

CAIET DE ACTIVITĂȚI

LITERA

Dorin Lint

Maranda Lint

Mariana Mitea

Lucian Pițu

7

Matematică

CLASA A VII-A

CUPRINS

RECAPITULAREA MATERIEI DIN CLASA A VI-A, PRIN TESTE	5		
TESTUL 1	5		
TESTUL 2	6		
TESTUL 3	7		
1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE	8		
1.1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv. Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv	8		
A. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural	9		
B. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional pozitiv	11		
C. Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv	13		
1.2. Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	15		
1.3. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical	17		
A. Scoaterea factorilor de sub radical	17		
B. Introducerea factorilor sub radical	18		
1.4. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, prin aproximări. Compararea și ordonarea numerelor reale. Modulul unui număr real	19		
A. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, prin aproximări	20		
B. Compararea și ordonarea numerelor reale	21		
C. Modulul unui număr real	22		
1.5. Operații cu numere reale. Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$	23		
A. Adunarea numerelor reale	24		
B. Înmulțirea numerelor reale	26		
C. Ridicarea la putere a unui număr real	27		
D. Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$	28		
E. Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale	29		
1.6. Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$. Media geometrică a două numere reale pozitive	32		
A. Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$	32		
B. Media geometrică a două numere reale pozitive	34		
1.7. Ecuații de forma $x^2 = a$, unde a este un număr real	35		
2. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE	37		
2.1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități	37		
2.2. Ecuații de forma $a \cdot x + b = 0$, unde a și b sunt numere reale. Ecuații reducibile la ecuații de această formă	38		
2.3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute. Rezolvarea prin metoda substituției și/sau prin metoda reducerii	41		
A. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute	42		
B. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin metoda substituției sau/si metoda reducerii	42		
2.4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare	45		
3. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR	49		
3.1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan	49		
A. Produsul cartezian a două mulțimi nevide	50		
B. Sistem de axe ortogonale	50		
3.2. Dependențe funcționale	52		
4. PATRULATERE	55		
4.1. Patrulater convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex	55		
4.2. Paralelogramul. Proprietăți. Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului	57		
A. Paralelogramul. Proprietăți	57		
B. Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului	60		
4.3. Paralelorame particulare: dreptunghi, romb, pătrat	61		
A. Dreptunghiul	62		
B. Rombul	65		
C. Pătratul	67		
4.4. Trapezul. Clasificare, proprietăți, linia mijlocie a unui trapez	69		
A. Trapezul. Clasificare, proprietăți	69		
B. Linia mijlocie a unui trapez	73		
4.5. Perimetre și arii	74		
5. CERCUL	77		
5.1. Unghi înscris în cerc. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc	77		
A. Arce și coarde	77		
B. Unghi la centru	79		
C. Unghi înscris în cerc	80		
D. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc	81		
5.2. Poligoane regulate înscrise în cerc	83		
5.3. Lungimea cercului și aria discului	85		
6. ASEMĂNAREA TRIUNGHURIILOR	87		
6.1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante	87		
A. Segmente proporționale	87		
B. Teorema paralelelor echidistante	88		
6.2. Teorema lui Thales. Reciproca teoremei lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere date	89		
A. Teorema lui Thales	89		
B. Reciproca teoremei lui Thales	91		
C. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere date	92		
6.3. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării, criterii de asemănare	93		
A. Triunghiuri asemenea	94		
B. Teorema fundamentală a asemănării	95		
C. Criterii de asemănare	96		
7. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIIUL DREPTUNGHIC	99		
7.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii. Teorema catetei	99		
A. Proiecții ortogonale pe o dreaptă	99		
B. Teorema înălțimii	100		
C. Teorema catetei	101		
7.2. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora	102		
A. Teorema lui Pitagora	102		
B. Reciproca teoremei lui Pitagora	103		
7.3. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic	104		
7.4. Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Aplicații	106		
A. Rezolvarea triunghiului dreptunghic	107		
B. Aplicații ale triunghiului dreptunghic în determinarea unor elemente ale poligoanelor regulate	108		
RECAPITULARE FINALĂ ȘI PROBLEME DE SINTEZA	111		
Lucrare scrisă la matematică semestrul I (model)	115		
Lucrare scrisă la matematică semestrul al II-lea (model)	119		
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	123		

RECAPITULAREA MATERIEI DIN CLASA A VI-A, PRIN TESTE

TESTUL 1

Citiți cu atenție enunțurile, faceți raționamentele, efectuați calculele necesare. Alegeți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.		Alegeți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.					
		A	B	C	D		
5 p	1. Calculând $22 - 222 + 202 - 2002$, se obține:	- 1900	- 2000	- 2002	- 2020		
5 p	2. Dacă $\frac{x}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{y}$, atunci $x \cdot y - 6$ este:	- 2	- 3	- 4	- 5		
5 p	3. Un stilou costă 40 lei. După o scumpire cu 10% va costa:	45 lei	44 lei	42 lei	50 lei		
5 p	4. Dacă 6 muncitori construiesc un zid în 4 zile, atunci 4 muncitori vor construi un zid de aceeași dimensiuni în:	5 zile	6 zile	7 zile	8 zile		
5 p	5. Soluția ecuației $6 \cdot (x + 6) + 4 = -4 \cdot (x - 4) - 6$ este:	- 3	- 2	- 4	- 1		
5 p	6. Un unghi al triunghiului ABC are măsura egală cu media aritmetică a măsurilor celorlalte unghiuri. Măsura acestuia este:	50°	60°	90°	40°		
5 p	7. Mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{5}{x-4} \in \mathbb{N} \right\}$ este:	{5, 9}	{1, 5, 9}	{1, 9}	{1, 5}		
5 p	8. Dreptele a și b sunt paralele și c este o secantă. Numărul x este:			47°	45°	41°	37°
5 p	9. Raportul numerelor x și y este $\frac{2}{3}$. Aflați numerele știind că $3 \cdot x + 7 \cdot y = 216$.						
	10. Fie numărul $A = 7 \cdot 3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2}$, $x \in \mathbb{N}$.						
5 p	a) Aflați numărul A pentru $x = 1$ și $x = 2$.						
5 p	b) Arătați că A este divizibil cu 13, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$.						
5 p	c) Determinați numărul x pentru care A este număr prim.						
	11. În triunghiul ABC , BD este bisectoarea unghiului ABC , $D \in AC$ și $DE \parallel AB$, $E \in BC$.						
10 p	a) Arătați că triunghiul BDE este isoscel.						
10 p	b) Dacă $\sphericalangle ADB = 67^\circ$ și $\sphericalangle CDE = 69^\circ$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .						
10 p	12. Triunghiul MNP este dreptunghic, $\sphericalangle N = 90^\circ$, $\sphericalangle M = 2 \cdot \sphericalangle P$ și $MP = 20$ cm. Calculați perimetrul triunghiului MNA , punctul A fiind mijlocul segmentului MP .						

Se acordă 10 puncte din oficiu.

TESTUL 2

Citiți cu atenție enunțurile, faceți raționamentele și efectuați calculele necesare.		Alegeți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.			
		A	B	C	D
5 p	1. Mulțimea $\{1, 3, 4, 7\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 9\}$ este:	{3, 4, 7, 8}	{3, 4, 7}	{3, 4}	{4, 7}
5 p	2. Dacă $\frac{(-7)^2}{3x+2} = \frac{1}{5}$, atunci x este egal cu:	81	82	83	84
5 p	3. Un telefon costă 520 lei. După o reducere de 30%, noul preț va fi:	345 lei	346 lei	364 lei	354 lei
5 p	4. Calculând $[-5 \cdot 4 + (-8) \cdot 2] : 6 + 10$, se obține:	5	4	7	3
5 p	5. Scris ca fracție zecimală, numărul $\left(\frac{10}{3} + \frac{5}{2} : 2\right) : \frac{5}{3} - \frac{5}{4}$ este:	1,3	1,4	1,5	1,6
5 p	6. Complementul unghiului cu măsura de 53° are măsura:	47°	37°	127°	137°
5 p	7. Media aritmetică a numerelor 1,23; 2,34 și 3,45 este:	3,33	3,34	3,35	3,36
5 p	8. Triunghiul ABC este dreptunghic, $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm. Perimetrul triunghiului ABC este:	12 cm	15 cm	16 cm	10 cm
5 p	9. Un automobil s-a deplasat timp de două ore cu viteza de 80 km/h și, timp de o oră, cu viteza de 90 km/h. Calculați viteza medie cu care s-a deplasat automobilul.				
	10. Suma numerelor a și b este 63.				
10 p	a) Aflați numerele știind că sunt direct proporționale cu 3 și 4.				
5 p	b) Aflați numerele știind că sunt invers proporționale cu 3 și 4.				
	11. ABC este un triunghi echilateral. Se prelungește latura BC cu $CD = BC$.				
10 p	a) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABD .				
10 p	b) Dacă E este mijlocul segmentului AD , demonstrați că $CE \parallel AB$.				
10 p	12. În triunghiul ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, iar AD este înălțime a triunghiului, $D \in BC$. Demonstrați că $DC = 3 \cdot BD$.				

