

Maria Zaharia

Caiet de vacanță
Matematică
Clasa a VI-a

**Suport teoretic, exerciții
și probleme aplicative**

Ediția a II-a, revizuită

Editura Paralela 45

I.1 Mușimi

- a) Mușimea este bine determinate și distincte numite

b) Mușimile se notează cu, cu sau fără indici: $A, B, C, \dots, A_1, A_2, A_3, \dots$.

c) Elementele unei mușimi se notează cu : a, b, \dots .

d) Mușimea care nu are nici un element se numește și se notează cu simbolul
- a) Dacă A este o mușime și x este un element al ei, atunci notăm și citim

b) O mușime se numește numerică dacă
- Orice mușime poate fi dată în trei moduri:

a) **explicit**, prin

b) **implicit**,

c) **cu ajutorul unor diagrame Venn–Euler**
- Mușimea numerelor naturale mai mici decât 5 reprezentată:

a) explicit este $M = \dots$

b) printr-o proprietate caracteristică este $M = \dots$

c) cu ajutorul diagramei Venn–Euler este:
- O mușime A se numește:

a) **mușime finită** dacă, de exemplu: mușimea divizorilor numărului 6 este $D_6 \dots$

b) **mușime infinită**, de exemplu: mușimea multiplilor unui număr natural este $M_6 = \dots$
- Numărul de elemente ale unei mușimi A se notează cu și card $D_6 = \dots$

7. a) Două mulțimi A și B sunt egale dacă și notăm în caz contrar spunem că și notăm

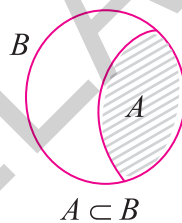
b) Mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x \leq 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$ sunt și notăm

c) Mulțimile $M = \{1, 2, 3\}$ și $N = \{a, b, c\}$ sunt și notăm , însă au același număr de elemente, mai precis card $M = \dots = \dots$.

8. a) O mulțime A este submulțime a mulțimii B dacă

Se notează $A \subseteq B$ și se citește „.....”.

b) Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B , atunci și notăm



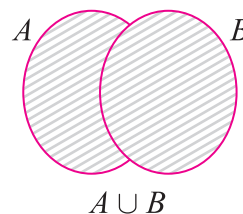
9. a) Mulțimea vidă este submulțime și notăm

b) Orice mulțime este inclusă în ea însăși, adică

c) Mulțimea vidă și mulțimea însăși sunt , restul submulțimilor sunt submulțimi

10. a) Reuniunea a două mulțimi A și B este și scriem $A \cup B = \dots$.

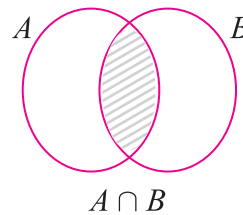
b) Dacă $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cup B = \dots$.



11. a) Intersecția a două mulțimi A și B este și scriem $A \cap B = \dots$.

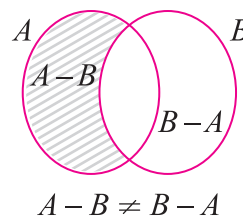
b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cap B = \dots$.

c) Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci A și B se numesc



12. a) Diferența mulțimilor A și B este și scriem $A - B = \dots$.

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A - B = \dots$ și $B - A = \dots$.



13. a) Într-o mulțime fiecare element apare

b) Analizând diagramele de mai jos, avem reprezentată o mulțime în figura

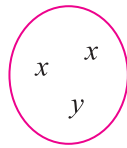


fig. 1

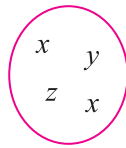


fig. 2

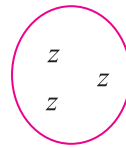


fig. 3

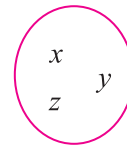


fig. 4

14. a) Submulțimile mulțimii $M = \{a, b, c\}$ sunt

b) Numărul de submulțimi ale unei mulțimi A este

15. Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x^2 \mid x \in A\}$. Scrieți elementele mulțimilor:

$B =$; $A \cup B =$

$A \setminus B =$; $A \cap B =$

16. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Într-o mulțime nu contează ordinea, mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{b, a, c\}$ sunt pentru că sunt formate din

b) Mulțimea literelor din care este format cuvântul „element” este $C =$

c) Mulțimea cifrelor este o mulțime în timp ce mulțimea numerelor naturale este o mulțime

17. Se dă mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N}^*, x \leq 3\}$.

a) Scrieți mulțimea M prin enumerarea elementelor, $M =$

b) Submulțimile improprii ale mulțimii M sunt

c) Submulțimile proprii ale mulțimii M sunt

18. Determinați a , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $\{1, a, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$;

b) $\{1, a, 3\} \subseteq \{1, 3, 4, 5\}$.

