}16\ldots$. Rezultă că $-4<-\sqrt{10}<-3$.
2 Determinăm două pătrate perfecte consecutive între care e cuprins 10. Acestea sunt 9 și 16. Obținem deci $9<10<16$, de unde rezultă că $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$, adică $3<\sqrt{10}<4$. Astfel, $-4<-\sqrt{10}<-3$.
c Calculăm mai întâi $\sqrt{6{,}25}=\sqrt{(2{,}5)^2}=2{,}5$. Obținem $2<\sqrt{6{,}25}<3$.

Probleme propuse

1 Se consideră numerele: -6; $\sqrt{5}$; 0; $-2{,}8$; $\frac{4}{3}$; $-\sqrt{6}$; 7; -10; $\sqrt{15}$; $5{,}4(12)$. Precizați care dintre aceste numere sunt:
a naturale; **b** întregi; **c** raționale; **d** iraționale; **e** reale.

2 Precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:
a 0 este număr natural; **b** 1,6 este număr întreg; **c** $-5{,}(4)$ este număr irațional;
d $\sqrt{3}$ este număr real; **e** $\sqrt{4}$ este număr natural; **f** $-\sqrt{8}$ este număr irațional.

3 Precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:
a $9\in\mathbb{N}$; **b** $0\in\mathbb{Z}$; **c** $0\notin\mathbb{N}$; **d** $1{,}7\in\mathbb{R}$;
e $-\frac{3}{4}\in\mathbb{R}$; **f** $\sqrt{15}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; **g** $\sqrt{15^2}\in\mathbb{N}$; **h** $\sqrt{(2{,}45)^2}\in\mathbb{Q}$.

4 Scrieți câte două elemente ce aparțin mulțimilor:
a $\mathbb{N}$; **b** $\mathbb{Z}$; **c** $\mathbb{Q}$; **d** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; **e** $\mathbb{R}$.

5 Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere reale, apoi scrieți-le în ordine crescătoare:
a -3; $\sqrt{3}$; $-2{,}4$; $-\sqrt{2}$; $1{,}3$; **b** $-\sqrt{6}$; $\sqrt{5}$; $\frac{3}{2}$; -2; $\sqrt{4}$; **c** $-2{,}5$; $\sqrt{2}$; $1{,}5$; $-\sqrt{6}$; $\frac{5}{2}$.

6 Completați tabelul:

x	4	1,7	$\sqrt{10}$			$-\frac{5}{12}$	
$-x$				4,12	$\sqrt{18}$		$-\sqrt{13{,}1}$
$\lvert x\rvert$							

7 Precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate și care sunt false:

a $|+3| = 3$; **b** $|-1,6| = +1,6$; **c** $|-9| = -9$; **d** $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$;

e $|-\sqrt{13}| = -\sqrt{13}$; **f** $\left|-\frac{3}{7}\right| = \frac{7}{3}$; **g** $|0| = 0$; **h** $|-\sqrt{7,5}| = \sqrt{7,5}$.

8 Arătați că următoarele numere sunt raționale:

a $\sqrt{\frac{4}{9}}$; **b** $\sqrt{\frac{25}{81}}$; **c** $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; **d** $\sqrt{0,81}$.

9 Stabiliți care dintre următoarele numere sunt raționale și care sunt iraționale:

a $\sqrt{27^2}$; **b** $\sqrt{5^2 \cdot 2}$; **c** $\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^3}$; **d** $\sqrt{99}$.

10 Se consideră mulțimea $A = \left\{-6;\ \frac{3}{4};\ \sqrt{7};\ -\sqrt{12};\ 3,(4);\ \sqrt{24};\ 0;\ 1,8\right\}$.

Scrieți elementele mulțimilor: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap \mathbb{R}$, $A \setminus \mathbb{Q}$, $A \setminus \mathbb{R}$.

11 Încadrați fiecare număr real între două numere întregi consecutive:

a ☐ $< 2,7 <$ ☐; **b** ☐ $< \sqrt{6} <$ ☐; **c** ☐ $< -\sqrt{20} <$ ☐; **d** ☐ $< \sqrt{99} <$ ☐.

12 a Dați două exemple de numere raționale cuprinse între 3 și 4.

b Dați două exemple de numere iraționale cuprinse între 3 și 4.

13 Determinați elementele mulțimilor:

a $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 4\}$; **b** $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < \sqrt{x} < 4\}$; **c** $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq \sqrt{x} < 3\}$.

14 Comparați numerele:

a $\sqrt{2}$ și $1,5$; **b** $-\sqrt{3}$ și -2; **c** — și $\sqrt{0,36}$; **d** $-\sqrt{34}$ și $-\sqrt{35}$.

15 Ordonați crescător numerele:

a $-4;\ -3,9;\ -2,(64);\ -3,89;\ -2,6$; **b** $-\sqrt{11};\ \sqrt{10};\ \sqrt{8};\ -\sqrt{10};\ \sqrt{7}$; **c** $1;\ \sqrt{3};\ 2;\ \sqrt{2};\ 1,5$.

16 Calculați:

a $|1 - 1,5|$; **b** $\left|\frac{1}{2} - 2\right|$; **c** $|\sqrt{2} - 1|$; **d** $|\sqrt{5} - \sqrt{3}|$;

e $|4 - \sqrt{17}|$; **f** $|\sqrt{8} + 3|$; **g** $|-\sqrt{5} - \sqrt{6}|$; **h** $|-\sqrt{7} + 2|$.

17 Considerăm mulțimea $A = \{\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \ldots; \sqrt{30}\}$.

a Stabiliți câte numere raționale și câte numere iraționale conține mulțimea A.

b Calculați suma numerelor raționale din mulțimea A.

18 Arătați că numărul $\sqrt{x}$ este rațional în fiecare dintre următoarele cazuri:

a $x = 3^2 + 4^2$; **b** $x = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$; **c** $x = 7^2 + 24^2$; **d** $x = 7^{100}$.

19 Arătați că următoarele numere sunt iraționale:

a $\sqrt{1+2+3+\ldots+10}$; **b** $\sqrt{5^{10} + 6^{10} + 1}$; **c** $\sqrt{10^{10} + 11^{11} + 12^{12}}$.

20 Determinați numerele reale x, știind că:

a $|x| = \sqrt{5}$; **b** $|x| = -\sqrt{10}$; **c** $|x| \leq 0$; **d** $|x| > 0$.

Minitest

1 Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere reale, apoi scrieți-le în ordine crescătoare:
$-1{,}5;\ -\sqrt{3};\ 0{,}5;\ \sqrt{5};\ \dfrac{3}{2}$. **(3p)**

2 Demonstrați că mulțimea $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 2\le\sqrt{x}<3\}$ este egală cu:
a $\{5;\ 6;\ 7;\ 8\}$; **b** $\{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$; **c** $\{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$; **d** $\{5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$. **(3p)**

3 Se consideră mulțimea $A=\left\{-4;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{7};\ \sqrt{10};\ -1{,}(25);\ \dfrac{1}{4};\ 0;\ -11{,}6\right\}$.

Scrieți elementele mulțimilor: $A\cap\mathbb{N}$, $A\cap\mathbb{Z}$, $A\cap\mathbb{Q}$, $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $A\cap\mathbb{R}$, $A\setminus\mathbb{Q}$, $A\setminus\mathbb{R}$. **(3p)**

Notă. Se acordă 1 punct din oficiu.