Se acordă 10 puncte din oficiu.

TESTUL 3

Citiți cu atenție enunțurile, faceți raționamentele și efectuați calculele necesare.		Alegeți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.			
		A	B	C	D
5 p	1. Cel mai mare dintre numerele $a = -3,31$, $b = -3,32$, $c = -\frac{10}{3}$, $d = -\frac{33}{10}$, este:	a	b	c	d
5 p	2. $\frac{a}{b} = 0,125$ și $\frac{a}{b}$ este o fracție ordinară ireductibilă. Atunci $a + b =$	8	9	10	11
5 p	3. Opusul numărului $-3 - (-33) - (-333)$ este:	300	330	333	363
5 p	4. Calculând $-\frac{4}{7} + \frac{6}{5} + \left(-\frac{31}{25}\right) + \frac{12}{21} + \frac{1}{25}$, se obține:	0	2	-2	3
5 p	5. 40% dintre elevii unei clase sunt băieți. Dacă în clasă sunt 30 de elevi, numărul fetelor este:	16	18	17	19
5 p	6. Un triunghi isoscel cu un unghi de 150° are celelalte unghiuri de măsură:	10°	15°	20°	30°
5 p	7. Suplementul unghiului de măsură 82° , are măsura de:	108°	8°	98°	102°
5 p	8. În triunghiul ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, AD este înălțime, AM este mediană, $D, M \in BC$ și $BD = DM$. Dacă $MC = 4$ cm, atunci $AB =$	4 cm	6 cm	8 cm	2 cm

10 p	9. Fie numărul $a = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 : 0,25 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 : 0,(037)$. Aflați numărul a și stabiliți dacă este pozitiv, negativ sau nul.
10 p	10. Media aritmetică a numerelor a și b este 3, iar unul dintre ele este cu 1,5 mai mare decât celălalt. a) Aflați cele două numere.
5 p	b) Arătați că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{7}{10}$.
10 p	11. Punctul D aparține laturii AC a triunghiului ABC , $BD = DC$ și $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$. a) Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.
5 p	b) Dacă $\sphericalangle ADB = 56^\circ$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .
10 p	12. În triunghiul DEF , $\sphericalangle E = \sphericalangle F = 30^\circ$, iar M este simetricul punctului E față de dreapta DF . Demonstrați că triunghiul MEF este echilateral.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

1.1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv. Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv

Breviar teoretic

Definiție

Dacă x este pătrat perfect, atunci numărul natural n cu proprietatea $x = n^2$ se numește *rădăcina pătrată a numărului x* sau *radicalul de ordin 2 al numărului x* .

Se notează $\sqrt{x} = n$.

- $\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2$, unde $x \in \mathbb{N}$ este pătrat perfect și $n \in \mathbb{N}$.
- $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$; $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, $y \neq 0$, unde $x, y \in \mathbb{N}$ sunt pătrate perfecte.
- $\sqrt{n^2} = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiție

Dacă x este pătratul unui număr rațional, atunci numărul rațional pozitiv a cu proprietatea $x = a^2$ se numește *rădăcina pătrată a numărului x* sau *radicalul numărului x* . Vom scrie $\sqrt{x} = a$.

- Oricare ar fi numerele x și y , pătrate ale unor numere raționale, $y \neq 0$, avem:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y} \text{ și } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

- Pentru orice număr rațional $x \geq 0$, există rădăcina pătrată \sqrt{x} .
- Pentru $a \geq 0$ avem $\sqrt{x} = a$ dacă și numai dacă $x = a^2$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}$.

Estimarea este o evaluare a unei cantități, având uneori date incomplete sau insuficiente.

Dacă pentru efectuarea unui calcul folosim aproximări ale numerelor care intervin, atunci vom obține **o estimare** a rezultatului corect.

- Dacă $n^2 \leq x < (n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}$, atunci $n \leq \sqrt{x} < n+1$.
- Dacă $x = \frac{y}{10^{2n}}$ cu $y, n \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{y}}{10^n}$.

A Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

- 1 Scrieți numerele 16, 49, 196, 256, 529, 900, 1024, 1225, 1600, 3969, 10000 ca pătrate ale unor numere naturale și determinați rădăcina pătrată a acestora, după modelul:

n	16	49	196	256	529	900
$n = a^2$	4^2					
\sqrt{n}	4					

n	1024	1225	1600	3969	10000
$n = a^2$					
\sqrt{n}					

- 2 Se consideră următoarele numere naturale: 46, 81, 136, 317, 324, 441, 500, 625, 841, 1000, 1296, 2222, 7056. Alegeți dintre acestea doar pătratele perfecte și determinați rădăcina pătrată a fiecăruia. Scrieți rezultatele într-un tabel precum cel din problema precedentă.

- 3 Calculați:

$$4. \sqrt{25}, \sqrt{64}, \sqrt{289}, \sqrt{27^2}, \sqrt{123^2}, \sqrt{(-19)^2}.$$

- 4 Scrieți numerele $5^4 \cdot 10^6$; $2^2 \cdot 3^{10}$; $2^6 \cdot (-3)^4$; $3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^6$; $2^{100} \cdot 2^{80}$; $3^{200} \cdot (-3)^{188}$ ca pătrate perfecte, apoi găsiți rădăcina pătrată a fiecăruia, după modelul:

$$5^4 \cdot 10^6 = (5^2)^2 \cdot (10^3)^2 = (5^2 \cdot 10^3)^2$$

$$\sqrt{5^4 \cdot 10^6} = \sqrt{(5^2 \cdot 10^3)^2} = |5^2 \cdot 10^3| = 5^2 \cdot 10^3$$

- 5 Pentru fiecare n natural se considera mulțimea $S_n = \{7^2, 3^4, 5^6, 2^9, 10^7, 100^3, 2^{2 \cdot n}, 9^n, 7^4 \cdot n, 11^{6 \cdot n + 3}\}$. Determinați mulțimile:

$$A = \{x \in S / x = a^2, a \in \mathbb{N}\} \text{ și } B = \{\sqrt{x} / x \in A\}.$$

- 6 Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare propoziție. Scrieți A , în căsuța corespunzătoare din tabel, dacă propoziția este adevărată și F dacă propoziția este falsă.

Propoziția	A/F
$p_1: \sqrt{100} = 10$	
$p_2: \sqrt{221} = 11$	
$p_3: \sqrt{2^7} \cdot 2 = 2^3$	
$p_4: \sqrt{a^2} = a$ oricare ar fi numărul natural a .	
$p_5: \sqrt{b^2} = b$, oricare ar fi numărul întreg b .	
$p_6: \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 9} = 9$	
$p_7: \sqrt{(-5)^2} = -5$	
$p_8: \sqrt{(-6)^2} = 6$	
$p_9: \sqrt{(-17)^2} = -17 $	
$p_{10}: \sqrt{(-2)^2 \cdot (-3)^4} = -2 \cdot (-3)^2$	

- 7 Descompuneți în factori și scrieți rădăcina pătrată a fiecăruia dintre numerele: 441; 5184; 11664; 50625; $10 \cdot 2 \cdot 5^3$; $6^3 \cdot 2^5 \cdot 3$; $12 \cdot 3^{13}$; $14 \cdot 2^{2 \cdot n - 1} \cdot 7^4 \cdot m^3$, $n, m \in \mathbb{N}$.

- 8 Calculați:

a) $\sqrt{676}, \sqrt{784}, \sqrt{3025}, \sqrt{10404}, \sqrt{12321}, \sqrt{18225}, \sqrt{104976}$

b) $\sqrt{5^2 + 12^2}, \sqrt{7^{10} + 3 \cdot 7^{10}}, \sqrt{18 \cdot 2^{33}}, \sqrt{9 \cdot 4^{10} + 2^{24}}$

- 9 Calculați:

$$\sqrt{121 \cdot 361}, \sqrt{400 \cdot 169}, \sqrt{144 \cdot 225 \cdot 289}.$$

- 10 Efectuați calculele necesare și încercuiți, pentru fiecare radical, rezultatul corect:

Numărul	a)	b)	c)
$\sqrt{36} =$	6	18	72
$\sqrt{(-3)^2} =$	9	-3	3
$\sqrt{2 \cdot 2^3 \cdot 2^6} =$	8	2^5	2^4
$\sqrt{48+16 \cdot 21+2^7 \cdot 15} =$	64	48	56

- 11 a) Determinați valorile numărului natural n pentru care $\sqrt{7-n}$ este număr natural.

- b) Determinați valorile numărului natural m pentru care $\sqrt{\frac{36}{m-1}}$ este număr natural.

- 12 Determinați numărul natural n pentru fiecare din situațiile:

- a) $n^2 = 16$; b) $n^2 = 784$
 c) $n^4 = 256$; d) $n^4 = 3^{12}$.