19. a) Determinați perechile (x, y) știind că $\{2, x, 4\} \subseteq \{1, 2, y, 3\}$.

b) Determinați perechile (x, y) știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $\{2, 3, 4\} \subset \{3, x, y, 4\}$;

ii) $\{3, x, y, 4\} \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soluție:

20. a) Elementele mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este restul împărțirii oricărui număr natural la } 5\}$ sunt:

b) Între elementul a și mulțimea $M = \{a, b, c\}$ există relația de și notăm

c) Între mulțimile $A = \{1, 2\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3\}$ există relația de ; notăm și spunem că

21. Se consideră mulțimea $M = \{\overline{xy} \in \mathbb{N} \mid \overline{xy} : 23\}$.

a) Elementele mulțimii M sunt

b) Submulțimile lui M formate din câte două elemente sunt

c) Submulțimile lui M formate din câte trei elemente sunt

22. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

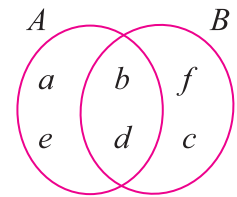
a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \dots x \in B\}$; c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \dots x \notin B\}$;

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \dots x \in B\}$; d) $B \setminus A = \{x \mid x \in B \dots x \notin A\}$.

23. Analizați, cu atenție, diagrama și specificați dacă propozițiile ce urmează sunt adevărate sau false:

$a \in A \cap B \dots$; $b \notin A \cap B \dots$; $\{b, d\} = A \cap B \dots$;

$d \notin A \cap B \dots$; $e \in A \setminus B \dots$; $\{a, c\} \subset A \cup B \dots$.



24. Se consideră două mulțimi oarecare A și B .

a) Dacă $A \cap B = A \cup B$, atunci

b) Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci

25. Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate:

a) Cel mai mare divizor propriu al mulțimii \mathcal{D}_{48} este

b) Cardinalul mulțimii \mathcal{D}_{48} este

c) Cel mai mic element al mulțimii $\mathcal{M}_6 \cap \mathcal{M}_8$ este

d) Din mulțimea \mathcal{M}_8 , elementele de forma \overline{ab} sunt

26. Dacă $A = \{0, 1, 2, 4\}$ și $B = \{0, 2, 5, 6\}$, atunci:

$A \cup B = \dots$; $A \cap B = \dots$;

$A \setminus B = \dots$; $B \setminus A = \dots$.

27. Determinați mulțimile M și N , știind că $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M \cap N = \{2, 3, 4\}$ și $N \setminus M = \{5\}$.

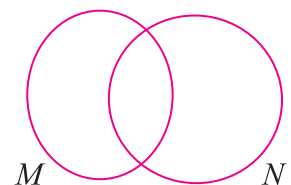
Soluție:

.....

.....

.....

.....





Unghiuri. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf

1. Completați spațiile punctate:

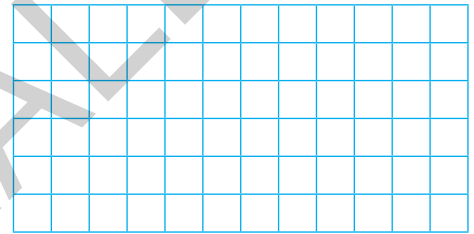
a) Două unghiuri proprii se numesc **unghiuri opuse la vârf** dacă

b) Unghiurile opuse la vârf sunt, adică au aceeași măsură.

