Maria Zaharia

Caiet de vacanță
Matematică
Clasa a VI-a

Suport teoretic, exerciții și probleme aplicative

Ediția a II-a, revizuită

Editura Paralela 45

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1 Mulțimi

1. a) Mulțimea este .... bine determinate și distincte numite ....

b) Mulțimile se notează cu .... , cu sau fără indici: A, B, C, ... , A_1, A_2, A_3, ...

c) Elementele unei mulțimi se notează cu .... : a, b, ...

d) Mulțimea care nu are nici un element se numește .... și se notează cu simbolul ....

2. a) Dacă A este o mulțime și x este un element al ei, atunci notăm .... și citim ....

b) O mulțime se numește numerică dacă ....

3. Orice mulțime poate fi dată în trei moduri:

a) **explicit**, prin .... ;

b) **implicit**, ... ;

c) **cu ajutorul unor diagrame Venn–Euler** ....

4. Mulțimea numerelor naturale mai mici decât 5 reprezentată:

a) explicit este $M =$ ....

b) printr-o proprietate caracteristică este $M =$ ....

c) cu ajutorul diagramei Venn–Euler este:

5. O mulțime A se numește:

a) **mulțime finită** dacă .... , de exemplu: mulțimea divizorilor numărului 6 este D_6 ....

b) **mulțime infinită** .... , de exemplu: mulțimea multiplilor unui număr natural este .... $M_6 =$ ....

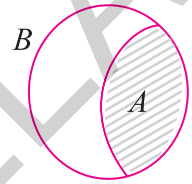
6. Numărul de elementelor ale unei mulțimi A se notează cu .... și card D_6 = ...

7. a) **Două mulțimi A și B sunt egale** dacă .... și notăm .... în caz contrar spunem că .... și notăm ....

b) Mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x \leq 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$ sunt .... și notăm ....

c) Mulțimile $M = \{1, 2, 3\}$ și $N = \{a, b, c\}$ sunt .... și notăm .... , însă au același număr de elemente, mai precis card M = ... = ...

8. a) **O mulțime A** este **submulțime a mulțimii B** dacă ....



$A \subset B$

Se notează $A \subseteq B$ și se citește „ .... ”.

b) Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B, atunci .... și notăm ....

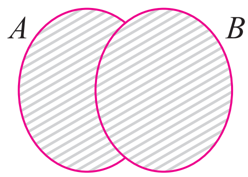
9. a) Mulțimea vidă este submulțime .... și notăm ....

b) Orice mulțime este inclusă în ea însăși, adică ....

c) Mulțimea vidă și mulțimea însăși sunt .... , restul submulțimilor sunt submulțimi ....

10. a) **Reuniunea a două mulțimi A și B** este .... și scriem $A \cup B$ = ...

b) Dacă $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cup B$ = ...

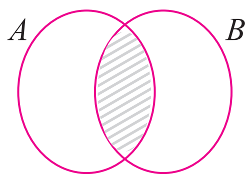


$A \cup B$

11. a) **Intersecția a două mulțimi A și B** este .... și scriem $A \cap B$ = ...

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cap B$ = ...

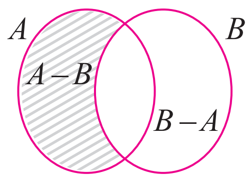
c) Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci A și B se numesc ....



$A \cap B$

12. a) **Diferența mulțimilor A și B** este .... și scriem $A - B$ = ...

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A - B$ = ... și $B - A$ = ...



$A - B \neq B - A$

13. a) Într-o mulțime fiecare element apare ....

b) Analizând diagramele de mai jos, avem reprezentată o mulțime în figura ....

fig. 1 *fig. 2* *fig. 3* *fig. 4*

14. a) Submulțimile mulțimii $M = \{a, b, c\}$ sunt ....

....

b) Numărul de submulțimi ale unei mulțimi A este ....

15. Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x^2 \mid x \in A\}$. Scrieți elementele mulțimilor:

$B =$ .... ; $A \cup B =$ .... ;

$A \setminus B =$ .... ; $A \cap B =$ ....

16. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Într-o mulțime nu contează ordinea .... , mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{b, a, c\}$ sunt .... pentru că sunt formate din ....

b) Mulțimea literelor din care este format cuvântul „element” este $C =$ ....

c) Mulțimea cifrelor este o mulțime .... în timp ce mulțimea numerelor naturale este o mulțime ....