- 13 Determinați numărul întreg m știind că:

- a) $m^2 = 25$ și $m > 0$; b) $m^2 = 225$ și $m < 0$
 c) $m^2 = 289$; d) $m^4 - 2^{19} = 2^{19}$.

- 14 Determinați numărul întreg p pentru care:

- a) $\sqrt{p} = 15$ b) $\sqrt{p} = 27$
 c) $\sqrt{p-3} = 21$ d) $\sqrt{3 \cdot p+7} = 31$

- 15 Efectuați calculele:

- a) $\sqrt{64} + \sqrt{36}$
 b) $\sqrt{144} - \sqrt{81}$
 c) $\sqrt{9} - 2 \cdot \sqrt{49} + 3 \cdot \sqrt{169}$
 d) $\sqrt{49} + 2 \cdot (\sqrt{16} + \sqrt{196} - \sqrt{900})$
 e) $\sqrt{400} : (\sqrt{256} - \sqrt{324}) + \sqrt{1}$
 f) $\sqrt{1444} : (1 - \sqrt{400}) + \sqrt{18+17 \cdot 18}$

- 16 Camera Soniei are formă dreptunghiulară, cu dimensiunile de 6 m și 4 m. Podeaua camerei este acoperită complet cu parchet, format din plăci pătratice cu latura de \overline{ab} cm. Aflați dimensiunile unei plăci de parchet. Câte soluții are problema?

- 17 Efectuați calculele:

- a) $\sqrt{2^2} + \sqrt{2^4}$
 b) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4} - \sqrt{2^4 \cdot 3^2}$
 c) $\sqrt{(-3)^2} - \sqrt{(-5)^2} + \sqrt{(-7)^4}$
 d) $\sqrt{4^2 \cdot 1^5} + \sqrt{2 \cdot (-4) \cdot (-50)}$
 e) $\sqrt{36-4 \cdot (-16)} : (\sqrt{(-10)^2} - \sqrt{162-81})$
 f) $\sqrt{361} - \sqrt{225} : \sqrt{(-5)^2} : (-3)$

- 18 Completați spațiile punctate cu unul dintre semnele „=” sau „≠”, așa încât să obțineți propoziții adevărate:

- a) $\sqrt{3^2+4^2} \dots 3+4$
 b) $\sqrt{13^2-12^2} \dots 13-12$
 c) $\sqrt{33^2+0^2} \dots 33+0$
 d) $\sqrt{27^2-0^2} \dots 27-0$
 e) $\sqrt{7^2+24^2} \dots 7+24$
 f) $\sqrt{(-6)^2+(-8)^2} \dots -6-8$
 g) $\sqrt{6^2+8^2+24^2} \dots 6+8+24$
 h) $\sqrt{25^2-15^2-12^2} \dots 25-15+6$

- 19 Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 500\}$.

Determinați mulțimile: $A = \{x \in M \mid x = a^2, a \in \mathbb{Z}\}$,
 $B = \{y \mid y = \sqrt{x}, x \in A\}$ și $C = \{z \mid z \in B, z:5\}$.

- 20 Calculați latura unui pătrat cu aria de 1024 cm^2 .

- 21 Un pătrat magic este format din 1296 de pătrățele. Aflați numărul pătrățelelor situate pe „un rând” al pătratului magic.

B Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional pozitiv

1 Scrieți în tabel următoarele numere ca pătrate ale unor numere raționale și găsiți rădăcina pătrată a fiecăruia, după model:

n	$\frac{9}{4}$	0,04	$\frac{81}{25}$	1,21	$\frac{100}{169}$
$n = a^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$(0,2)^2$			
\sqrt{n}	$\frac{3}{2}$	0,2			

n	10,24	4,41	$\frac{324}{625}$	$\frac{9}{729}$	23,04	0,0225
$n = a^2$						
\sqrt{n}						

2 Se consideră următoarele numere raționale: $\frac{1}{9}$; $\frac{64}{199}$; 75,69; 12,34; $-\frac{1}{4}$; $\frac{961}{36}$; 0,36; $\frac{625}{125}$; -0,25; 4,3; $\frac{441}{144}$; 5,0625; 20,19. Alegeți dintre aceste numere doar pe cele care sunt pătrate ale unor numere raționale și determinați rădăcina pătrată a fiecăruia. Scrieți rezultatele într-un tabel precum cel din problema precedentă.

3 Calculați: $\sqrt{\frac{4}{49}}$; $\sqrt{\frac{1}{400}}$; $\sqrt{0,64}$; $\sqrt{2,56}$;

$$\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2}; \sqrt{10,3^4}; \sqrt{(-1,7)^2}.$$

4 Scrieți numerele: 3,24; $\frac{576}{25}$; 1,96; $\frac{900}{121}$; 0,0001; $\frac{2^2}{11^2}$; $3^4 : 5^2$; 56,25; $\frac{363}{12}$; $2^{100} : 2^{108}$, ca pătrate ale unor numere raționale, apoi extrageți rădăcina pătrată, după modelul:

$3,24 = 1,8^2$	$\sqrt{3,24} = \sqrt{(1,8)^2} = 1,8 = 1,8$
$\frac{576}{25} = \frac{24^2}{5^2} = \left(\frac{24}{5}\right)^2$	$\sqrt{\frac{576}{25}} = \sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2} = \left \frac{24}{5}\right = \frac{24}{5}$

5 a) Determinați valorile numărului natural n pentru care $\sqrt{\frac{12-n}{2}}$ este număr natural.

b) Determinați valorile numărului natural m pentru care $\sqrt{\frac{30-m}{4}}$ este număr rațional.

6 Fie x și y pătratele unor numere raționale nenule.

a) Folosind formula $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$, calculați:

$$\sqrt{0,64 \cdot 81}; \sqrt{0,01 \cdot 2025}; \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 5^4}; \sqrt{\frac{3}{27} \cdot (-4)^2}$$

b) Folosind formula $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, calculați: $\sqrt{\frac{81}{289}}$;

$$\sqrt{0,4}; \sqrt{18\frac{7}{9}}; \sqrt{\frac{14,4}{4,9}}; \sqrt{2,5 : 0,4}; \sqrt{\frac{45}{80}}.$$

7 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor. Completați în tabel A, dacă propoziția este adevărată și F, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	A/F
$p_1: \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}$	
$p_2: \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{25}$	
$p_3: \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$, oricare ar fi numerele naturale nenule a și b .	
$p_4: \sqrt{\left(\frac{c}{d}\right)^2} = \frac{c}{d}$, oricare ar fi numerele întregi nenule c și d	
$p_5: \sqrt{0,04} = -0,2$	
$p_6: \sqrt{(-0,1)^2} = 0,01$	
$p_7: \sqrt{0,000001} = 10^{-3}$	
$p_8: \sqrt{0,1 \cdot 0,9} = 0,36$	
$p_9: \sqrt{(-3,1)^4} = -3,1 $	
$p_{10}: \sqrt{30\frac{1}{4}} = \frac{11}{2}$	

8 Calculați:

a) $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{9}}$; b) $\sqrt{0,16} + \sqrt{0,25}$;
 c) $\sqrt{\frac{1}{64}} + \sqrt{\frac{1}{144}}$; d) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{64}{81}}$.

9 Calculați și încercuiți răspunsul corect:

Numărul	a)	b)	c)
$\sqrt{\frac{36}{169}} =$	$\frac{6}{15}$	$\frac{18}{13}$	$\frac{6}{13}$
$\sqrt{\left(-\frac{3}{10}\right)^2} =$	$\frac{9}{100}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
$\sqrt{\frac{2^4}{25}} =$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{5}$
$\sqrt{0,01 + 3 \cdot 0,01} =$	0,02	0,2	0,3

10 Calculați:

$$\sqrt{\frac{1764}{9801}}; \sqrt{\frac{54756}{4356}}; \sqrt{\frac{14641}{366025}}$$

11 Calculați:

a) $\sqrt{756,25}$; b) $\sqrt{2134,44}$;
 c) $\sqrt{2756,25}$; d) $\sqrt{0,01}$;
 e) $\sqrt{0,0144}$; f) $\sqrt{0,000289}$.

12 Efectuați calculele:

a) $\sqrt{\frac{2^6}{3^4}}$; b) $\sqrt{\frac{18}{2 \cdot 5^4}}$;
 c) $\sqrt{\frac{9^2 + 12^2}{12^2 + 16^2}}$; d) $\sqrt{\frac{25^2 - 20^2}{45^2 - 27^2}}$;

e) $9 \cdot \sqrt{7\frac{1}{9}} + 4 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}}$

f) $0,5 \cdot \sqrt{\frac{4}{121}} + 0,(3) \cdot \sqrt{\frac{9}{484}}$

13 Calculați:

a) $\sqrt{\sqrt{1,44} + \sqrt{2,89}} - \sqrt{\frac{225}{100}} + 0,04$

b) $\sqrt{\sqrt{6,25} + \frac{1}{2}} + \sqrt{0,0576}$

c) $\sqrt{7,84} + \sqrt{0,01} + \sqrt{1,69 - 0,25} + \sqrt{9,61} + \sqrt{3,24}$

13 Arătați că numărul

$$n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9$$

este pătrat perfect. Calculați $\sqrt{n+189}$.