2. Desenați două drepte MN și PQ concurente în punctul O .

a) Semidreptele OM și ON , respectiv OP și OQ sunt perechi de

b) Unghiurile MOP și NOQ , respectiv MOQ și NOP sunt unghiuri

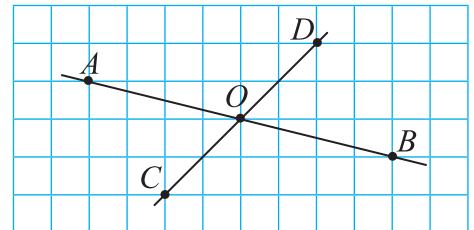


3. În figura alăturată:

a) semidreptele OA și OB sunt semidrepte, înseamnă că $\sphericalangle AOB$ este, adică:
 $\sphericalangle AOD + \sphericalangle DOB = \dots\dots\dots$ sau $\sphericalangle DOB = 180 - \dots\dots\dots$ (1)

b) semidreptele OC și OD sunt semidrepte, înseamnă că $\sphericalangle COD$ este, adică:
 $\sphericalangle AOD + \sphericalangle AOC = \dots\dots\dots$ sau $\sphericalangle AOC = 180 - \dots\dots\dots$ (2)

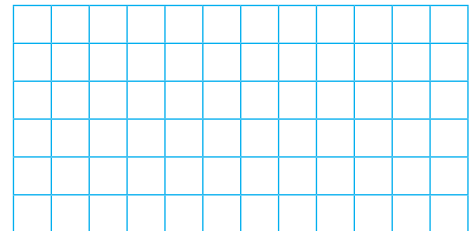
c) Din (1) și (2) se constată că unghiurile DOB și AOC sunt și notăm



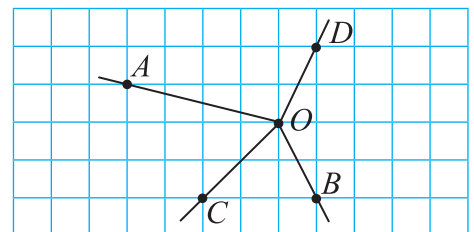
4. a) Desenați două drepte MN și PQ concurente în punctul O , astfel încât măsura unghiului MOP să fie de 45° .

b) Măsurile unghiurilor MOQ , NOQ și PON sunt egale cu

c) Unghiurile opuse la vârf din figura obținută sunt și

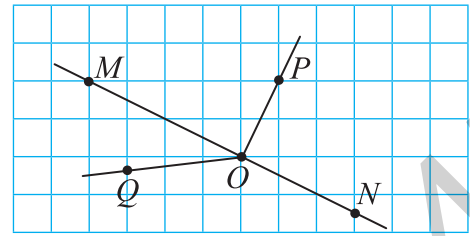


5. Observați figura alăturată și completați: Unghiurile AOD și BOC , respectiv AOC și BOD sunt perechi de unghiuri care deoarece semidreptele OA și OB , respectiv OC și OD nu sunt



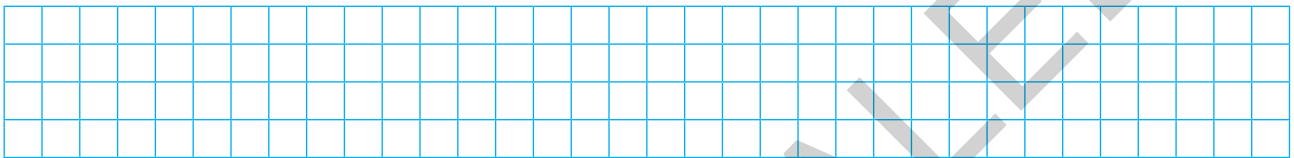
6. Analizați cu atenție figura alăturată și completați:

- a) semidreptele OM și ON sunt ;
 b) semidreptele OP și OQ semidrepte opuse;
 c) unghiurile POM și QON , respectiv PON și QOM sunt unghiuri care la vârf și ale căror laturi o singură pereche de

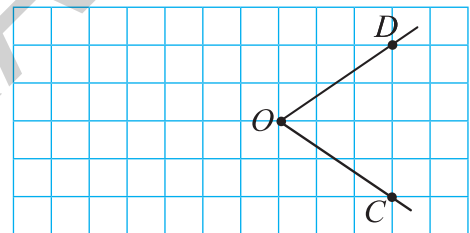


7. Calculați măsurile unghiurilor determinate de două drepte concurente, știind că unul dintre ele are măsura egală cu:

- a) 60° ; b) 100° ; c) 80° ; d) 90° .



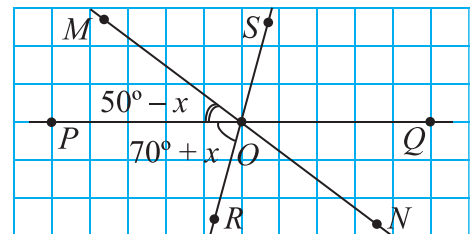
8. Mihai dorește să măsoare unghiul COD din figura alăturată, dar, așa cum este desenat unghiul, gradațiile raportorului depășesc marginea caietului. Ce ar trebui să facă Mihai?