17. Se dă mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N}^*, x \leq 3\}$.

a) Scrieți mulțimea M prin enumerarea elementelor, $M =$ ....

b) Submulțimile improprii ale mulțimii M sunt ....

c) Submulțimile proprii ale mulțimii M sunt ....

18. Determinați a, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $\{1, a, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$; b) $\{1, a, 3\} \subseteq \{1, 3, 4, 5\}$.

....

19. a) Determinați perechile (x, y) știind că $\{2, x, 4\} \subseteq \{1, 2, y, 3\}$.

b) Determinați perechile (x, y) știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $\{2, 3, 4\} \subset \{3, x, y, 4\}$; ii) $\{3, x, y, 4\} \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soluție: ....

....

20. a) Elementele mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ este restul împărțirii oricărui număr natural la $5\}$ sunt: ....

....

b) Între elementul a și mulțimea $M = \{a, b, c\}$ există relația de .... și notăm ....

c) Între mulțimile $A = \{1, 2\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3\}$ există relația de .... ; notăm .... și spunem că ....

21. Se consideră mulțimea $M = \left\{\overline{xy} \in \mathbb{N} \mid \overline{xy} \vdots 23\right\}$.

a) Elementele mulțimii M sunt ....

b) Submulțimile lui M formate din câte două elemente sunt ....

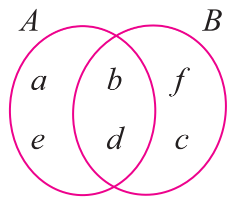
c) Submulțimile lui M formate din câte trei elemente sunt ....

22. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ .... $x \in B\}$; c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ .... $x \notin B\}$;

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ .... $x \in B\}$; d) $B \setminus A = \{x \mid x \in B$ .... $x \notin A\}$.

23. Analizați, cu atenție, diagrama și specificați dacă propozițiile ce urmează sunt adevărate sau false:



$a \in A \cap B$ .... ; $b \notin A \cap B$ .... ; $\{b, d\} = A \cap B$ .... ;

$d \notin A \cap B$ .... ; $e \in A \setminus B$ .... ; $\{a, c\} \subset A \cup B$ ....

24. Se consideră două mulțimi oarecare A și B.

a) Dacă $A \cap B = A \cup B$, atunci ....

b) Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci ....

25. Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate:

a) Cel mai mare divizor propriu al mulțimii $\mathcal{D}_{48}$ este ....

b) Cardinalul mulțimii $\mathcal{D}_{48}$ este ....

c) Cel mai mic element al mulțimii $\mathcal{M}_6 \cap \mathcal{M}_8$ este ....

d) Din mulțimea $\mathcal{M}_8$, elementele de forma $\overline{ab}$ sunt ....

26. Dacă $A = \{0, 1, 2, 4\}$ și $B = \{0, 2, 5, 6\}$, atunci:

$A \cup B =$ .... ; $A \cap B =$ .... ;

$A \setminus B =$ .... ; $B \setminus A =$ ....

27. Determinați mulțimile M și N, știind că $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M \cap N = \{2, 3, 4\}$ și $N \setminus M = \{5\}$.

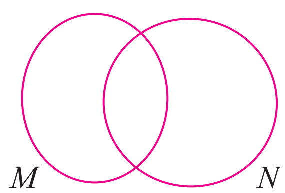
Soluție: ....

....

....

....

....



V.1 Unghiuri. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf

1. Completați spațiile punctate:

a) Două unghiuri proprii se numesc **unghiuri opuse la vârf** dacă ....

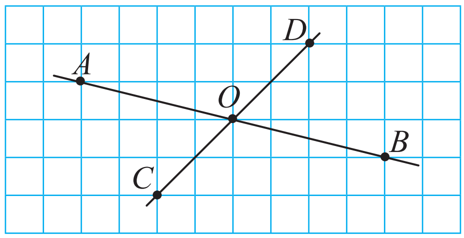
b) Unghiurile opuse la vârf sunt ...., adică au aceeași măsură.

2. Desenați două drepte MN și PQ concurente în punctul O.

a) Semidreptele OM și ON, respectiv OP și OQ sunt perechi de ....

b) Unghiurile MOP și NOQ, respectiv MOQ și NOP sunt unghiuri ....