14 Arătați că numărul

$$n = 1 + 3 + 5 + \dots + 29$$

este pătrat perfect. Calculați \sqrt{n} .

C Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv

- 1** Pentru fiecare element a al mulțimii

$$A = \{\sqrt{50}, \sqrt{99}, \sqrt{325}, -\sqrt{901}\},$$

determinați cel mai mare număr întreg, mai mic decât a .

- 2** Pentru fiecare element b al mulțimii

$$B = \{-\sqrt{34}, \sqrt{77}, \sqrt{450}, -\sqrt{1000}\},$$

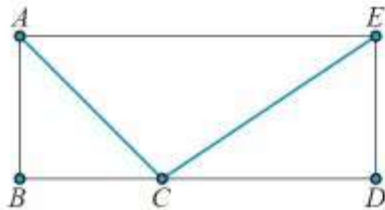
determinați cel mai mic număr întreg, mai mare decât b .

- 3** Determinați:

a) cel mai mic număr natural a mai mare decât $\sqrt{200}$

b) cel mai mare număr natural b mai mic decât $-\sqrt{300}$.

- 4** Un parc din orașul X se poate traversa pe aleile AC, respectiv CE.



Știind că $ABDE$ este dreptunghi și că $CD = 75$ m, iar $AB = BC = 50$ m, aproximați lungimea fiecărei alei, apoi estimați printr-un număr natural, în metri, lungimea traseului $AC - CE$.

- 5** Încadrați între două numere întregi consecutive următoarele numere: $\sqrt{7}$; $\sqrt{90}$; $-\sqrt{56}$; $\sqrt{1234}$; $-\sqrt{700}$.

- 6** Determinați numărul întreg n , pentru fiecare din situațiile:

a) $n < \sqrt{23} < n + 1$;

b) $n < -\sqrt{234} < n + 1$

c) $-n - 1 < -\sqrt{789} < -n$;

d) $n < \sqrt{1} + \sqrt{5} + \sqrt{9} < n + 1$.

- 7** Determinați numărul întreg m , pentru fiecare din situațiile:

a) $m < \sqrt{\frac{4}{9}} < m + 1$;

b) $m < \sqrt{\frac{144}{49}} < m + 1$;

c) $-m < -\sqrt{\frac{900}{121}} < -m + 1$.

- 8** Determinați mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < \sqrt{x} < 7\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < -\sqrt{x} < -2\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 44 < x^2 < 111\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -22 < x^2 < 22\}.$$

- 9** Sara a cumpărat de la librărie un vocabular cu 3,95 lei, un compas cu 7,15 lei și două gume de șters cu 2,35 lei bucata. Estimați, printr-un număr natural, suma, în lei, necesară pentru toate cumpărăturile.

- 10** Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a) Pentru $n \in \mathbb{N}$, cel mai mic număr natural c , astfel încât $n = \sqrt{c}$ și $n > 27,8$ este ...

b) Pentru $m \in \mathbb{N}$, cel mai mare număr natural d , astfel încât $m = \sqrt{d}$ și $m < 84$ este ...

- 11** Un pătrat are aria a cm². Pentru fiecare dintre valorile $a \in \{2; 60; 525\}$, estimați perimetrul pătratului, exprimând rezultatul printr-un număr natural, în centimetri, apoi în milimetri.

- 12** Dreptunghiul cu dimensiunile 80 mm și 150 mm are aria egală cu cea a unui pătrat. Estimați, în centimetri, printr-un număr natural, perimetrul pătratului.

- 13** Calculați:

a) $\sqrt{36} + \sqrt{64}$;

b) $\sqrt{3600} + \sqrt{6400}$.

14 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

$$p_1: \text{„}\sqrt{200} = 15\text{”}$$

$$p_2: \text{„}\sqrt{200} < 15\text{”}$$

$$p_3: \text{„}\sqrt{7} \leq 3\text{”}$$

$$p_4: \text{„}-9 \geq -\sqrt{80}\text{”}$$

$$p_5: \text{„}1 < \sqrt{2} < 3 < \sqrt{4}\text{”}$$

$$p_6: \text{„}70 \geq \sqrt{4800} \geq \sqrt{3900} > 60\text{”}$$

15 Fără a efectua toate calculele, copiați pe caiete și completați răspunsul corect:

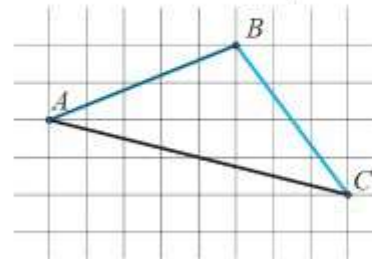
a) $\sqrt{360000} + \sqrt{640000} = \dots;$

b) $\sqrt{\underbrace{3600\dots00}_{12 \text{ cifre de } 0}} + \sqrt{\underbrace{6400\dots00}_{12 \text{ cifre de } 0}} = \dots$

16 Aproximați, la cel mai apropiat întreg, radicalii din coloana A, apoi asociați fiecărui număr care numește radicalul scris în coloana A, litera corespunzătoare răspunsului corect, scris în coloana B.

A	B
1. $\sqrt{400}$	a. 19
2. $\sqrt{500}$	b. 20
3. $\sqrt{600}$	c. 21
4. $\sqrt{700}$	d. 22
	e. 23
	f. 24
	g. 25
	h. 26

17 În figura de mai jos, este reprezentată o rețea de pătrate cu latura de 1 cm. Arătați că:



- a) $AB > 5,3 \text{ cm}$
- b) $AC < 9 \text{ cm};$
- c) $\mathcal{P}_{ABC} > 18 \text{ cm}.$

5. CERCUL

5.1. Unghi înscris în cerc. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

Breviar teoretic

- În același cerc sau în cercuri congruente, la coarde congruente corespund arce congruente.
- În același cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente.
- Perpendiculara dusă din centrul cercului pe o coardă împarte corda și arcele formate de ea în câte două părți congruente.
- Dreapta care unește centrul cercului cu mijlocul coardei este perpendiculară pe coardă.
- Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt egal depărtate de centrul cercului.
- Două coarde ale aceluiași cerc, cuprinse între drepte paralele, sunt congruente.

Se numește *unghi la centru* un unghi care are vârful în centrul cercului.

Măsura unui unghi la centru este egală cu măsura arcului subîntins (arcul determinat de laturile unghiului și situat în interiorul acestuia).

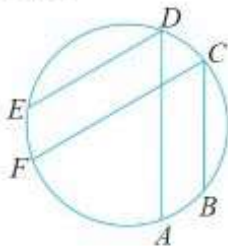
Se numește *unghi înscris în cerc* un unghi care are vârful pe cerc, iar laturile sale sunt coarde ale cercului. Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc subîntins de laturile sale.

Un unghi înscris în cerc care subîntinde un semicerc (sau un diametru) este un unghi drept.

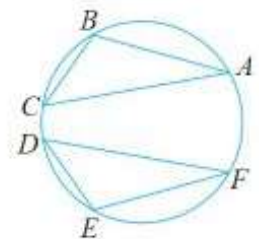
- O dreaptă este tangentă la un cerc dacă și numai dacă este perpendiculară pe raza cercului, în punctul de intersecție al dreptei cu cercul (numit punct de tangență).
- Prin orice punct A , exterior unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$, se pot construi două tangente la acest cerc. Segmentele determinate de punctul A și punctele de tangență sunt congruente.

A Arce și coarde

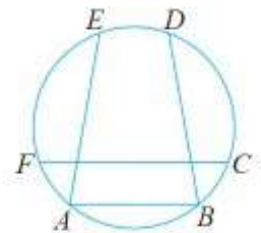
- 1 Dacă trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, are vârfurile pe un cerc, arătați că este trapez isoscel.
- 2 Se consideră punctele $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, astfel încât $AD \parallel BC$ și $CF \parallel DE$. Arătați că $AB = EF$.



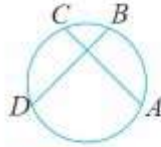
- 3 Se consideră punctele $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, astfel încât $\widehat{AB} = \widehat{EF}$ și $BC = DE$. Arătați că $AC = DF$.



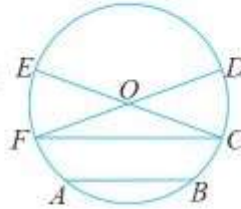
- 4 Se consideră punctele $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, astfel încât $AB \parallel FC$ și $AE = BD$. Arătați că $FE = CD$.



- 5 Fie punctele $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, astfel încât $AB = CD$. Arătați că $AC = BD$.

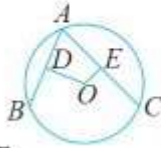


- 6 Se consideră punctele $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, astfel încât $AB \parallel FC$, iar CE și FD sunt diametre.



Arătați că $AE = BD$.

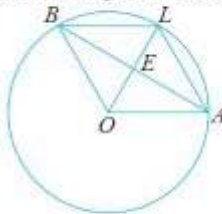
- 7 Fie AB și AC coarde în cercul cu centrul O , iar D și E sunt mijloacele coardelor.



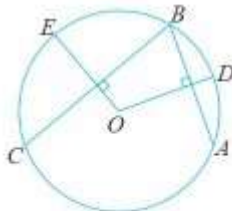
- Dacă $\sphericalangle BAC = 75^\circ$ calculați $\sphericalangle DOE$.
- Dacă $OD = OE$ arătați că $BD = CE$.
- Dacă $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ și raza cercului este $r = 2$ cm, calculați DE .

- 8 Perpendiculara dusă din O pe coarda AB intersectează coarda în E și arcul \widehat{AB} în L . Dacă E este mijlocul segmentului OL , atunci:

- arătați că $ALBO$ este romb.
- calculați măsura unghiului $\sphericalangle OAL$.

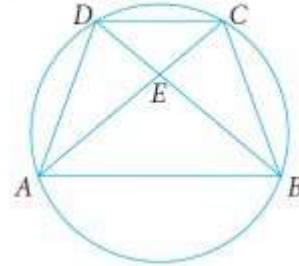


- 9 Perpendicularele duse din centrul cercului pe coardele AB și BC intersectează arcele \widehat{AB} și \widehat{BC} în D respectiv E . Dacă $\widehat{DBE} = 110^\circ$, calculați \widehat{AC} .



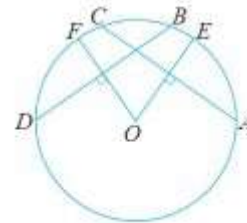
- 10 Se consideră paralelogramul $ABCD$ având vârfurile situate pe $\mathcal{C}(O, r)$. Arătați că $ABCD$ este dreptunghi.

- 11 Se consideră punctele $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, cu $\widehat{AD} = \widehat{BC}$.



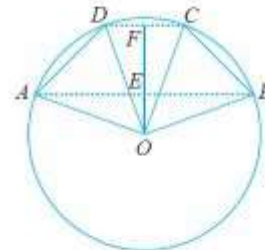
- Arătați că $AC = BD$.
- Arătați că $\triangle ACD \cong \triangle BDC$.
- Dacă $\{E\} = AC \cap BD$ arătați că $EC = ED$ și $EA = EB$.
- Arătați că $AB \parallel CD$.

- 12 Se consideră punctele $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, cu $AC = BD$. Perpendicularele duse din centrul cercului pe coardele AC și BD intersectează arcele \widehat{AC} și \widehat{BD} în E respectiv F . Arătați că $\widehat{FC} = \widehat{BE}$.



- 13 Fie E și F picioarele perpendicularelor duse din centrul unui cerc pe coardele AB respectiv BC . Arătați că $EF \parallel AC$.

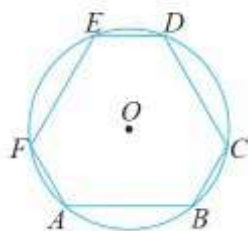
- 14 În figura de mai jos, punctele A, B, C, D sunt situate pe cercul cu centrul O astfel încât $\widehat{AD} = \widehat{BC}$.



- Arătați că $\triangle OAD \cong \triangle OBC$.
- Fie $OE \perp AD, E \in AD$ și $OF \perp BC, F \in BC$. Arătați că O, E, F sunt puncte coliniare.
- Arătați că $AB \parallel CD$.

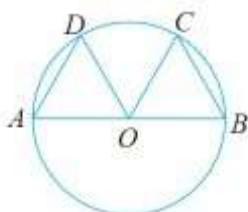
B Unghi la centru

- 1** Se consideră punctele $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, astfel încât $AB = CD = EF$ și $BC = ED = AF$.



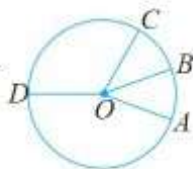
Arătați că $\sphericalangle AOC = 120^\circ$ și $\triangle ACE$ este echilateral.

- 2** Se consideră punctele $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, astfel încât AB este diametru, $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ și $\widehat{AD} = \widehat{BC}$. Arătați că $\triangle DOC$ este echilateral.



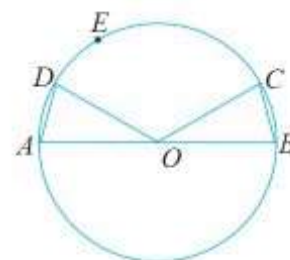
- 3** Se consideră punctele $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, astfel încât AB este diametru, $\sphericalangle ABC = 70^\circ$ și $\widehat{CD} = 100^\circ$. Arătați că $AD = BC$.

- 4** Fie punctele $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine, cu $\widehat{AC} < 90^\circ$, B este mijlocul arcului mic \widehat{AC} , iar D este mijlocul arcului mare \widehat{AB} .



Dacă $\widehat{AD} - \widehat{CD} = 30^\circ$ arătați că $\triangle OAC$ este echilateral.

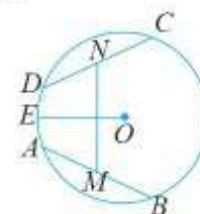
- 5** Se consideră punctele $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, 8)$, în această ordine, astfel încât AB este diametru $AD = BC$ și $\sphericalangle ABC = 75^\circ$.



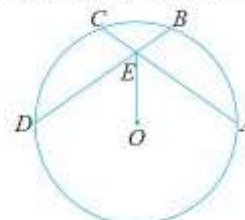
- a) Calculați măsura arcelor \widehat{BC} și \widehat{CD} .
b) Calculați distanța de la B la OC .
c) Fie punctul E pe cerc astfel ca $BE \parallel OD$. Arătați că $OE \perp OC$.

- 6** Fie punctele $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine și M, N mijloacele coardelor AB , respectiv CD .

Dacă $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ și $\widehat{AE} = \widehat{DE}$, arătați că $OE \perp MN$.



- 7** Se consideră punctele $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$, în această ordine și $\{E\} = AC \cap BD$. Dacă OE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ arătați că $AC = BD$.



RECAPITULARE FINALĂ ȘI PROBLEME DE SINTEZĂ

- 1** Completați litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă:

Propoziția	A/F
$\sqrt{48} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$	
$12,906147 \in \mathbb{Q}$	
$-\frac{91}{7} \notin \mathbb{Z}$	
$ -2 \cdot (-2)^{10} \in \mathbb{N}$	

- 2** Determinați:

- a) cel mai mare număr natural, mai mic decât $\sqrt{199}$.
b) cel mai mic număr întreg, mai mare decât $-\sqrt{29}$.

- 3** Aproximați prin lipsă, la zecimi:

- a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{21}$; c) $\sqrt{111}$.

- 4** Aproximați prin adaos, la sutimi:

- a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{55}$; c) $\sqrt{90}$.

- 5** Se consideră mulțimea:

$$A = \left\{ \frac{8}{-4}; \sqrt{0, (4)}; -\sqrt{12}; \sqrt{144}; \sqrt{5\frac{4}{9}}; 2^{-2}; (-1)^6 \right\}.$$

Determinați elementele mulțimilor $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$;

$$A \cap \mathbb{Q}; A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

- 6** Decideți dacă x este pozitiv, negativ sau nul.

$$x = -\sqrt{12} \cdot \left[\sqrt{216} : (3\sqrt{3}) - \sqrt{384} : \sqrt{48} \right]$$

- 7** Calculați:

- a) rădăcina pătrată a numărului 1849

b) $\sqrt{13^2 - 12^2}$ c) $\sqrt{3782 - 7 \cdot \sqrt{676}}$

- 8** Efectuați calculele:

a) $0,4 \cdot \sqrt{225} - \sqrt{400} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,25}$

b) $\frac{\sqrt{144} - 0,25^{-1}}{\sqrt{729} - 0,2^{-2}}$

c) $\frac{\sqrt{216 \cdot (7^1 - 1^7)} - \sqrt{256}}{\sqrt{15 + 15 \cdot 59}}$

d) $[-0,8(3) \cdot \sqrt{324}] : (0,5) \cdot \sqrt{81}$

e) $\sqrt{375 : \frac{3}{5}} + 6 \cdot \sqrt{76 - 2 \cdot \sqrt{36}}$

f) $\frac{\sqrt{1234 + \sqrt{3844}} - \sqrt{519 + \sqrt{100}}}{\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9}}$

g) $\frac{\sqrt{228 : 19 + 109} + \sqrt{112 \cdot 3 - 12}}{\sqrt{765 + 76}}$

h) $\left[-\frac{7}{15} \cdot \sqrt{(-3)^2 (-5)^4} \right] : (0,4375 \cdot \sqrt{256})$

- 9** Se consideră numerele

$$x = 0, (3)^{-1} \cdot [2\sqrt{9} - 3\sqrt{16} + 4\sqrt{25}] \text{ și}$$

$$y = \left(\sqrt{0,01(7)} + \frac{\sqrt{64^2 - 64 \cdot 63}}{5} \right) : 0,13 + \sqrt{28\frac{4}{9}}.$$

- a) Calculați m_a , media aritmetică, și m_g , media geometrică, a numerelor x și y .

- b) Determinați numărul $m_h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$, media armonică a numerelor x și y .

- c) Scrieți în ordine crescătoare numerele m_a, m_g, m_h .

- 10** Efectuați:

a) $|3 - 2\sqrt{2}| + |3 - 2\sqrt{3}| + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

b) $|2\sqrt{5} + 5| - |-2\sqrt{5} - 3|$

c) $2 \cdot |3\sqrt{4} - 2\sqrt{7}| + 3 \cdot |1 - 2\sqrt{7}|$

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3\sqrt{3} - 6)^2} - \sqrt{(-\sqrt{5} - 1)^2}$

- 11** Ordonăți crescător șirurile de numere reale:

a) $4\sqrt{2}$; 6 ; $\sqrt{51}$; $3\sqrt{5}$; 8 ; $3\sqrt{2}$; $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{12}$; $6\sqrt{2}$;

b) $-\sqrt{11}$; $-2\sqrt{2}$; -3 ; $-3\sqrt{2}$; $-\frac{2}{3}\sqrt{27}$; $-\sqrt{\frac{46}{5}}$

- 12** Rezolvați ecuațiile:

a) $7 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) = 21$ b) $7 : \left(x - \frac{1}{2} \right) = 2$

c) $7 - \left(x - \frac{1}{2} \right) = 6,5$ d) $\frac{3}{4} \cdot \left(2x - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5}$

e) $(x - 1) : 2 + (x - 1) : 3 = 5$

f) $\sqrt{2,25} - (x - 1,5) = 2,5$

g) $1,75 - 5 \cdot (0,1 - x) = 2,25$

$$h) \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot x = -\frac{1}{12}$$

$$i) 55 - 44 \cdot (x - 33) = (-40)^2 - 4^2$$

13 Rezolvați, în numere reale, ecuațiile:

$$a) |2x - 1| = 7 \quad b) |3 - 2x| = 5$$

$$c) |3x - 4| = -7 \quad d) 19 - |4x + 1| = -2$$

$$e) \left|3 - x\right| - \frac{5}{2} = 0,25 \quad f) |x \cdot (x + 2)| = 0$$

14 Rezolvați ecuațiile:

$$a) 5 \cdot [25 - 5 \cdot (3 - 2x) - 9] = 1$$

$$b) -\frac{5}{2} + \frac{2}{5}[3 - (5 - 2x)] + \frac{x}{5} = -1,5$$

$$c) \frac{3-x}{3} + \frac{x-1}{6} = \frac{2x-3}{9}$$

$$d) -\frac{x-8}{5} - \frac{1-2x}{10} = 0,25 + \frac{x}{8}$$

15 Rezolvați, în mulțimea numerelor naturale, ecuația:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \dots + \frac{x+2019}{2020} = 2019.$$

16 Într-un bloc sunt 76 de apartamente. Unele au două camere, iar restul au trei camere, în total 196 de camere. Determinați numărul apartamentelor cu două camere și al celor cu trei camere.

17 Într-o parcare, sunt 20 de mașini și motociclete (fără ataș) care au împreună 66 de roți (fără cele de rezervă). Aflați numărul mașinilor și numărul motocicletelor din parcare.

18 Suma a două numere raționale este $4\frac{5}{6}$, iar o șesime din unul dintre numere este cu $1\frac{1}{3}$ mai mic decât celălalt. Arătați că unul dintre numere este natural.

19 Dintr-o livadă s-au cules 780 kg de mere. Pentru vânzare, merele au fost puse în lădițe de câte 10 kg sau de câte 15 kg. Știind că, în total, s-au folosit 63 de lădițe, aflați numărul lădițelor de 15 kg. Calculați suma de bani care s-a încasat din vânzarea merelor ambalate în lădițele de 10 kg, dacă prețul de vânzare a fost 4,80 lei/kg.

20 Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \cdot x - 7 < 2,3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid |2x - 5| = 1\}$.

Calculați: $A, B, A \cup B, A \cap B, A - B, A \cap \mathbb{N}, A - \mathbb{Z}$.

21 Aflați numerele naturale n și m , știind că diferența lor este 165, iar dacă împărțim numărul n la m , se obține câtul 6 și restul 5.

22 Pentru a achita suma de 275 lei, s-au folosit 43 de bancnote, unele de 10 lei, altele de 5 lei. Aflați numărul bancnotelor de 10 lei și pe cel al bancnotelor de 5 lei cu care s-a plătit suma.

23 Diagrama de mai jos reprezintă mediile anuale la matematică ale elevilor unei clase a VII-a.



Alegeți răspunsul corect.

a) Numărul tuturor elevilor din clasă este:

A. 18 B. 24 C. 20 D. 30

b) Numărul elevilor care au obținut media cel puțin egală cu 8, exprimat procentual, este:

A. 40 % B. 45% C. 50% D. 55%

24 Fie triunghiul ABC și M, N, P mijloacele laturilor AB, BC , respectiv AC .

a) Desenați punctul D , simetricul lui N față de M și punctul E , simetricul lui N față de P .

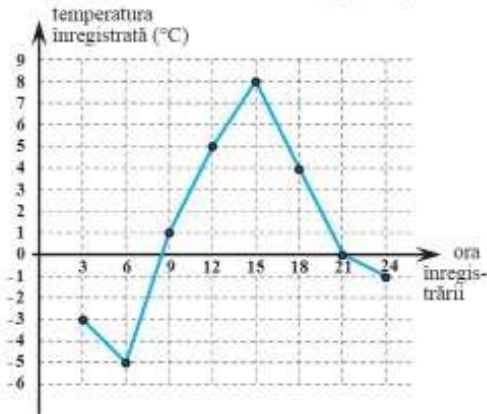
b) Demonstrați că $ADMP$ și $AEPM$ sunt paralelograme.

c) Calculați măsura unghiului DAE .

25 Fie AD mediană a triunghiului ABC , $D \in BC$ și fie BE, CF perpendicularele din vârfurile B , respectiv C , pe dreapta AD , cu $E, F \in BC$. Demonstrați că patrulaterul $BECF$ este paralelogram.

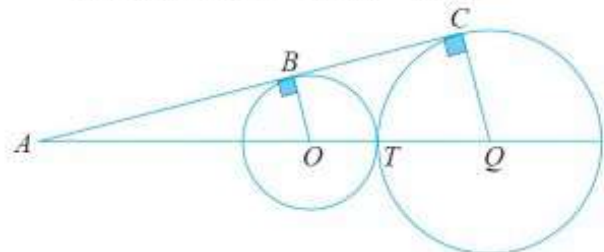
26 Punctul E aparține înălțimii AD a triunghiului ABC dreptunghic în A . Paralela prin E la AB intersectează BC în G , iar perpendiculara în E pe CE intersectează dreapta AB în F . Să se arate că $AGEF$ este paralelogram.

- 27 Graficul de mai jos reprezintă evoluția temperaturii aerului pe parcursul unei zile. Alegeți răspunsul corect.

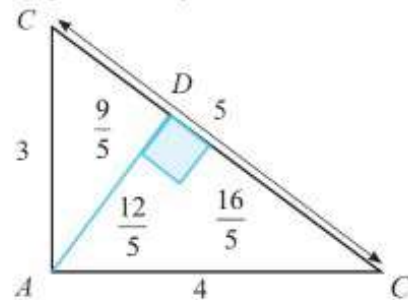


- a) Diferența dintre temperatura maximă și temperatura minimă înregistrate este egală cu:
 A. 15 °C B. 8 °C C. 24 °C D. 13 °C
- b) Temperaturi pozitive s-au înregistrat:
 A. exact 12 ore B. mai mult de 12 ore
 C. între 8 ore și 12 ore D. exact 8 ore
- 28 Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este de 13 cm, iar una dintre catete este de 5 cm. Calculați lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.
- 29 În triunghiul ABC , $\sphericalangle B = 90^\circ - \sphericalangle C$, $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $AC = 10$ cm, $AD = 6$ cm.
 a) Calculați $\sin \sphericalangle BAD + \operatorname{tg} \sphericalangle CAD$.
 b) Dacă $E = pr_{AB}D$, iar $F = pr_{AC}D$, aflați aria patrulaterului $AEDF$.
- 30 Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și fie $P = pr_{BC}A$.
 a) Dacă $AB = 15$ cm și $BP = 9$ cm, calculați aria cercului circumscris triunghiului ABC .
 b) Dacă $AP = 15$ cm și $CP = 10$ cm, calculați lungimea cercului circumscris triunghiului ABC .
- 31 Proiecțiile catetelor unui triunghi dreptunghic pe ipotenuză au lungimile de 7 cm, respectiv de 63 cm. Calculați perimetrul și aria triunghiului.
- 32 $ABCD$ este trapez, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$, $AB = 20$ cm, $CD = 12$ cm, $AD = 15$ cm și $AD \cap BC = \{M\}$. Calculați:
 a) lungimile diagonalelor și aria trapezului
 b) perimetrul triunghiului MBD .

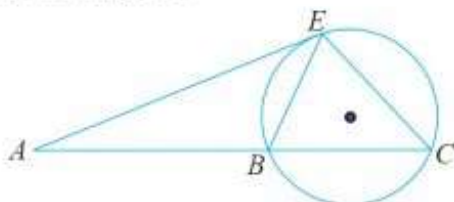
- 33 Un triunghi isoscel are laturile congruente de 10 cm iar baza de 12 cm. Calculați $h_1 + h_2 + h_3$, suma înălțimilor triunghiului.
- 34 O coardă a unui cerc de rază 15 cm are lungimea de 18 cm. Calculați distanța de la centrul cercului la această coardă.
- 35 Triunghiul ABC este isoscel cu baza AC , $\sphericalangle ABC = 140^\circ$. Pe latura AC se consideră punctul D , astfel încât $\sphericalangle CDB = 40^\circ$.
 a) Arătați că triunghiurile ABC și ADB sunt asemenea.
 b) Demonstrați că $BC^2 = AD \cdot AC$.
- 36 Se consideră cercurile tangente exterior $\mathcal{C}(O, R)$, $\mathcal{C}(O', r)$ și BC tangenta comună lor.
 a) Știind că A, O, T și Q sunt coliniare, exprimați în funcție de R și r , lungimea segmentului BC .
 b) Calculați lungimea segmentului BC , pentru cazul particular $R = 8$ cm, $r = 2$ cm.



- 37 Găsiți un triunghi dreptunghic astfel încât lungimile laturilor, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei și lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză să fie toate numere întregi. Inspirați-vă, în stabilirea răspunsului, din informațiile pe care le puteți extrage din exemplul de mai jos.



- 38** Prin punctul A , exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$, se trasează o dreaptă secantă cercului, care îl intersectează în punctele B și C , apoi tangenta AE la cerc, E fiind punctul de tangență.

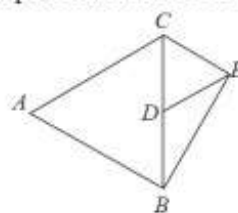


- a) Demonstrați că triunghiurile ABE și AEC sunt asemenea.
 b) Deduceți relația $AE^2 = AB \cdot AC$.
 c) Se consideră două segmente de lungimi l_1 și l_2 . Folosind informațiile aflate la subpunctele a) și b), construiți un segment de lungime $\sqrt{l_1 \cdot l_2}$.
- 39** Perimetrul unui romb este de 100 cm, iar lungimea unei diagonale este de 14 cm. Calculați raportul lungimilor diagonalelor rombului.
- 40** Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și $GM \parallel AB, M \in BC, GN \parallel BC, N \in AC, GP \parallel AC, P \in AB$. Știind că $AB = 18$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 15$ cm, calculați lungimile segmentelor AN, BP și CM .
- 41** Se consideră patrulaterul $MNPQ$ și punctele A și B pe laturile MN respectiv PQ astfel încât $\frac{MA}{AN} = \frac{QB}{BP} = k > 0$. Arătați că $MQ \parallel NP$ dacă și numai dacă $AB = \frac{1}{k+1} \cdot MQ + \frac{k}{k+1} \cdot NP$.
- 42** În triunghiul ABC , $AD \perp BC, D \in BC$, iar F este intersecția dintre bisectoarea unghiului B și perpendiculara în A , pe AB . Dacă $\{E\} = AD \cap BF$.
 a) Arătați că $AB \cdot BE = BD \cdot BF$.
 b) Dacă $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ arătați că $\triangle AEF$ este echilateral.
- 43** În dreptunghiul $ABCD$ cu $AC = 40$ cm și $BC = 24$ cm, punctul P aparține laturii AB , $\frac{AP}{PB} = \frac{7}{25}$, $\{O\} = AC \cap BD$, iar dreapta PO intersectează latura CD în punctul Q .
 a) Calculați perimetrul și aria dreptunghiului.
 b) Calculați aria triunghiului BPQ .

- 44** Pe latura AB a triunghiului ABC se consideră punctul D . Se construiesc $DE \parallel BC, E \in AC$ și $DF \parallel AC, F \in BC$. Calculați aria patrulaterului $CEDF$ știind că $\mathcal{A}_{ADE} = \mathcal{A}_{BDF} = 20$ cm².

- 45** Triunghiurile ABC și CDE sunt echilaterale, cu $AB = 12$ cm și D mijlocul laturii BC .

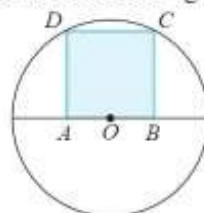
- a) Demonstrați că $AB \parallel CE$
 b) Arătați că patrulaterul $ABEC$ este un trapez dreptunghic.
 c) Aflați aria patrulaterului $ABEC$.



- 46** Fie trapezul $ABCD$, cu baza mare AB , $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Paralela prin punctul O la baze intersectează AD în punctul E . Demonstrați că:

- a) $\triangle AEB \sim \triangle DEC$;
 b) EO este bisectoarea unghiului BEC .

- 47** Dintr-o bucată de carton în formă de semidisc, se decupează o suprafață pătratică. Raza discului din care provine semidiscul este egală cu $2\sqrt{5}$ cm.



- a) Calculați aria semidiscului.
 b) Calculați lungimea laturii pătratului.
 c) Calculați numărul k , raportul dintre aria pătratului și aria semidiscului. Comparați valoarea k a raportului cu numărul $0,5$, folosind inegalitățile $3,14 < \pi < 3,15$.

5. CERCUL

5.1. Unghi înscris în cerc. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

A Arce și coarde

- $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow BC = AD \Rightarrow$ trapezul $ABCD$ este isoscel.
- $AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$; $CF \parallel DE \Rightarrow \widehat{CD} = \widehat{EF}$; Deci $\widehat{AB} = \widehat{CD} = \widehat{EF} \Rightarrow AB = EF$.
- $BC = DE \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{DE}$; $\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{EF} + \widehat{DE} = \widehat{DF} \Rightarrow AC = DF$.
- $AB \parallel FC \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{BC}$; $AE = BD \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BD}$; $\widehat{FE} = \widehat{AE} - \widehat{AF} = \widehat{BD} - \widehat{BC} = \widehat{CD} \Rightarrow FE = CD$.
- $AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{BC} = \widehat{BD} \Rightarrow AC = BD$.
- $AB \parallel FC \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{BC}$; $\sphericalangle FOE = \sphericalangle COD$ (opuse la vârf) $\Rightarrow \widehat{FE} = \widehat{CD}$; $\widehat{AE} = \widehat{AF} + \widehat{FE} = \widehat{BC} + \widehat{CD} = \widehat{BD} \Rightarrow AE = BD$.
- a) D, E sunt mijloacele cordelor $AB, AC \Rightarrow OD \perp AB, OE \perp AC \Rightarrow \sphericalangle DOE = 105^\circ$;
 b) $OD = OE \Rightarrow d(O, AB) = d(O, AC) \Rightarrow AB = AC \Rightarrow BD = CE = \frac{AB}{2}$;
 c) $OD \perp AB, OE \perp AC, AB \perp AC \Rightarrow ADOE$ dreptunghi $\Rightarrow DE = OA = r = 2$ cm.
- a) În $ALBO$ diagonalele se înjumătățesc și sunt perpendiculare. b) $OA = OL = AL$.
- $OD \perp AB$ și $OE \perp BC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{DB} = x$ și $\widehat{BE} = \widehat{EC} = y$; $110^\circ = \widehat{DBE} = x + y$; $\widehat{AC} = 360^\circ - \widehat{AB} - \widehat{BC} = 360^\circ - (2x + 2y) = 140^\circ$.
- $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} = x$; $AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} = y$; $2x + 2y = 360^\circ \Rightarrow x + y = 180^\circ \Rightarrow AC$ și BD sunt diametre $\Rightarrow AC = BD \Rightarrow ABCD$ dreptunghi.
- a) $\widehat{AC} = \widehat{AD} + \widehat{DC} = \widehat{BC} + \widehat{DC} = \widehat{BD} \Rightarrow AC = BD$. b) $\widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow AD = BC$; $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$ (L.L.L.);
 c) $\triangle ACD \equiv \triangle BDC \Rightarrow \sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC = x \Rightarrow \triangle DEC$ isoscel, cu $EC = ED$ și $\sphericalangle CED = 180^\circ - 2x$; $EA = AC - EC = BD - ED = EB \Rightarrow \triangle AEB$ isoscel, cu $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EBA = y$ și $\sphericalangle AEB = 180^\circ - 2y$; $\sphericalangle AEB = \sphericalangle CED$ (opuse la vârf) $\Rightarrow x = y \Rightarrow \sphericalangle ABE = \sphericalangle CDE$, care sunt și unghiuri alterne interne pentru AB, CD , cu secanta $BD \Rightarrow AB \parallel CD$.
- $OE \perp AC$ și $OF \perp BD \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EC} = x$ și $\widehat{BF} = \widehat{FD} = y$; $AC = BD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow x = y$.
 $\widehat{FC} = \widehat{BF} - \widehat{BC} = x - \widehat{BC} = \widehat{EC} - \widehat{BC} = \widehat{BE}$.
- $OE \perp AB$ și $OF \perp BC \Rightarrow E$ și F mijloacele cordelor AB respectiv $BC \Rightarrow EF$ linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow EF \parallel AC$.
- a) Cazul L.L.L.; b) OE înălțime în $\triangle OAB$ isoscel, deci și bisectoare $\sphericalangle AOB$; OF înălțime în $\triangle OCD$ isoscel, deci și bisectoare $\sphericalangle COD$. Din $\sphericalangle AOD = \sphericalangle COD$ rezultă că OE este și bisectoare $\sphericalangle AOB$. Deoarece bisectoarea $\sphericalangle AOB$ este unică, rezultă O, E, F coliniare; c) $AB \perp OF, CD \perp OF$.

B Unghi la centru

- $AB = CD = EF \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} = \widehat{EF} = x$; $BC = ED = AF \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{DE} = \widehat{AF} = y$;
 $3x + 3y = 360^\circ \Rightarrow x + y = 120^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOC = \widehat{AC} = 120^\circ$; $\widehat{AC} = \widehat{CE} = \widehat{AE} = 120^\circ \Rightarrow AC = CE = AE$.

2. $OB = OC = r$ și $\sphericalangle OBC = 60^\circ \Rightarrow \triangle OBC$ echilateral $\Rightarrow BC = r$; $\widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow AD = BC = r$;
 $OA = OD = AD = r \Rightarrow \triangle OAD$ echilateral $\Rightarrow \sphericalangle AOD = 60^\circ$; Apoi $\sphericalangle DOC = 180^\circ - \sphericalangle AOD - \sphericalangle BOC = 60^\circ$;
3. $\triangle BOC$ isoscel, cu $\widehat{BC} = \sphericalangle BOC = 40^\circ$; $\widehat{AD} = \widehat{AB} - \widehat{BC} - \widehat{CD} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$.
4. $\widehat{AB} = \widehat{BC} = x$, $\widehat{CD} = y$, $\widehat{AD} = \widehat{BD} = x + y$; $30^\circ = \widehat{AD} - \widehat{CD} = x + y - y = x \Rightarrow \sphericalangle AOC = \sphericalangle AC = 2x = 60^\circ$.
5. a) $\triangle BOC$ isoscel $\Rightarrow \widehat{BC} = \sphericalangle BOC = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle OBC = 30^\circ$; $AD = BC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} = 30^\circ$; și $\widehat{CD} = 120^\circ$.
 b) $d(B, OC) = 4$. c) $BE \parallel OD$, AB secantă $\Rightarrow \sphericalangle AOD = \sphericalangle ABE = 30^\circ$; $\triangle OBE$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle EOB = 120^\circ$;
 $\sphericalangle BOC = \widehat{BC} = 30^\circ$; deci $\sphericalangle EOC = 90^\circ$.
6. Avem $OM \perp AB$, $ON \perp CD$; $\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD \Rightarrow d(O, AB) = d(O, CD) \Rightarrow OM = ON$;
 $\triangle DON \equiv \triangle AOM$ (C.C.) $\Rightarrow \sphericalangle DON = \sphericalangle AOM$; $\widehat{DE} = \widehat{AE} \Rightarrow \sphericalangle DOE = \sphericalangle AOE$;
 Deci $\sphericalangle EON = \sphericalangle EOM \Rightarrow OE \perp MN$.
7. $\triangle BOE \equiv \triangle COE$ (L.U.L.) $\Rightarrow BE = CE$. Fie $\{F\} = OE \cap \mathcal{C}(O, r) \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{CF} \Rightarrow BF = CF \Rightarrow \triangle BEF \equiv \triangle CEF$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle BEF = \sphericalangle CEF \Rightarrow \sphericalangle AEO = \sphericalangle DEO \Rightarrow \triangle AEO \equiv \triangle DEO$ (L.U.L.) $\Rightarrow DE = AE$;
 $AC = AE + CE = DE + BE = BD$.

C Unghi inscris in cerc

1. $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow \sphericalangle EAB = \widehat{BC} : 2 = \widehat{AD} : 2 = \sphericalangle EBA \Rightarrow \triangle AEB$ isoscel.
2. a) $\sphericalangle ACB = \widehat{AB} : 2 = 90^\circ \Rightarrow BC \perp AC$; $OD \parallel BC \Rightarrow OD \perp AC \Rightarrow D$ mijloc \widehat{AC} . b) $DC \parallel AB \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} = x$;
 D mijloc $\widehat{AC} \Rightarrow \widehat{DC} = \widehat{BC} = x$; $180^\circ = \widehat{AB} = 3x \Rightarrow x = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAC = \widehat{BC} : 2 = 30^\circ$.
3. $\sphericalangle BAC = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 80^\circ \Rightarrow \sphericalangle BOC = 80^\circ$; $\triangle OBC$ isoscel, cu $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = 50^\circ$; $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, $\sphericalangle ACB = 80^\circ$.
4. a) BD bisectoare $\sphericalangle OBC \Rightarrow \sphericalangle OBD = \sphericalangle CBD = x$; $OA \parallel BC$, secanta $OB \Rightarrow$
 $\sphericalangle AOB = \sphericalangle OBC = 2x \Rightarrow \widehat{AB} = \sphericalangle AOB = 2x$ și $\widehat{CD} = 2 \cdot \sphericalangle DBC = 2x \Rightarrow AB = CD$.
 b) $\triangle OBD$ isoscel, $\sphericalangle OBD = \sphericalangle ODB = x$, $\sphericalangle BOD = 180^\circ - 2x \Rightarrow \sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOD = 180^\circ$.
5. a) $\widehat{AB} = \widehat{AC} - \widehat{BC} = \widehat{DB} - \widehat{BC} = \widehat{CD}$. b) $\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD$; $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CDB = \widehat{BC} : 2$ și
 $\sphericalangle AEB = \sphericalangle DEC$ (opuse la vârf) $\Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE$ (L.U.U.) $\Rightarrow BE = CE$; $\triangle OBE \equiv \triangle OCE$ (L.L.L.)
6. a) AE bisectoare $\sphericalangle BAC \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{EC} \Rightarrow BE = EC \Rightarrow \triangle OBE \equiv \triangle OCE$ (L.L.L.) $\Rightarrow OE$ bisectoare în $\triangle OBC$ isoscel
 $\Rightarrow OE \perp BC$. b) AE bisectoare $\sphericalangle BAC \Rightarrow \sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE = x$ și $\widehat{BE} = \widehat{EC} = 2x$; CF bisectoare $\sphericalangle ACB \Rightarrow$
 $\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF = y$ și $\widehat{AF} = \widehat{BF} = 2y$; Notăm cu P și N punctele diametral opuse lui E , respectiv F .
 $10^\circ = \sphericalangle AEO = \widehat{AP} : 2 = \left(\widehat{EBP} - \widehat{BE} - \widehat{BF} - \widehat{AF} \right) : 2 = (180^\circ - 2x - 2y - 2y) : 2 = 90^\circ - x - 2y$.
 $20^\circ = \sphericalangle CFO = \widehat{CN} : 2 = \left(\widehat{FBN} - \widehat{FB} - \widehat{BE} - \widehat{CE} \right) : 2 = (180^\circ - 2y - 2x - 2x) : 2 = 90^\circ - y - 2x$.
 $x = 20^\circ, y = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAC = 40^\circ, \sphericalangle ACB = 60^\circ$.
7. a) Fie $OR \perp AC$, $OP \perp FD$; $\triangle RON \equiv \triangle POM$ (I.U.) $\Rightarrow OR = OP$.
 b) $d(O, AC) = d(O, FD) \Rightarrow AC = FD$. În plus $AC \parallel FD \Rightarrow ACDF$ paralelogram.
 c) $\widehat{AF} = \widehat{CD} = x$, $\widehat{BC} = \widehat{EF} = y$, $\widehat{AB} = \widehat{DE} = z$, $\widehat{AF} = \widehat{BC} + \widehat{DE} \Rightarrow x = y + z$. Din $2x + 2y + 2z = 360^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$.
8. $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = x$ (opuse la vârf) $\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CE} = 2x \Rightarrow \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCE = 180^\circ - 2x$; Dar $\sphericalangle BAD, \sphericalangle BCE$ sunt alterne interne pentru AD, CE cu secanta $AC \Rightarrow AD \parallel CE$.