.....

9. Analizați cu atenție figura alăturată.

- a) Calculați măsura unghiului SOM .
 b) Dacă măsura unghiului POR este dublul măsurii unghiului POM , calculați măsurile unghiurilor: RON , QON , QOS .



.....

10. Se consideră două drepte a și b , concurente în punctul O . Calculați măsura fiecărui unghi cu vârful în punctul O , știind că:

- a) suma măsurilor a două dintre unghiuri este egală cu 140° ;
 b) suma măsurilor a trei dintre unghiuri este egală cu 225° .

.....



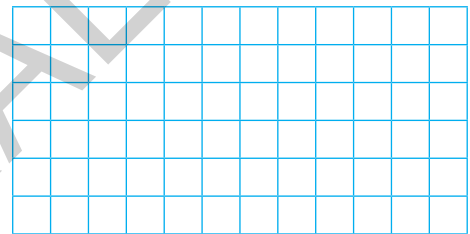


Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct

1. Numim **unghiuri în jurul unui punct O** care au proprietățile:
- toate au, punctul O ;
 - orice punct al planului care nu aparține niciuneia dintre laturile lor

Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este egală cu 360° .

2. Unghiurile AOB , COB și COA sunt unghiuri în jurul unui punct. Știind că măsura unghiului BOC este dublul măsurii unghiului AOB și cu 10° mai mică decât măsura unghiului AOC , calculați măsurile unghiurilor.

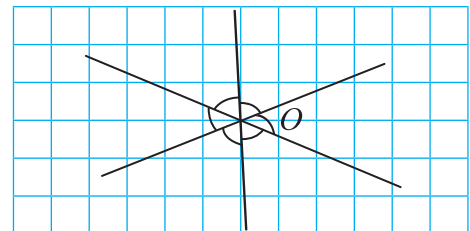


Soluție: Fie $\sphericalangle AOB = x^\circ \Rightarrow \sphericalangle BOC = \dots$
și $\sphericalangle AOC = \dots$. Dar suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este egală cu $\dots^\circ \Rightarrow \dots$

3. Aflați măsurile a cinci unghiuri în jurul unui punct, știind că acestea sunt exprimate prin numere naturale consecutive.

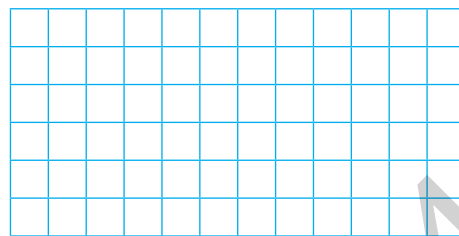
Soluție: Fie x , $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ și $x + 4$ măsurile celor cinci unghiuri în jurul unui punct. Avem:
 $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots = \dots$
 $\Rightarrow \dots$

4. Unghiurile marcate pe figura alăturată sunt congruente.
- Notați figura.
 - Suma măsurilor unghiurilor marcate pe figură este egală cu \dots° , deoarece unghiurile



- Măsura fiecărui unghi din figură este egală cu

5. Calculați măsurile unghiurilor formate de două drepte concurente, știind că diferența măsurilor a două dintre ele este de 30° .



6. Se consideră patru drepte concurente într-un punct O . Patru dintre cele opt unghiuri care nu au puncte interioare comune au măsurile de x° , $x^\circ - 10^\circ$, $x^\circ + 10^\circ$, $3x^\circ$.

- Realizați un desen care să illustreze situația.
- Calculați măsurile unghiurilor.
- Verificați dacă în jurul punctului O există unghiuri drepte. Numiți-le!

7. Calculați ce unghi descrie:

- minutarul (limba mare) unui ceas în 20 de minute;
- orarul (limba mică) unui ceas într-o oră.



8. În jurul unui punct O se consideră patru unghiuri care nu au puncte interioare comune, cu măsurile de $2x^\circ + 20^\circ$, $3x^\circ - 20^\circ$, $4x^\circ - 10^\circ$, $3x^\circ + 10^\circ$.