3. În figura alăturată:



a) semidreptele OA și OB sunt semidrepte .... , înseamnă că $\sphericalangle AOB$ este .... , adică: $\sphericalangle AOD + \sphericalangle DOB =$ .... sau $\sphericalangle DOB = 180 -$ .... (1)

b) semidreptele OC și OD sunt semidrepte .... , înseamnă că $\sphericalangle COD$ este .... , adică: $\sphericalangle AOD + \sphericalangle AOC =$ .... sau $\sphericalangle AOC = 180 -$ .... (2)

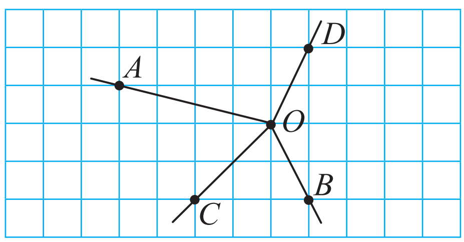
c) Din (1) și (2) se constată că unghiurile DOB și AOC sunt .... și notăm ....

4. a) Desenați două drepte MN și PQ concurente în punctul O, astfel încât măsura unghiului MOP să fie de 45°.

b) Măsurile unghiurilor MOQ, NOQ și PON sunt egale cu ....

c) Unghiurile opuse la vârf din figura obținută sunt .... și ....

5. Observați figura alăturată și completați: Unghiurile AOD și BOC, respectiv AOC și BOD sunt perechi de unghiuri care .... deoarece semidreptele OA și OB, respectiv OC și OD nu sunt ....

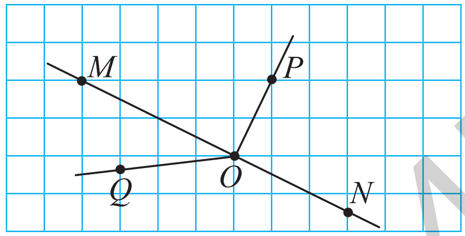


6. Analizați cu atenție figura alăturată și completați:

a) semidreptele OM și ON sunt .... ;

b) semidreptele OP și OQ .... semidrepte opuse;

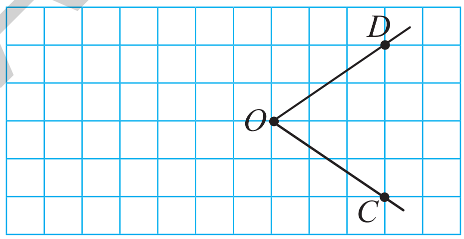
c) unghiurile POM și QON, respectiv PON și QOM sunt unghiuri care .... la vârf și ale căror laturi .... o singură pereche de ....



7. Calculați măsurile unghiurilor determinate de două drepte concurente, știind că unul dintre ele are măsura egală cu:

a) 60°; b) 100°; c) 80°; d) 90°.

8. Mihai dorește să măsoare unghiul COD din figura alăturată, dar, așa cum este desenat unghiul, gradațiile raportorului depășesc marginea caietului. Ce ar trebui să facă Mihai?



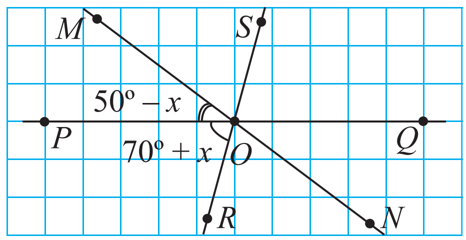
....

....

9. Analizați cu atenție figura alăturată.

a) Calculați măsura unghiului SOM.

b) Dacă măsura unghiului POR este dublul măsurii unghiului POM, calculați măsurile unghiurilor: RON, QON, QOS.



....

....

10. Se consideră două drepte a și b, concurente în punctul O. Calculați măsura fiecărui unghi cu vârful în punctul O, știind că:

a) suma măsurilor a două dintre unghiuri este egală cu 140°;

b) suma măsurilor a trei dintre unghiuri este egală cu 225°.

....

....

....

....

V.2 Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct

1. Numim **unghiuri în jurul unui punct *O*** .... care au proprietățile:

a) toate au .... , punctul O;

b) orice punct al planului care nu aparține niciuneia dintre laturile lor ....

....

Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este egală cu 360°.

2. Unghiurile AOB, COB și COA sunt unghiuri în jurul unui punct. Știind că măsura unghiului BOC este dublul măsurii unghiului AOB și cu 10° mai mică decât măsura unghiului AOC, calculați măsurile unghiurilor.

Soluție: Fie $\sphericalangle AOB = x° \Rightarrow \sphericalangle BOC =$ ....

și $\sphericalangle AOC =$ .... Dar suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este egală cu .... ° $\Rightarrow$ ....

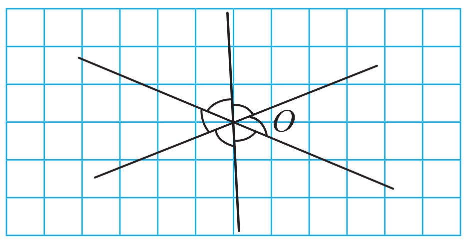
....

3. Aflați măsurile a cinci unghiuri în jurul unui punct, știind că acestea sunt exprimate prin numere naturale consecutive.

Soluție: Fie x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ și $x + 4$ măsurile celor cinci unghiuri în jurul unui punct. Avem: $x + (x + 1) + (x + 2) +$ .... = ...

$\Rightarrow$ ....

4. Unghiurile marcate pe figura alăturată sunt congruente.



a) Notați figura.

b) Suma măsurilor unghiurilor marcate pe figură este egală cu .... °, deoarece unghiurile ....

....

c) Măsura fiecărui unghi din figură este egală cu ....

....

5. Calculați măsurile unghiurilor formate de două drepte concurente, știind că diferența măsurilor a două dintre ele este de 30°.

....

....

6. Se consideră patru drepte concurente într-un punct O. Patru dintre cele opt unghiuri care nu au puncte interioare comune au măsurile de $x°$, $x° - 10°$, $x° + 10°$, $3x°$.

a) Realizați un desen care să ilustreze situația.

b) Calculați măsurile unghiurilor.

c) Verificați dacă în jurul punctului O există unghiuri drepte. Numiți-le!

....

....

7. Calculați ce unghi descrie:

a) minutarul (limba mare) unui ceas în 20 de minute;

b) orarul (limba mică) unui ceas într-o oră.

....

....

....

8. În jurul unui punct O se consideră patru unghiuri care nu au puncte interioare comune, cu măsurile de $2x° + 20°$, $3x° - 20°$, $4x° - 10°$, $3x° + 10°$.

a) Calculați măsurile unghiurilor.

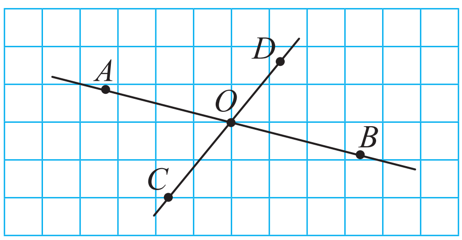
b) Realizați un desen care să ilustreze datele problemei.

c) În jurul punctului O există unghiuri obtuze? Numiți-le!

....

....

9. Analizați figura alăturată.



a) Unghiurile formate în jurul punctului O sunt: ....

....