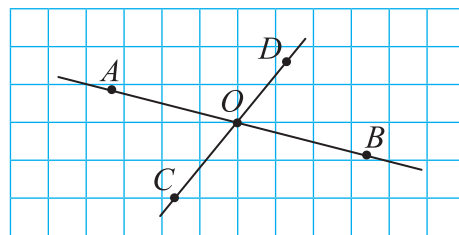
- Calculați măsurile unghiurilor.
- Realizați un desen care să illustreze datele problemei.
- În jurul punctului O există unghiuri obtuze? Numiți-le!

9. Analizați figura alăturată.

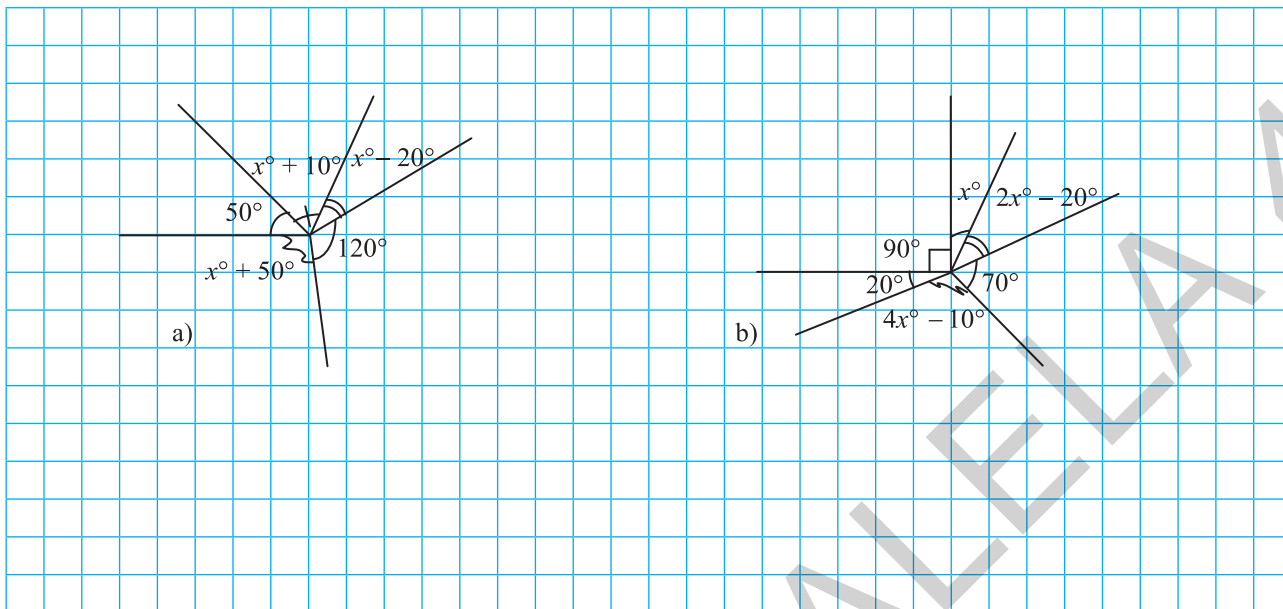
a) Unghiurile formate în jurul punctului O sunt:

b) Unghiurile opuse la vârf din figura alăturată sunt:

c) Dacă măsura unghiului AOC este egală cu 50° , atunci măsurile celorlalte unghiuri din figură sunt egale cu:



10. Studiați cu atenție figurile de mai jos și calculați măsurile unghiurilor necunoscute.



Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare

1. a) Două unghiuri se numesc **unghiuri suplementare** dacă
-
- b) Fiecare dintre cele două unghiuri este celuilalt unghi.
- c) Dacă două unghiuri suplementare sunt congruente, atunci fiecare are măsura egală cu, adică fiecare unghi este
- d) Unghiurile care au același suplement sunt
- e) Unghiurile congruente au suplementele
- f) Suplementul unui unghi cu măsura de x° este unghiul cu măsura de
2. a) Suplementul unghiului cu măsura de 60° este unghiul cu măsura de
- b) Suplementul unghiului cu măsura de 130° este unghiul cu măsura de
- c) Suplementul unghiului cu măsura de $70^\circ 37'$ este unghiul cu măsura de
3. a) Două unghiuri se numesc **unghiuri complementare** dacă
-
- b) Fiecare dintre cele două unghiuri este celuilalt unghi.

- c) Dacă două unghiuri complementare sunt congruente, atunci fiecare are măsura egală cu
- d) Unghiurile care au același complement sunt
- e) Unghiurile congruente au complementele
- f) Complementul unui unghi cu măsura de x° este unghiul cu măsura de

4. a) Complementul unghiului cu măsura de 60° este unghiul cu măsura de
- b) Complementul unghiului cu măsura de $17^\circ 45'$ este unghiul cu măsura de

5. Calculați măsurile suplementelor unghiurilor cu măsura egală cu:
- a) 74° ; b) 117° ; c) $54^\circ 29'$; d) $128^\circ 57'$.

6. Calculați măsurile complementelor unghiurilor cu măsura egală cu:
- a) 29° ; b) 67° ; c) $35^\circ 14'$; d) $76^\circ 47'$.

7. Calculați suma măsurilor suplementului și complementului unghiului cu măsura de:
- a) 47° ; b) $59^\circ 31'$.

8. a) Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este $\frac{1}{5}$. Aflați măsurile celor două unghiuri.
- b) Raportul măsurilor a două unghiuri suplementare este $\frac{1}{3}$. Aflați măsurile celor două unghiuri.

Soluție: a) Fie x măsura unghiului. Măsura complementului este și $\frac{x}{90^\circ - x} = \frac{1}{5} \Rightarrow$, adică măsura unghiului este egală cu $^\circ$ și măsura complementului este egală cu $^\circ$.

b)

9. Calculați măsura unui unghi, știind că:
- a) este o pătrime din complementul său; b) este o treime din suplementul său;
- c) este dublul complementului său; d) este triplul suplementului său.



Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1.1. Mulțimi	5
1.2. Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime. Determinarea celui mai mare divizor comun și celui mai mic multiplu comun. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale	9

Capitolul II. RAPOARTE ȘI PROPORȚII

2.1. Rapoarte	15
2.2. Titlul unui aliaj	17
2.3. Concentrația unei soluții	17
2.4. Scara unui desen	18
2.5. Procent	20
2.6. Proporții	22
2.7. Mărimi direct proporționale	23
2.8. Mărimi invers proporționale	25
2.9. Regula de trei simplă	27
2.10. Elemente de organizare a datelor. Probabilități	29

Capitolul III. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

3.1. Număr întreg. Reprezentarea pe axa numerelor. Opusul și modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi	33
3.2. Operații cu numere întregi	36
3.3. Ecuații, inecuații și probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau inecuațiilor în contextul numerelor întregi	43

Capitolul IV. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

4.1. Număr rațional. Reprezentarea pe axa numerelor. Opusul și modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale	49
4.2. Operații cu numere raționale	54
4.3. Ecuații în mulțimea numerelor raționale. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	63

GEOMETRIE

Capitolul V. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

5.1. Unghiuri. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf	70
5.2. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct.....	72
5.3. Unghiuri suplimentare. Unghiuri complementare	74
5.4. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi	76



5.5. Drepte paralele. Construcție intuitivă prin translație. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă	81
5.6. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism	84
5.7. Drepte perpendiculare în plan. Oblice. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice. Distanța de la un punct la o dreaptă.....	89
5.8. Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment. Simetria față de o dreaptă.....	93
5.9. Cerc. Arc de cerc. Unghi la centru. Măsuri	97
5.10. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri.....	101

Capitolul VI. TRIUNGHIUL

6.1. Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului.....	104
6.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi	108
6.3. Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului	111
6.4. Linii importante în triunghi	
6.4.1. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi. Cerc înscris în triunghi.....	115
6.4.2. Mediatoarele laturilor unui triunghi. Cerc circumscris unui triunghi	118
6.4.3. Înălțimile unui triunghi. Ortocentrul triunghiului	121
6.4.4. Medianele unui triunghi. Centrul de greutate al triunghiului	123
6.5. Congruența triunghiurilor oarecare. Criterii de congruență a triunghiurilor: LUL, ULU, LLL	127
6.6. Congruența triunghiurilor dreptunghice. Criterii de congruență a triunghiurilor dreptunghice: CC, IC, CU, IU	130
6.7. Metoda triunghiurilor congruente. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment	133
6.8. Proprietăți ale triunghiului isoscel. Proprietăți ale triunghiului echilateral.....	139
6.9. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic. Teorema lui Pitagora	147

TESTE RECAPITULATIVE

TESTUL 1.....	154
TESTUL 2.....	155
TESTUL 3.....	156
TESTUL 4.....	158
TESTUL 5.....	160
TESTUL 6	161

SOLUȚII	163
----------------------	-----