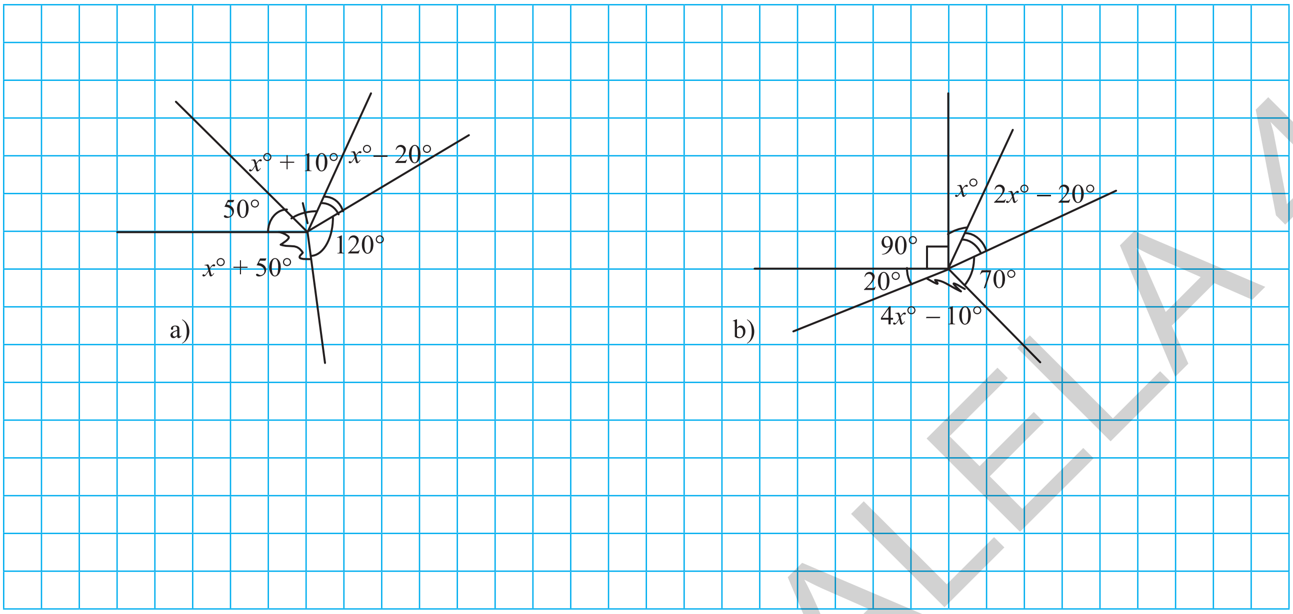
b) Unghiurile opuse la vârf din figura alăturată sunt: ....

....

c) Dacă măsura unghiului AOC este egală cu 50°, atunci măsurile celorlalte unghiuri din figură sunt egale cu: ....

....

10. Studiați cu atenție figurile de mai jos și calculați măsurile unghiurilor necunoscute.



V.3 Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare

1. a) Două unghiuri se numesc **unghiuri suplementare** dacă ....

b) Fiecare dintre cele două unghiuri este .... celuilalt unghi.

c) Dacă două unghiuri suplementare sunt congruente, atunci fiecare are măsura egală cu .... , adică fiecare unghi este ....

d) Unghiurile care au același suplement sunt ....

e) Unghiurile congruente au suplementele ....

f) Suplementul unui unghi cu măsura de $x°$ este unghiul cu măsura de ....

2. a) Suplementul unghiului cu măsura de 60° este unghiul cu măsura de ....

b) Suplementul unghiului cu măsura de 130° este unghiul cu măsura de ....

c) Suplementul unghiului cu măsura de 70°37′ este unghiul cu măsura de ....

3. a) Două unghiuri se numesc **unghiuri complementare** dacă ....

b) Fiecare dintre cele două unghiuri este .... celuilalt unghi.

c) Dacă două unghiuri complementare sunt congruente, atunci fiecare are măsura egală cu ....

d) Unghiurile care au același complement sunt ....

e) Unghiurile congruente au complementele ....

f) Complementul unui unghi cu măsura de $x°$ este unghiul cu măsura de ....

4. a) Complementul unghiului cu măsura de 60° este unghiul cu măsura de ....

b) Complementul unghiului cu măsura de 17°45′ este unghiul cu măsura de ....

5. Calculați măsurile suplementelor unghiurilor cu măsura egală cu:

a) 74°; b) 117°; c) 54°29′; d) 128°57′.

....

....

6. Calculați măsurile complementelor unghiurilor cu măsura egală cu:

a) 29°; b) 67°; c) 35°14′; d) 76°47′.

....

....

7. Calculați suma măsurilor suplementului și complementului unghiului cu măsura de:

a) 47°; b) 59°31′.

....

....

8. a) Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este $\frac{1}{5}$. Aflați măsurile celor două unghiuri.

b) Raportul măsurilor a două unghiuri suplementare este $\frac{1}{3}$. Aflați măsurile celor două unghiuri.

Soluție: a) Fie x măsura unghiului. Măsura complementului este .... și $\frac{x}{90° - x} = \frac{1}{5} \Rightarrow$ ....

.... , adică măsura unghiului este egală cu ....° și măsura complementului este egală cu ....°.

b) ....

....

....

9. Calculați măsura unui unghi, știind că:

a) este o pătrime din complementul său;
b) este o treime din suplementul său;
c) este dublul complementului său;
d) este triplul suplementului său.

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE