Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unităţile de învăţământ preuniversitar prin O.M.E. nr. 3014/04.01.2023.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VI-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Andreea Roșca, Ramona Rossall, Iuliana Ene
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : aritmetică, geometrie : clasa a VI-a / Gheorghe Iurea, Adrian Zanoschi, Gabriel Popa, ... - Ed. a 2-a. - Pitești : Paralela 45, 2023
ISBN 978-973-47-3925-7

I. Iurea, Gheorghe
II. Zanoschi, Adrian
III. Popa, Gabriel

51

Gheorghe IUREA
Adrian ZANOSCHI
Gabriel POPA
Gabriela-Elena ZANOSCHI
Ioana ANTON

matematică

aritmetică
geometrie

clasa a VI-a

ediția a II-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

PROBLEME RECAPITULATIVE – CLASA a V-a

1. Care este cel mai mare număr de patru cifre distincte care are cifra sutelor egală cu 9? Dar cel mai mic?

2. Câte numere $\overline{abcd}$ verifică condițiile $a + b = 5$ și $b + c = 11$?

3. O carte are 216 pagini. Câte cifre sunt folosite pentru paginarea acesteia?

4. Suma a două numere impare distincte este 206. Care este diferența maximă dintre numere? Dar diferența minimă?

5. Care este cel mai mic număr natural care împărțit la 76 dă câtul 57? Dar cel mai mare?

6. Care este cel mai mic număr natural, mai mare decât 1000, care împărțit la 48 dă restul 15?

7. Care este cel mai mare număr natural, mai mic decât 1000, care împărțit la 48 dă restul egal cu 15?

8. a) Câte numere de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 6?
b) Câte numere de trei cifre au suma cifrelor egală cu 6?

9. Efectuați:
a) $2305 \cdot 2304 - 2304 \cdot 2303 - 2 \cdot 2303$;
b) $572 \cdot 68 - 572 \cdot 63 + 128 \cdot 71 - 128 \cdot 66$.

10. Dacă $a = 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2^1 - 2^0$ și $b = 3 \cdot 2^8 - 5^4 + 10^2 - 3^5$, calculați a^b și b^a.

11. Efectuați:
a) $3^7 \cdot 3^5 \cdot 3^{73} - 3^8 \cdot 3^{100} : 3^{23}$;
b) $(2^3)^8 - (2^4)^6 + 3^2 \cdot 9^2 - 3^6$;
c) $(9^{24} + 2 \cdot 81^{16} : 9^8) : 3^{49}$;
d) $(2^{79} + 3 \cdot 2^{76} + 2^{78} + 2^{76}) : 4^{39}$.

12. Scrieți numărul 10 ca o sumă, diferență, produs, cât sau putere de numere naturale.

13. a) Arătați că 1089 este pătrat perfect.
b) Arătați că 1365 nu este pătrat perfect.

14. Câte numere de cinci cifre conțin secvența 234?

15. Un număr se împarte la 9 și dă restul 7. Câtul se împarte la 8 și dă restul 5. Noul cât se împarte la 7 și dă câtul 6 și restul 3. Aflați numărul inițial.

16. Determinați numerele $\overline{abc}$, știind că:
a) $\overline{abc} + \overline{bc} + c = 292$;
b) $\overline{abc} + \overline{ab} + a = 581$.

17. Fie x, y, z numere naturale, astfel încât $2x + 3y = 31$ și $4y + 3z = 67$.
a) Determinați trei numere naturale x, y, z care verifică condițiile date.
b) Calculați suma $S = 6x + 25y + 12z$.

TESTE INIȚIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

(1p) **1.** Calculați $\left(\frac{1}{3}+0,25\right)\cdot\left(1+\frac{5}{7}\right)$.

(1p) **2.** Calculați $2a + 3b + c$, știind că $a + b = 20$ și $b + c = 21$.

(1p) **3.** Scrieți în ordine descrescătoare numerele: $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{8}{5}$, $c = 1,6(12)$, $d =$ $= 1,(61)$.

(1p) **4.** Ionuț are 142 de timbre, iar Ana are 56 de timbre. Câte timbre trebuie să îi dea Ionuț Anei pentru a avea de două ori mai multe timbre decât Ana?

(1p) **5.** Calculați media aritmetică a numerelor $a = 52 : 5,2$ și $b = 3,24 - 0,5 - 0,74$.

6. Considerăm un segment AB cu lungimea de 4 cm. Notăm cu C simetricul lui A față de B și cu D simetricul lui C față de A.

(1p) **a)** Construiți punctul C.

(1p) **b)** Care este lungimea segmentului BC?

(1p) **c)** Care este lungimea segmentului CD?

(1p) **7.** Calculați $4^5 \cdot 50 - 4^4 \cdot 150 - 25 \cdot 2^9$.

TESTUL 2

(1p) **1.** Calculați $92 : 9,2 - 4,2 : 0,7$.

2. Un număr natural dă restul 2 la împărțirea prin 3.

(1p) **a)** Ce rest va da dublul numărului la împărțirea prin 3?

(1p) **b)** Ce rest va da triplul numărului la împărțirea la 3?

(1p) **3.** Calculați $(2 + 4 + 6 + \ldots + 100) - (1 + 3 + 5 + \ldots + 99)$.

(1p) **4.** Aflați toate numerele naturale nenule care împărțite la 8 dau câtul de două ori mai mic decât restul.

(1p) **5.** Arătați că numărul $n = 2^0 + 8^{21} : 16^{15} + 6 \cdot 27^{10} : 81^7$ este divizibil cu 9.

6. Fie unghiul AOB și semidreptele OC, OM și ON, astfel încât semidreapta OC este opusă semidreptei OA, semidreptele OM și ON sunt interioare unghiului AOB, $\sphericalangle MON = 2\sphericalangle AOM$, $\sphericalangle NOB = 3\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle BOC = 4\sphericalangle AOM$.

(1p) **a)** Determinați măsura unghiului AOM.

(1p) **b)** Determinați măsura unghiului BOM.

(1p) **7.** Aflați câte numere de forma $\overline{abcabcd}$ sunt divizibile cu 9 și cu 100.

ARITMETICĂ

CAPITOLUL I
MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime

• În matematică, o **mulțime** este o colecție de obiecte diferite, numite **elementele mulțimii.** Elementele unei mulțimi pot fi obiecte matematice de orice fel: numere, simboluri, figuri geometrice, alte mulțimi etc.

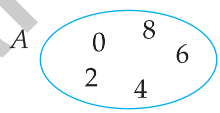
Mulțimile se notează cu litere mari.

Dacă A este o mulțime și x este un element al său, spunem că „x aparține mulțimii A" și scriem $x \in A$. Dacă x nu este un element al mulțimii A, spunem că „x nu aparține mulțimii A" și scriem $x \notin A$.

O mulțime poate fi reprezentată astfel:

1. scriind elementele sale între două acolade: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;

2. cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler:



3. indicând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii:

$$A = \{x \mid x \text{ este număr natural par, mai mic decât } 10\}.$$

O mulțime ale cărei elemente sunt numere se numește mulțime **numerică**:
$A = \{1, 2, 3\}$ este o mulțime numerică, iar $B = \{a, b, c\}$ nu este o mulțime numerică.

Mulțimea care nu are niciun element se numește mulțimea **vidă** și se notează cu simbolul $\varnothing$.

Probleme rezolvate

1. Considerăm cuvântul „matematica" și mulțimea A, formată din literele acestuia.

a) Câte litere are cuvântul considerat?

b) Câte elemente are mulțimea A?

c) Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziții:

P_1: $m \in A$; P_2: $e \notin A$; P_3: $z \in A$; P_4: $m \in A$ și $t \notin A$; P_5: $c \notin A$ sau $t \in A$.

d) Stabiliți care dintre propozițiile următoare este adevărată:

Q_1: $A = \{m, a, t, e, i, c\}$; Q_2: $A = \{m, a, t, e, m, a, t, i, c, a\}$; Q_3: $A = \{a, e, i, c, m, t\}$;
Q_4: $A = \{m, t, c, a, e\}$.

Soluție: a) Cuvântul „matematica” are 10 litere.

b) Elementele unei mulțimi sunt distincte, deci mulțimea A are 6 elemente.

c) Avem: P_1 este adevărată, P_2 este falsă, P_3 este falsă, P_4 este falsă (căci $t \in A$), iar P_5 este adevărată (deoarece $t \in A$).

d) În scrierea unei mulțimi, fiecare element apare o singură dată, iar ordinea în care sunt scrise elementele nu contează. Prin urmare, Q_1 și Q_3 sunt adevărate, iar Q_2 și Q_4 sunt false.

2. Scrieți fiecare dintre următoarele mulțimi, enumerându-le elementele:

a) mulțimea cifrelor impare;

b) mulțimea cifrelor numărului 2023;

c) mulțimea divizorilor numărului 6;

d) mulțimea multiplilor numărului 25, care sunt mai mici decât 100;

e) mulțimea soluțiilor, numere naturale, ale ecuației $4x + 3 = 5$.

Soluție: a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; b) $B = \{0, 2, 3\}$; c) $C = \{1, 2, 3, 6\}$; d) $D = \{0, 25, 50, 75\}$; e) $E = \varnothing$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimea literelor pentru fiecare dintre următoarele cuvinte:

a) aritmetica; b) algebra; c) geometria.

2. Patru elevi, Ana, Barbu, Corina și Dan, au scris mulțimea cifrelor din care este format numărul 50053. Răspunsurile lor se pot vedea în tabelul următor.

Ana	Barbu	Corina	Dan
$\{3, 0, 5\}$	$\{5, 0, 0, 5, 3\}$	$\{0, 0, 3, 5, 5\}$	$\{5, 3, 0\}$

Care dintre cei patru elevi a răspuns corect?

3. În figura 1 sunt reprezentate mulțimile A și B. Scrieți cele două mulțimi, enumerându-le elementele.

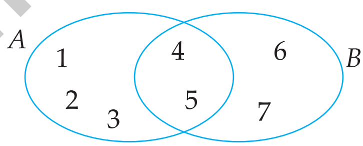


Fig. 1

4. Folosiți simbolurile „$\in$” sau „$\notin$” pentru a descrie relația în care se află fiecare număr din figura 2 față de mulțimile A și B.

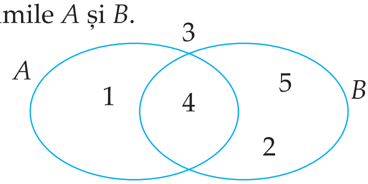


Fig. 2

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

(1p) **1.** Scrieți mulțimea literelor din care este format cuvântul „biblioteca”.

(1p) **2.** Determinați toate submulțimile mulțimii $\{a, b, c\}$.

(1p) **3.** Determinați mulțimea $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \leq 2x - 1 < 13\}$.

(1p) **4.** Calculați $D_{12} \cup D_{18}$ și $D_{12} \cap D_{18}$ (D_n este mulțimea divizorilor numărului natural n).

(1p) **5.** Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziții:
P_1: $4 \in \{0, 2, 4, 5\}$; P_2: $3 \in \{1, 2, 9, 12\}$;
P_3: $\{a, b, c\} \not\subset \{a, b, d, e\}$; P_4: $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$.

(1p) **6.** Dacă $A = \{1, 3, 5, 9\}$ și $B = \{2, 5, 9, 13, 15\}$, calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

(1p) **7.** Aflați $x \in \mathbb{N}$, știind că mulțimile $\{2, x + 1, 4x - 1\}$ și $\{x, 3, 2x + 3\}$ sunt egale.

(1p) **8.** Determinați mulțimile X și Y, astfel încât să fie îndeplinite următoarele trei condiții:
i) $X \cap Y = \{2, 5\}$; ii) $X \setminus Y = \{3, 7, 8\}$; iii) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

(1p) **9.** Mulțimile A și B au proprietățile: card A = card $B = 120$ și $\text{card}(A \cap B) = 40$. Aflați câte elemente are mulțimea $A \cup B$.

TESTUL 2

(1p) **1.** Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 9\}$. Care dintre următoarele mulțimi este cea care reprezintă scrierea mulțimii A prin enumerarea elementelor sale?
a) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$; **b)** $\{5, 6, 7, 8\}$; **c)** $\{6, 7, 8\}$; **d)** $\{6, 7, 8, 9\}$.

(1p) **2.** Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = k^2, k \in \mathbb{N}\}$. Câte elemente are mulțimea $A \cap B$?

(1p) **3.** Care dintre următoarele mulțimi este finită?
a) mulțimea literelor alfabetului latin;
b) mulțimea numerelor naturale divizibile cu 7;
c) mulțimea punctelor unei drepte;
d) mulțimea formată din toate submulțimile mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$?

(1p) **4.** Fie mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{a, c, d, e\}$. Calculați $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

CAPITOLUL II
RAPOARTE. PROPORȚII

II.1. RAPOARTE

• Fie a și b două numere raționale pozitive, cu $b \neq 0$. Numărul rațional $a : b$ se numește **raportul** numerelor a și b și se notează $\frac{a}{b}$; numerele a și b se numesc **termenii raportului**, iar câtul obținut prin împărțirea numărului a la numărul b se numește **valoarea raportului** $\frac{a}{b}$.

Exemplu: Raportul numerelor 5 și 4 este $\frac{5}{4}$, termenii raportului sunt numerele 5 și 4, iar valoarea raportului este $5 : 4 = 1{,}25$.

Observații:

1. Valoarea unui raport nu se schimbă dacă înmulțim sau împărțim ambii termeni ai săi cu același număr nenul: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ și $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$, pentru orice numere raționale pozitive a, b, c, cu $b \neq 0$ și $c \neq 0$.

2. Dacă numerele a și b reprezintă mărimi de aceeași natură, atunci pentru scrierea raportului $\frac{a}{b}$ este necesar ca cele două mărimi să fie exprimate folosind aceeași unitate de măsură; în această situație, raportul nu va avea unitate de măsură.

Exemplu: Dacă înălțimea Mariei este egală cu 1,2 m, iar înălțimea lui Dan este de 150 cm, atunci raportul înălțimilor celor doi copii este $\frac{120 \text{ cm}}{150 \text{ cm}} = \frac{4}{5}$.

3. Dacă numerele a și b reprezintă mărimi de tipuri diferite, atunci raportul $\frac{a}{b}$ este însoțit de unitate de măsură; astfel de rapoarte apar des în fizică.

Exemplu: Daria parcurge distanța de acasă până la școală (1,2 km), cu trotineta, în 20 de minute. Din egalitatea rapoartelor $\frac{1{,}2 \text{ km}}{20 \text{ min}} = \frac{3{,}6 \text{ km}}{60 \text{ min}}$ rezultă că viteza Dariei este de 3,6 km/h.

• **Exemple cunoscute de rapoarte:**

1. Raportul procentual este un raport de forma $\frac{p}{100}$, care se notează $p\%$.

2. Scara unei hărți este raportul dintre distanța pe hartă și distanța reală; se exprimă ca un raport cu numărătorul 1.

3. Densitatea populației dintr-o regiune este raportul dintre numărul de locuitori din acea regiune și suprafața corespunzătoare.

4. Titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului prețios și masa aliajului.

5. Viteza de deplasare este raportul dintre distanța parcursă și timpul corespunzător.

PROBLEME REZOLVATE

1. În clasa a VI-a A sunt 28 de elevi, dintre care 16 sunt băieți. Aflați valoarea raportului dintre numărul fetelor și numărul băieților din această clasă.

Soluție: În clasă sunt 28 – 16 = 12 fete, iar raportul dintre numărul fetelor și cel al băieților este egal cu $\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$, având valoarea 0,75.

2. Într-un manual de geografie este inclusă o hartă a Europei, având scara 1 : 20000000. Știind că pe acea hartă distanța dintre București și Viena este de aproximativ 5,35 cm, aflați distanța reală (pe teren) dintre cele două capitale.

Soluție: Scara hărții exprimă faptul că la 1 cm de pe harta respectivă corespund 20000000 cm reali (pe teren); prin urmare, distanța reală dintre București și Viena este egală cu 5,35 · 20000000 = 107000000 cm = 1070 km.

3. Aflați ce cantitate de aur conține un aliaj cu titlul egal cu 0,2, știind că respectivul aliaj este compus din aur și cupru, iar masa cuprului este de 920 g.

Soluție: Dacă notăm cu a masa metalului prețios (aur), atunci titlul aliajului este $\frac{a}{a+920}=$ 0,2, de unde $a = 0{,}2 \cdot a + 184$ și obținem $a = 230$ g.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți raportul numerelor:

a) 2 și 6; b) 7 și 10; c) 15 și 43;

d) 256 și 32; e) 3^3 și 3; f) 3,5 și 0,2.

2. Considerăm numerele $a = 12$ și $b = 24$. Aflați rapoartele numerelor de mai jos:

a) a și b; b) $2a$ și $a + b$; c) $3b - 10$ și $a + 20$.

3. Calculați valoarea rapoartelor numerelor:

a) 6 și 4; b) 3 și 12; c) 18 și 75;

d) 3^4 și 15; e) 2,5 și 12,5; f) 0,28 și 0,14.

4. Aflați numerele necunoscute din rapoartele următoare:

a) $\frac{a}{3}=1{,}5$; b) $\frac{7}{b}=2$; c) $\frac{25}{c}=0{,}5$;

d) $\frac{315}{15}=d$; e) $\frac{e}{3{,}4}=0{,}5$.

II.6. Regula de trei simplă

Probleme rezolvate

1. Din 40 kg de grâu se obțin, prin măcinare, 32 kg de făină. Câte kilograme de făină se vor obține din 125 kg de grâu?

Soluție: Mărind de un număr de ori cantitatea de grâu măcinată, cantitatea de făină obținută se mărește de același număr de ori; cele două mărimi sunt direct proporționale. Notând cu x cantitatea de făină cerută în problemă, avem că (40, 125) d.p. (32, x), prin urmare $\frac{40}{32} = \frac{125}{x}$, de unde $x = \frac{32 \cdot 125}{40} = 100$ (kg de grâu).

Reprezentăm schematic soluția astfel:

40 kg grâu .... 32 kg făină

d.p.

125 kg grâu .... x kg făină $\qquad x = \frac{32 \cdot 125}{40} = 100.$

2. Trei cai mănâncă fânul din iesle în 40 de minute. În cât timp ar termina fânul cinci cai?

Soluție: Cum cantitatea de fân este aceeași, mărind de un număr (rațional) de ori numărul cailor, timpul în care aceștia termină fânul se micșorează de același număr de ori; cele două mărimi sunt invers proporționale. Notând cu x timpul cerut în problemă, avem că (3, 5) i.p. (40, x), prin urmare $3 \cdot 40 = 5 \cdot x$, de unde $x = \frac{3 \cdot 40}{5} = 24$ (de minute).

Reprezentăm schematic soluția astfel:

i.p.

3 cai .... 40 minute

5 cai .... x kg minute $\qquad x = \frac{3 \cdot 40}{5} = 24.$

Probleme propuse

1. Un automobil consumă 6 ℓ de benzină pentru a parcurge 100 km. Cât consumă automobilul pe un traseu de 350 km?

2. Trei tractoare ară, într-o zi, o suprafață de 36 ha. De câte tractoare e nevoie pentru a ara, într-o zi, o suprafață de 84 ha?

3. Trei kilograme de mere costă 7,5 lei. Cât costă 7,5 kg de mere?

4. Pentru a confecționa 10 costume sunt necesari 32 m de stofă. Câte costume se pot confecționa din 51,2 m de stofă?

5. O mașină parcurge 16 km în 15 minute. Ce distanță va parcurge mașina în 3,5 ore, dacă merge cu aceeași viteză?

CAPITOLUL III
MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

III.1. NUMĂR ÎNTREG. MULȚIMEA $\mathbb{Z}$ A NUMERELOR ÎNTREGI

• **Mulțimea numerelor întregi** se notează cu $\mathbb{Z}$ și este:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Mulțimea numerelor întregi pozitive: $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Mulțimea numerelor întregi negative: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$.

Mulțimea numerelor întregi nenule: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Observăm că $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

Numărul întreg 0 nu este nici pozitiv, nici negativ.

• **Axa numerelor** este o dreaptă pe care au fost fixate: un punct O numit **origine**, un **sens pozitiv de parcurgere** indicat de o săgeată (de la origine spre dreapta) și o **unitate de măsură**.

Fiecărui număr întreg a îi corespunde pe axă un unic punct notat $P(a)$; numărul întreg a se numește **coordonata** (abscisa) punctului P. Originea axei numerelor are coordonata 0 și se notează $O(0)$.

Numerele întregi pozitive n corespund punctelor situate la dreapta originii, astfel încât distanța dintre origine și punctul corespunzător $P(n)$ să fie egală cu n unități de măsură. Similar, numerele întregi negative $-n$, (unde $n \in \mathbb{N}^*$) corespund punctelor situate la stânga originii, astfel încât distanța de la origine la punctul $P'(-n)$ să fie egală cu n unități de măsură.

P'	…	C'	B'	A'	O	A	B	C	D	E	…	P
$-n$	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…	n

Dacă două puncte sunt așezate simetric față de origine pe axă, atunci numerele corespunzătoare lor se numesc **numere opuse**.

Exemplu: Opusul lui 2 este -2, iar opusul lui -3 este 3.

• **Modulul** sau **valoarea absolută** a unui număr întreg a, notat cu $|a|$, este numărul natural ce reprezintă distanța de la origine la punctul care îi corespunde lui a pe axa numerelor. Modulul numărului întreg 0 este egal cu 0.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a > 0 \\ 0, \text{ dacă } a = 0 \\ -a, \text{ dacă } a < 0 \end{cases}.$$

Exemple: $|+1| = +1$, $|-2| = -(-2) = +2$, $|0| = 0$.

Proprietăți: **1.** $|a| > 0$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}^*$.

2. $|a| = 0$ dacă și numai dacă $a = 0$.

• **Compararea și ordonarea numerelor întregi.** Dintre două numere întregi reprezentate pe axa numerelor, numărul mai mare este situat în dreapta celuilalt.

Reguli pentru compararea numerelor întregi:

1. Dintre două numere întregi pozitive, mai mare este numărul cu modulul mai mare. Exemplu: $+2 < +5$.

2. Dintre două numere întregi negative, mai mare este numărul cu modulul mai mic. Exemplu: $-4 < -1$.

3. Dintre două numere întregi cu semne diferite, mai mare este numărul pozitiv. Exemplu: $-7 < +2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Asociați fiecărui număr ce apare în enunțurile de mai jos unul dintre semnele „+" sau „–":

a) Ana a primit de la bunici 250 de lei.
b) Bianca i-a dat Anei 100 de lei.
c) Codin a făcut scufundări până la o adâncime de 20 de metri.
d) Daria a escaladat un versant înalt de 40 de metri.
e) La Polul Nord temperatura a coborât cu 42° sub 0°.
f) În mijlocul verii, la noi sunt uneori peste 35°C.

2. Completați tabelul de mai jos:

n	-3			5	-17		$-(-2)$	
Opusul lui n		0	2			-8		$-(-1)$

3. Considerăm mulțimea $A = \{-36, -35, -34, \ldots, 46, 47, 48\}$. Stabiliți câte elemente ale mulțimii A au proprietatea că opusele lor sunt, la rândul lor, elemente ale mulțimii A.

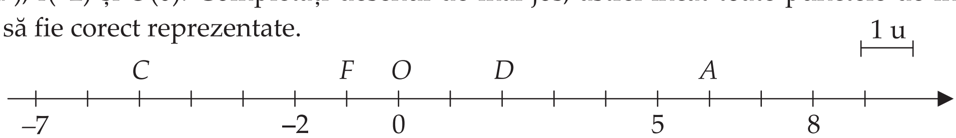
4. Reprezentați pe axa numerelor, folosind ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 1 cm, numerele întregi de mai jos:

a) $1, 3, -2, 4, -1, -4$;   b) $-3, 2, 5, 0, -6, -5$.

5. Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere întregi:

a) $5, -5, 10, 20, -30, -15$;   b) $75, -150, 100, 25, -200, -50$.

6. Considerăm pe axa numerelor punctele $A(6)$, $B(8)$, $C(-5)$, $D(2)$, $E(-3)$, $F(-1)$, $G(5)$, $H(-7)$, $I(-2)$ și $O(0)$. Completați desenul de mai jos, astfel încât toate punctele de mai sus să fie corect reprezentate.



III.7. ECUAȚII ȘI INECUAȚII ÎN MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

1. Un exemplu de **ecuație** (cu necunoscuta x) în mulțimea numerelor întregi este: $3x - 5 = x + 7$, $x \in \mathbb{Z}$ (1).

Se numește **soluție** a ecuației (1) orice număr întreg care verifică egalitatea (1).

2. Toate soluțiile ecuației formează **mulțimea soluțiilor ecuației**.

3. A rezolva o ecuație înseamnă a găsi toate soluțiile ei, adică a determina mulțimea soluțiilor ecuației.

4. Două **ecuații** se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

5. Procedee de a obține ecuații echivalente:

– efectuarea unor calcule în oricare dintre membrii ecuației;

– adunarea sau scăderea în ambii membri a aceluiași număr întreg;

– înmulțirea sau împărțirea ambilor membrii cu același număr întreg nenul.

6. Un exemplu de inecuație (cu necunoscuta x) mulțimea numerelor întregi este:

$$-4x + 2 \leq x - 13,\ x \in \mathbb{Z} \quad (2).$$

Se numește **soluție a inecuației** (2) orice număr întreg care verifică inegalitatea (2).

7. Toate soluțiile inecuației formează **mulțimea soluțiilor inecuației**.

8. A rezolva o inecuație înseamnă a găsi toate soluțiile inecuației, adică mulțimea soluțiilor.

9. Două **inecuații** se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

10. Procedee de a obține inecuații echivalente:

– efectuarea unor calcule în oricare dintre membrii inecuației;

– folosirea proprietăților relației de inegalitate în $\mathbb{Z}$:

- $a < b$ $(a \leq b) \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c$ $(a \pm c \leq b \pm c)$;
- $a < b$ $(a \leq b) \Leftrightarrow a \cdot p < b \cdot p$ $(a \cdot p \leq b \cdot p)$, dacă $p > 0$;
- $a < b$ $(a \leq b) \Leftrightarrow a \cdot n > b \cdot n$ $(a \cdot n \geq b \cdot n)$, dacă $n < 0$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Rezolvați ecuația $3x + 15 = x - 7$, $x \in \mathbb{Z}$.

Soluție: Avem $3x + 15 = x - 7 \mid -x \Leftrightarrow 2x + 15 = -7 \mid -15 \Leftrightarrow 2x = -22 \mid : 2 \Leftrightarrow x = -11$. Ecuația dată are o singură soluție, $x = -11$. Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-11\}$.

2. Rezolvați ecuația $5x + 2 \cdot (x - 1) = 5 - (x - 2)$, $x \in \mathbb{Z}$.

Soluție: Ecuația este echivalentă cu $5x + 2x - 2 = 5 - x + 2 \Leftrightarrow 7x - 2 = 7 - x \mid +x \Leftrightarrow 8x - 2 = 7 \mid +2 \Leftrightarrow 8x = 9 \mid : 8 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}$. Cum $\frac{9}{8}$ nu este număr întreg, rezultă că ecuația nu are nicio soluție, deci $S = \varnothing$.

3. Rezolvați inecuația $-4x + 2 \leq x - 13$, $x \in \mathbb{Z}$.

Soluție: Avem $-4x + 2 \leq x - 13 \mid -x \Leftrightarrow -5x + 2 \leq -13 \mid -2 \Leftrightarrow -5x \leq -15 \mid : (-5) < 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in \{3, 4, 5, \ldots\}$. Deci, mulțimea soluțiilor inecuației este $S = \{3, 4, 5, \ldots\}$.

CAPITOLUL IV
MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

IV.1. NUMĂR RAȚIONAL. MULȚIMEA $\mathbb{Q}$ A NUMERELOR RAȚIONALE

• **Mulțimea numerelor raționale:** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

Observații: 1. Au loc incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ este mulțimea numerelor raționale nenule.

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$, unde $\mathbb{Q}_-$ este mulțimea numerelor raționale negative și $\mathbb{Q}_+$ este mulțimea numerelor raționale pozitive.

3. Numărul rațional $\frac{a}{b}$ este întreg dacă și numai dacă a se divide cu b.

• **Forme de scriere a numerelor raționale.** Un număr rațional poate fi reprezentat:

i) prin fracții ordinare echivalente (reamintim că $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$, unde a, b, c, d sunt numere întregi cu $b \neq 0$ și $d \neq 0$);

ii) printr-o fracție zecimală finită;

iii) printr-o fracție zecimală infinită periodică (simplă sau mixtă).

• **Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale.** Un număr rațional pozitiv reprezentat prin fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}$ și $b \geq 2$, se transformă, împărțind numărul a la numărul b, în:

i) fracție zecimală finită – dacă descompunerea lui b în factori primi conține numai factorii 2 sau 5;

Exemple: $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $\frac{17}{4} = 4{,}25$.

ii) fracție zecimală periodică simplă – dacă descompunerea lui b în factori primi conține factori diferiți de 2 și de 5;

Exemple: $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$; $\frac{17}{11} = 1{,}(54)$; $\frac{125}{27} = 4{,}(629)$.

iii) fracție zecimală periodică mixtă – dacă descompunerea lui b în factori primi conține cel puțin unul din factorii 2 sau 5 și cel puțin un alt factor prim diferit de 2 și de 5.

Exemple: $\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$; $\frac{47}{30} = 1{,}5(6)$; $\frac{1801}{330} = 5{,}4(57)$.

• **Compararea și ordonarea numerelor raționale.** Dintre două numere raționale, este mai mare cel a cărui reprezentare pe axa numerelor este situată la dreapta reprezentării celuilalt.

Reguli pentru compararea numerelor raționale:

1. Dintre două numere raționale cu semne diferite, mai mare este numărul pozitiv.

Exemple: $-\frac{137}{2}<\frac{1}{2}$; $-13{,}21<0{,}37$.

2. Dintre două numere raționale negative, mai mare este cel cu modulul mai mic.

Exemple: $-\frac{3}{4}<-\frac{1}{4}$; $-13{,}5(7)<-13{,}5$.

• **Partea întreagă și partea fracționară ale unui număr rațional.** Pentru numărul rațional r, **partea** sa **întreagă** este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu r, notat $[r]$. Pentru orice $r \in \mathbb{Q}$ are loc: $[r]=n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \le r < n+1$.

Exemple: $\left[\frac{12}{5}\right]=2$, deoarece $2 \le \frac{12}{5} < 3$; $\left[-\frac{11}{2}\right]=-6$, deoarece $-6 \le -\frac{11}{2} < -5$; $[-13{,}(57)]=-14$, deoarece $-14 \le -13{,}(57) < 13$; $[-7]=-7$; $\left[\frac{12}{3}\right]=4$.

Pentru numărul rațional r, **partea** sa **fracționară** este numărul notat $\{r\}$, obținut ca diferență între r și $[r]$:

$$\{r\}=r-[r], \text{ oricare ar fi } r \in \mathbb{Q}.$$

Exemple: $\left\{\frac{12}{5}\right\}=\frac{12}{5}-2=\frac{2}{5}=0{,}4$; $\left\{-\frac{11}{2}\right\}=-\frac{11}{2}-(-6)=\frac{1}{2}=0{,}5$; $\left\{\frac{12}{3}\right\}=\frac{12}{3}-4=0$; $\{-13{,}(57)\}=-13{,}(57)-(-14)=0{,}(42)$; $\{-7\}=-7-(-7)=0$.

Observație: $[r] \in \mathbb{Z}$ și $0 \le \{r\} < 1$, pentru orice $r \in \mathbb{Q}$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Considerăm mulțimea $A=\left\{-3;\ 0{,}375;\ -1{,}8(3);\ -0{,}(45);\ \frac{56}{14}\right\}$.

a) Arătați că $A=\left\{-3,\ \frac{3}{8},\ -\frac{11}{6},\ -\frac{5}{11},\ 4\right\}$.

b) Determinați $A \cap \mathbb{N}$.

c) Câte elemente are mulțimea $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$?

Soluție: a) $0{,}375=\frac{375}{1000}=\frac{3}{8}$; $-1{,}8(3)=-1\frac{83-8}{90}=-1\frac{75}{90}=-1\frac{5}{6}=-\frac{11}{6}$; $-0{,}(45)=-\frac{45}{99}=-\frac{5}{11}$; $\frac{56}{14}=4$. Rezultă că $A=\left\{-3,\ \frac{3}{8},\ -\frac{11}{6},\ -\frac{5}{11},\ 4\right\}$.

b) $A \cap \mathbb{N}=\{4\}$.

c) $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \left\{\frac{3}{8}, -\frac{11}{6}, -\frac{5}{11}\right\}$, mulțime care are trei elemente.

2. Numerelor raționale $a = -\frac{1}{20}$ și $b = -\frac{1}{21}$ le asociem pe axa numerelor punctele A și B.

a) Reprezentați punctele A și B pe axa numerelor.
b) Arătați că $a < b$.
c) Calculați lungimea segmentului AB.
d) Scrieți trei numere raționale cuprinse între a și b.

Soluție: a) 

unde $OA = \frac{1}{20}$ și $OB = \frac{1}{21}$.

b) Cum punctul A este situat pe axa numerelor la stânga punctului B, rezultă că $a < b$.

c) $AB = OA - OB = \frac{1}{420}$.

d) Aducem fracțiile la același numitor: $a = -\frac{21}{420}$, $b = -\frac{20}{420}$. Amplificăm fracțiile obținute pentru a mări distanța dintre numărătorii lor. De exemplu, deoarece $a = -\frac{210}{4200}$ și $b = -\frac{200}{4200}$, numerele cerute pot fi $-\frac{203}{4200}$, $-\frac{202}{4200}$ și $-\frac{201}{4200}$.

3. Determinați numerele întregi x, știind că:

a) $\frac{-15}{2x+1}$ este număr natural;

b) $\frac{3x+7}{2x-1}$ este număr întreg.

Soluție: a) $\frac{-15}{2x+1}$ este număr natural dacă și numai dacă $2x + 1$ este divizor negativ al numărului -15, deci $2x + 1 \in \{-15, -5, -3, -1\}$. Rezultă că $x \in \{-8, -3, -2, -1\}$.

b) $\frac{3x+7}{2x-1}$ este un număr întreg dacă și numai dacă $2x - 1 \mid 3x + 7$. Cum $2x - 1 \mid 2x - 1$ pentru orice x întreg, rezultă că $2x - 1 \mid 6x + 14$ și $2x - 1 \mid 6x - 3$. De aici, $2x - 1 \mid 17$. Astfel, $2x - 1 \in \{-17, -1, 1, 17\}$, prin urmare $x \in \{-8, 0, 1, 9\}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți sub forma $+\frac{a}{b}$ sau $-\frac{a}{b}$, unde a, b sunt numere naturale nenule, numerele:

a) $\frac{-5}{11}$; b) $\frac{6}{-13}$; c) $\frac{-5}{-9}$; d) $-\frac{-4}{19}$; e) $-\frac{-2}{-3}$; f) $-\frac{9}{-8}$; g) 2; h) –3.

CAPITOLUL V
NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

V.1. Unghiul. Recapitulare și completări

Definiție. Unghiul este reuniunea a două semidrepte care au aceeași origine.

Cele două semidrepte se numesc **laturile** unghiului, iar originea lor comună se numește **vârful** unghiului.

În figura 1 este reprezentat unghiul xOy. Laturile sale sunt semidreptele Ox și Oy, iar vârful său este punctul O.

Dacă pe semidreptele Ox și Oy considerăm punctele A, respectiv B, unghiul poate fi notat $\sphericalangle AOB$. Dacă nu există pericol de confuzie, putem nota simplu $\sphericalangle O$.

Interiorul unghiului xOy, notat $\mathrm{Int}(\sphericalangle xOy)$, este intersecția semiplanului determinat de dreapta OA ce conține punctul B cu semiplanul determinat de dreapta OB ce conține punctul A. Porțiunea din plan rămasă după eliminarea unghiului și a interiorului său se numește **exteriorul** unghiului.

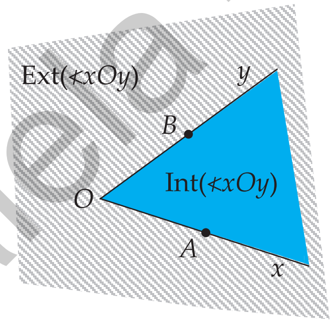


Fig. 1

Unghiul alungit este un unghi ale cărui laturi sunt două semidrepte opuse.

Unghiul nul este un unghi ale cărui laturi sunt două semidrepte identice.

Un unghi care nu este nici alungit și nici nul numește **unghi propriu**.

Măsura unui unghi este un număr de la 0 la 180, care se asociază unghiului prin *măsurare cu raportorul* (figura 2).

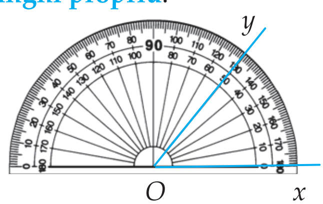


Fig. 2

Unghiul alungit se împarte în 180 de părți egale, numit **grade**. La rândul său, gradul se împarte în 60 de **minute**, iar minutul în 60 de **secunde**.

$$1° = 60', \qquad 1' = 60''$$

Clasificarea unghiurilor proprii (figura 3):

- unghi **ascuțit**: are măsura cuprinsă între 0° și 90°;
- unghi **drept**: are măsura de 90°;
- unghi **obtuz**: are măsura cuprinsă între 90° și 180°.

Unghiul nul are măsura de 0°, iar cel alungit are măsura de 180°.

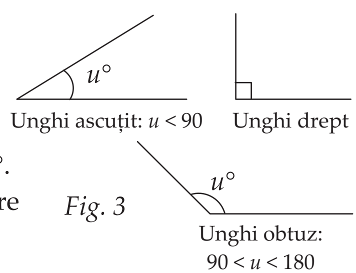


Fig. 3

Unghiurile congruente sunt două sau mai multe unghiuri având aceeași măsură; notăm $\sphericalangle xOy \equiv \sphericalangle x'O'y'$ sau, mai simplu, $\sphericalangle xOy = \sphericalangle x'O'y'$ (numerele care exprimă măsurile celor două unghiuri sunt egale).

PROBLEME PROPUSE

1. Stabiliți care dintre notațiile de mai jos desemnează unghiul din figura 4:
a) $\sphericalangle AOB$; b) $\sphericalangle AOC$; c) $\sphericalangle DOB$; d) $\sphericalangle DAB$;
e) $\sphericalangle O$; f) $\sphericalangle BOC$; g) $\sphericalangle CAB$; h) $\sphericalangle COD$.

2. Numiți toate unghiurile formate de semidreptele din figura 5.

3. Urmărind figura 6, stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele afirmații:
a) $C \in \sphericalangle AOD$; b) $E \notin \sphericalangle BOC$; c) $E \in \mathrm{Int}(\sphericalangle AOB)$;
d) $E \in \mathrm{Ext}(\sphericalangle AOB)$; e) $(OB \subset \mathrm{Int}(\sphericalangle AOC)$; f) $\sphericalangle AOB \subset \sphericalangle AOC$.

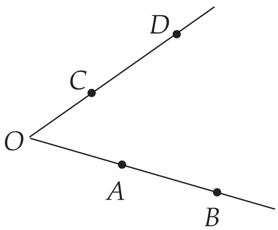


Fig. 4

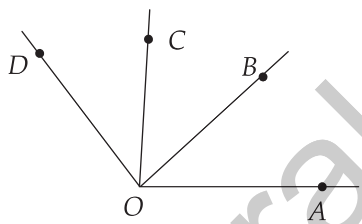


Fig. 5

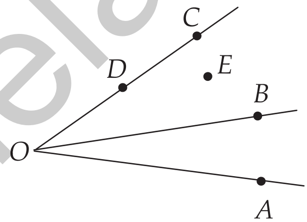


Fig. 6

4. În figura 7 este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele afirmații:
a) $D \in \mathrm{Int}(\sphericalangle ABC)$; b) $B' \in \mathrm{Int}(\sphericalangle A'AB)$;
c) $C' \in \mathrm{Int}(\sphericalangle A'AB)$; d) $D' \in \mathrm{Int}(\sphericalangle A'AB)$;
e) $D' \in \mathrm{Int}(\sphericalangle A'AD)$; f) $D' \in \mathrm{Int}(\sphericalangle C'CD)$.

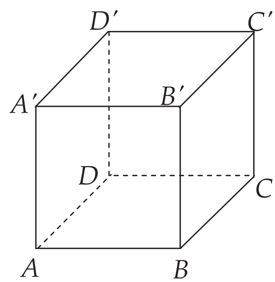


Fig. 7

5. Desenați două unghiuri $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle PQR$, astfel încât:
a) $\mathrm{Int}(\sphericalangle AOB) \cap \mathrm{Int}(\sphericalangle PQR) = \varnothing$;
b) $\mathrm{Int}(\sphericalangle AOB) \subset \mathrm{Int}(\sphericalangle PQR)$;
c) $\mathrm{Int}(\sphericalangle AOB) \cap \mathrm{Int}(\sphericalangle PQR) \neq \varnothing$ și $\mathrm{Int}(\sphericalangle AOB) \not\subset \mathrm{Int}(\sphericalangle PQR)$.

6. Măsurați cu ajutorul raportorului unghiurile din figura 8 și scrieți măsura fiecăruia:

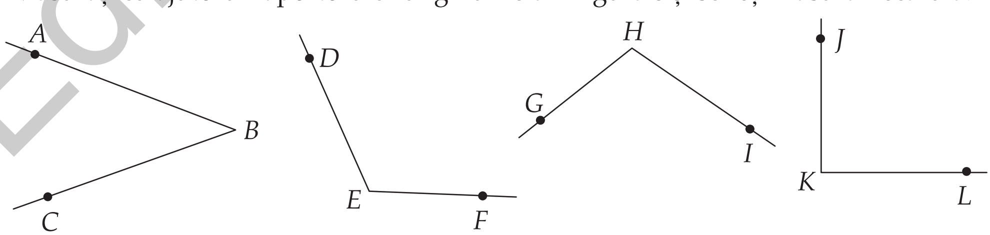


Fig. 8

V.10. CERCUL. ELEMENTE ÎN CERC. UNGHI LA CENTRU

Cercul de centru O și rază R reprezintă mulțimea punctelor din plan situate la distanța R față de punctul O, unde O este un punct fixat, iar R este un număr (pozitiv) dat: $\mathcal{C}(O, R) = \{A \in \mathcal{P} \mid OA = R\}$.

Cercul se construiește folosind **compasul**.

Segmentele care unesc centrul O cu puncte ale cercului se numesc **raze** și au lungimea egală cu R. În figura 1, segmentele OA, OB, OA' sunt raze ale $\mathcal{C}(O, R)$.

Un segment care unește două puncte ale cercului se numește **coardă**. O coardă care conține centrul cercului se numește **diametru**; despre capetele sale vom spune că sunt puncte **diametral opuse**. Lungimea unui diametru este egală cu $2R$ și este cea mai mare lungime posibilă a unei coarde. În figura 1, AB este o coardă, iar AA' este un diametru în $\mathcal{C}(O, R)$.

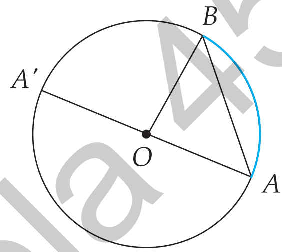


Fig. 1

Două cercuri sunt **congruente** atunci când au razele egale.

Interiorul unui cerc $\mathcal{C}(O, R)$ reprezintă mulțimea punctelor planului situate față de O la o distanță mai mică decât raza: Int $\mathcal{C}(O, R) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM < R\}$.

Exteriorul unui cerc $\mathcal{C}(O, R)$ reprezintă mulțimea punctelor planului situate față de O la o distanță mai mare decât raza: Ext $\mathcal{C}(O, R) = \{N \in \mathcal{P} \mid ON > R\}$.

Discul de centru O și rază R este reuniunea dintre $\mathcal{C}(O, R)$ și interiorul său:

$$\mathcal{D}(O, R) = \{P \in \mathcal{P} \mid OP \le R\}.$$

Arcul de cerc este mulțimea punctelor cercului cuprinsă între două puncte distincte date, numite **capetele** (**extremitățile**) arcului. Dacă extremitățile unui arc sunt puncte diametral opuse, arcul se numește **semicerc**.

Două puncte A, $B \in \mathcal{C}(O, R)$ care nu sunt diametral opuse determină două arce: arcul mic $\overset{\frown}{AB}$ – partea din cerc cuprinsă în interiorul unghiului AOB și arcul mare $\overset{\frown}{AB}$ – partea din cerc aflată în exteriorul unghiului AOB. În figura 1, arcul mic $\overset{\frown}{AB}$ este cel colorat cu albastru. Prin notația $\overset{\frown}{AB}$ vom înțelege că ne referim la arcul mic. Pentru a nota arcul mare, fie vom preciza acest lucru în cuvinte, fie vom folosi o a treia literă; în figura 1, arcul mare $\overset{\frown}{AB}$ poate fi notat $\overset{\frown}{AA'B}$.

Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numește **unghi la centru**; laturile sale sunt raze ale cercului (sau prelungirile lor). În figura 1, unghiul AOB este unghiul la centru care corespunde arcului (mic) $\overset{\frown}{AB}$.

Măsura unui arc (mic) al unui cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător:

$$\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle AOB.$$

Măsura arcului mare $\overset{\frown}{AB}$ este $\overset{\frown}{AA'B} = 360° - \overset{\frown}{AB}$.

Măsura unui semicerc este 180°, iar măsura unui cerc este 360°.

PROBLEME PROPUSE

1. a) Un cerc are raza de 5,2 cm. Aflați lungimea diametrului cercului.
b) Un cerc are diametrul de 5,2 cm. Aflați lungimea razei cercului.

2. Desenați un cerc $\mathscr{C}(O, R)$ cu $R = 2{,}5$ cm și trei raze OA, OB și OC ale cercului.

3. Desenați un cerc având diametrul de 7 cm și trei diametre AB, CD și EF ale acestuia. Care este punctul de intersecție a celor trei diametre ?

4. Desenați un segment AB cu lungimea de 3 cm. Cu ajutorul compasului, trasați:
a) cercul de centru A și rază AB;
b) cercul de centru B și rază AB;
c) cercul de diametru AB.

5. Desenați un cerc de centru O și rază $R = 4$ cm și cinci puncte A, B, C, D și E, astfel încât $OA = 2{,}5$ cm, $OB = 5$ cm, $OC = 4$ cm, $OD = 1$ cm, iar $OE = 6{,}5$ cm. Care dintre puncte sunt în interiorul cercului? Dar în exteriorul lui? Care dintre puncte aparțin discului de centru O și rază R?

6. Cercul de la centrul unui teren de fotbal are raza $R = 9{,}15$ m. Trei jucători A, B și C se află la distanțele $OA = 8$ m, $OB = 10{,}1$ m, respectiv $OC = 9{,}15$ m față de punctul O ce marchează centrul terenului. Stabiliți poziția fiecărui jucător față de cerc.

7. Desenați un cerc de centru O și rază $R = 4$ cm și șase puncte A, B, C, D, E și F, astfel încât $OA = OB = OC = OD = OE = OF = 4$ cm, iar $AB = BC = CD = DE = EF = 4$ cm. Ce lungime are segmentul AF?

8. Desenați două puncte A și B, astfel încât $AB = 3$ cm, apoi trei cercuri $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ și $\mathscr{C}_3$ care să conțină punctele A și B.

9. Desenați un cerc și trei axe de simetrie ale sale. Câte axe de simetrie are cercul?

10. Fie AB o coardă a cercului de centru O. Arătați că punctul O aparține mediatoarei segmentului AB.

11. Fie AB o coardă a cercului $\mathscr{C}(O, R)$, unde $R = 12$ cm. Distanța de la punctul O la dreapta AB este OM, iar $AM = \frac{1}{2}OA$ (figura 5). Determinați lungimea coardei AB.

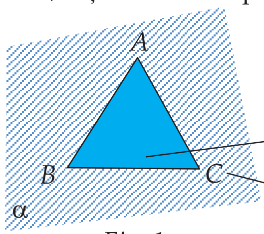
12. Pe diametrul MN al cercului $\mathscr{C}(O, R)$, $R = 6$ cm, se consideră punctele P și Q, astfel încât $MP = 2NQ$ și $PQ = 3NQ$, iar coardele AB și CD sunt perpendiculare pe dreapta MN (figura 6). Determinați distanțele de la punctul O la dreptele AB, respectiv CD.

13. În figura 7, punctele A și B aparțin cercului de centru O.
a) Completați desenul cu coarda AB.
b) Colorați cu roșu arcul mic $\overset{\frown}{AB}$ și cu albastru arcul mare $\overset{\frown}{AB}$.
c) Desenați unghiul la centru corespunzător arcului mic $\overset{\frown}{AB}$.

CAPITOLUL VI
TRIUNGHIUL

VI.1. Triunghiul: definiție, elemente. Perimetru. Clasificări

Definiție. Triunghiul *ABC* este reuniunea segmentelor AB, BC și CA, unde A, B și C sunt trei puncte necoliniare, numite **vârfurile** triunghiului.



$\Delta ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$

$\text{Int } ABC = \text{Int}(\sphericalangle A) \cap \text{Int}(\sphericalangle B) \cap \text{Int}(\sphericalangle C)$

$\text{Ext } ABC = \alpha \setminus (\Delta ABC \cup \text{Int } ABC)$

Fig. 1

Elemente:

- **laturi:** segmentele AB, BC și AC;
- **unghiuri:** $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$.

În mod uzual, lungimile laturilor triunghiului se notează folosind litera mică ce corespunde unghiului care se opune laturii, ca în figura 2.

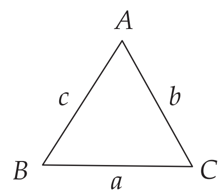


Fig. 2

Perimetrul triunghiului ABC este suma lungimilor laturilor acestuia:

$$\mathscr{P} = AB + BC + CA \; (= c + a + b).$$

Clasificarea triunghiurilor

- **În funcție de lungimile laturilor:**

1. Triunghiul **echilateral** este cel care are toate laturile egale: $a = b = c$ (figura 3).

2. Triunghiul **isoscel** este cel care are două laturi egale: $a = b$ sau $a = c$ sau $b = c$ (situația din figura 4). Latura care nu este implicată în egalitățile de mai sus se numește **baza** triunghiului isoscel. *Atenție:* triunghiul echilateral este isoscel în trei moduri, oricare latură putând fi considerată bază.

3. Triunghiul **oarecare** (**scalen**) este cel în care nu există o relație precisă între laturi. În unele cărți, prin triunghi oarecare se înțelege un triunghi cu laturile diferite două câte două: $a \neq b \neq c \neq a$ (figura 5).

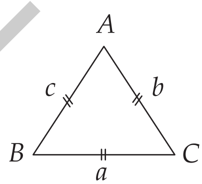


Fig. 3

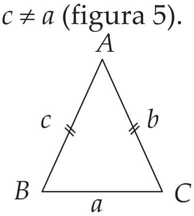


Fig. 4

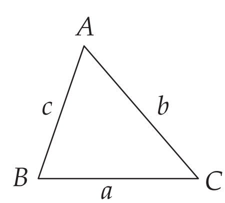


Fig. 5

• **În funcție de măsurile unghiurilor:**

1. Triunghiul **ascuțitunghic** este cel care are toate unghiurile ascuțite (triunghiurile din figurile 3, 4 și 5 sunt toate ascuțitunghice).

2. Triunghiul **dreptunghic** este cel care are un unghi drept (celelalte două fiind ascuțite). Laturile care formează unghiul drept se numesc **catete**, iar latura care se opune unghiului drept se numește **ipotenuză** (figura 6).

3. Triunghiul **obtuzunghic** este cel care are un unghi obtuz (celelalte două fiind ascuțite; figura 7).

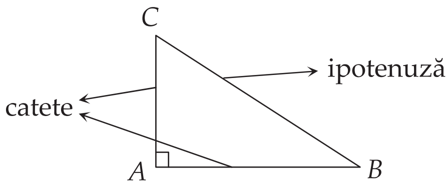


Fig. 6

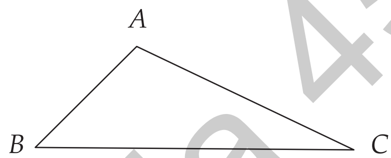


Fig. 7

PROBLEME REZOLVATE

1. Urmăriți figura 8 și precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a) Segmentul BD este latură a triunghiului ABC.
b) $\sphericalangle ABD$ este unghi al triunghiului ABC.
c) D este vârf al triunghiului ABC.
d) Punctul D aparține triunghiului ABC.
e) Punctele B, D și C sunt vârfuri ale unui triunghi.

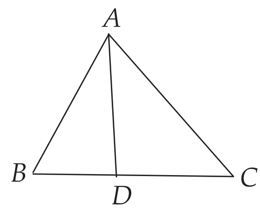


Fig. 8

Soluție: a) Fals: segmentul BD este inclus în latura BC, dar nu coincide cu aceasta.
b) Adevărat: este tocmai unghiul B al triunghiului.
c) Fals: vârfurile triunghiului ABC sunt punctele A, B și C.
d) Adevărat: punctul D aparține segmentului BC, deci aparține triunghiului ABC, care este reuniunea segmentelor AB, BC și AC.
e) Fals: cele trei puncte sunt coliniare.

2. Fie A și B două puncte date în plan. Câte triunghiuri isoscele ABC cu baza AB există? Câte dintre acestea sunt echilaterale?

Soluție: Deschidem compasul astfel încât distanța r dintre vârfuri să fie mai mare decât jumătatea lungimii segmentului AB. Cu vârful în A, apoi în B, trasăm arce de cerc. Punctul C de intersecție a celor două arce este egal depărtat de punctele A și B: $CA = CB = r$ (figura 9), prin urmare triunghiul ABC este isoscel, cu baza AB. Cum deschiderea compasului este oarecare (cu restricția inițială $r > \frac{1}{2}AB$), există o infinitate de puncte C cu proprietatea

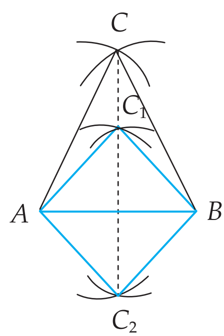


Fig. 9

din enunț. Toate aceste puncte *C* sunt situate pe mediatoarea segmentului *AB* (dreapta punctată din figura 9). Triunghiurile echilaterale *CAB* sunt în număr de două: ele se obțin atunci când $r = AB$, triunghiurile fiind cele albastre din figura 9.

PROBLEME PROPUSE

1. Desenați un triunghi *ABC*. Numiți vârfurile, laturile și unghiurile sale. Folosind rigla, determinați perimetrul triunghiului.

2. Urmăriți figura 10 și precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a) $D \in \text{Int } ABC$; b) $E \in \text{Int } ABC$;
c) $F \in \text{Ext } ABC$; d) $F \in \Delta ABC$;
e) $D \in \Delta ABC$; f) $A \notin \Delta DAB$.

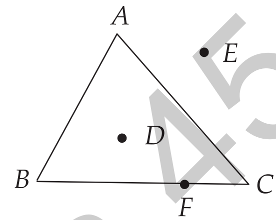


Fig. 10

3. Desenați un triunghi *ABC* și punctele coliniare *D*, *E*, *F*, astfel încât $D \in \text{Int } ABC$, $E \in \Delta ABC$, $F \in \text{Ext } ABC$.

4. În figura 11 este reprezentat un triunghi dreptunghic *ABC*.

a) Care este unghiul drept?
b) Care sunt catetele triunghiului? Dar ipotenuza sa?
c) Care sunt unghiurile alăturate ipotenuzei?

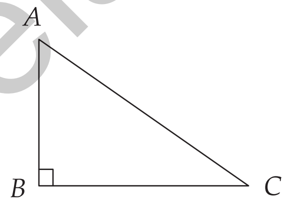


Fig. 11

5. În figura 12 sunt desenate cele două echere din trusa geometrică. În ce categorie se încadrează fiecare în clasificarea triunghiurilor în funcție de laturi? Dar în clasificarea în funcție de unghiuri?

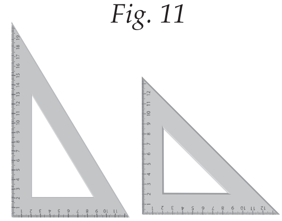


Fig. 12

6. Desenați un triunghi echilateral *ABC* cu latura de 4 cm și un triunghi echilateral *MNP* cu latura de 6 cm. Măsurați, folosind raportorul, cele șase unghiuri ale celor două triunghiuri. Ce observați?

7. Calculați perimetrul triunghiului *ABC*, știind că:

a) $AB = 6$ cm, $BC = 7{,}5$ cm, $AC = 8{,}5$ cm;
b) $AB = AC = 5$ cm, $BC = 4$ cm;
c) triunghiul *ABC* este echilateral, cu $AB = 5$ cm.

8. Un triunghi echilateral are perimetrul de 21,6 cm. Determinați lungimea laturii triunghiului.

9. Două dintre laturile unui triunghi isoscel au lungimile 3 cm, respectiv 4 cm. Determinați perimetrul triunghiului.

10. Lungimile laturilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4, iar perimetrul triunghiului este 108 cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului.

RECAPITULARE FINALĂ

ARITMETICĂ

1. Determinați elementele următoarelor mulțimi:
$A = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ și n împărțit la 7 dă câtul egal cu restul$\}$,
$B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 2^n < 1000\}$, $C = \{n = \overline{ab} \mid a + b = 6\}$, $D = \{n = \overline{ab} \mid a \cdot b = 18\}$.

2. Determinați numărul de elemente ale fiecăreia dintre următoarele mulțimi: $A = \{29, 30, 31, \ldots, 104\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid 16 < n^2 < 81\}$, $C = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n^3 < 2022\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x + 1$ divide $60\}$.

3. Fie mulțimile $A = \{0, 1, 4\}$ și $B = \{0, 1, 3\}$. Mulțimea $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ este egală cu:
a) $\{0, 1, 3, 4\}$; b) $\{0, 1\}$; c) $\{3, 4\}$; d) $\{1, 3, 4\}$.

4. Determinați $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$, știind că $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \,\vdots\, (-5)$ și $-7 < x < 10\}$, iar $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x - 2) \mid 3\}$.

5. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x = 3n - 1, n = 1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x = 2^n, n = 0, 1, 2, 3\}$ și $C = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Determinați $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \cap C$ și $B \setminus C$.

6. Se consideră $a = 64^5 \cdot 81^3$.
a) Calculați sfertul lui a și triplul lui a.
b) Arătați că numărul $\dfrac{a}{12^{12}}$ este natural.
c) Arătați că a este pătrat perfect și cub perfect.
d) Determinați ultima cifră a numărului a.

7. Se consideră numerele $a = 792$, $b = 756$.
a) Arătați că 18 este divizor comun al celor două numere.
b) Determinați cel mai mare divizor comun al celor două numere.
c) Câți divizori comuni au numerele a și b?

8. Se consideră numerele $a = 120$, $b = 144$.
a) Este 2160 multiplu comun al numerelor date?
b) Determinați cel mai mic multiplu comun al numerelor date.
c) Câți multipli comuni, de patru cifre, au cele două numere?

9. Fie a și b două numere naturale care verifică condițiile: $(a, b) = 5$ și $[a, b] = 175$.
a) Arătați că $a \cdot b = 875$.
b) Determinați a, b, $a < b$, care verifică condițiile din enunț.

10. Împărțind numerele 1832, 2927 și 2572 la același număr natural nenul n, se obțin resturile 17, 23, respectiv 31.
a) Poate fi numărul natural n egal cu 31?
b) Determinați toate valorile posibile ale numărului n care verifică cerințele din enunț.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

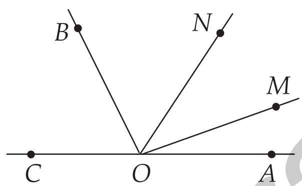
PROBLEME RECAPITULATIVE – CLASA A V-A

1. 8976; 1902. **2.** Numerele sunt $\overline{147d}, \overline{238d}, \overline{329d}$, $d = 0, 1, \ldots, 9$, deci 30 de numere. **3.** $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 117 \cdot 3 = 540$ cifre. **4.** Diferența maximă este $204 = 205 - 1$. Diferența minimă este $4 = 105 - 101$. **5.** $76 \cdot 57 = 4332$; $76 \cdot 57 + 75 = 4407$. **6.** 1023. **7.** 975. **8.** a) 9 numere; b) 21 de numere. **9.** a) 2; b) 3500. **10.** $a = 1$, $b = 0$; $a^b = 1$, $b^a = 0$. **11.** a) 0; b) 0; c) 1; d) 4. **12.** De exemplu: $10 = 10 + 0 = 10 - 0 = 10 \cdot 1 = 10 : 1 = 10^1$. **13.** a) $1089 = 33^2$; b) $36^2 < 1365 < 37^2$. **14.** Numerele sunt $\overline{234ab}, \overline{a234b}, \overline{ab234}$, deci $100 + 90 + 90 = 280$ de numere. **15.** Notăm cu c_1, c_2 câturile obținute și cu n numărul căutat. Atunci $n = 9c_1 + 7$, $c_1 = 8c_2 + 5$, $c_2 = 7 \cdot 6 + 3$. Rezultă că $n = 3292$. **16.** a) 194 sau 244; b) 524. **17.** a) De exemplu: $y = 1$, $x = 14$, $z = 21$; b) $S = 3(2x + 3y) + 4(4y + 3z) = 361$. **18.** a) A; b) A; c) A; d) F; e) F; f) A. **19.** 1 sau 4. **20.** 18. **21.** 60. **22.** 46. **23.** 1080; 5535. **24.** $A = 2^{2n} \cdot 3^n \cdot (4 \cdot 3 + 2^3 - 3) = 2^{2n} \cdot 3^n \cdot 17$ și cum $n \in \mathbb{N}^*$, A se divide cu $17 \cdot 2^2 \cdot 3 = 204$. **25.** a) 10035; 99990; b) Cum $10035 = 9 \cdot 5 \cdot 223$ și $99990 = 9 \cdot 5 \cdot 2222$, numerele căutate sunt $45 \cdot 223$, $45 \cdot 224$, …, $45 \cdot 2222$, deci 2000 de numere. **26.** a) $799 = 47 \cdot 17$ și $2632 = 47 \cdot 56$; b) $7560 = 120 \cdot 63$ și $7560 = 135 \cdot 56$. **27.** a) 23,23; b) 17,81; c) 0,88; d) 6,5; e) 2,36; f) 2,27. **28.** a) 0,84; b) 19,44; c) 1,8; d) 0,11; e) 112; f) 40. **29.** a) 0,045; b) 36; c) 1; d) 5. **30.** a) $\frac{1}{9}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1,8; d) 2,8; e) 3. **31.** $\frac{5}{14} = 0{,}357(142857)$ este fracție periodică mixtă. Suma primelor 100 de zecimale este egală cu $3 + 5 + 7 + 16(1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7) + 1 = 448$. **32.** 25,2 lei. **33.** 80 tone. **34.** Împreună, cele două roți fac $30 \cdot 2 = 60$ km. Fiecare roată face $60 : 3 = 20$ km. **35.** În prima etapă merge $24 \cdot 1\frac{1}{3}$ km $= 32$ km. În etapa a doua va merge 25 km în $25 : 30$ h $= \frac{5}{6}$ h $= 50$ minute. **36.** a) $x = 8$; b) $x = 4$; c) $x = \frac{2}{3}$; d) $x = 3$. **37.** a) 8; b) 4,5; c) 225. **38.** 5 lei și 7 lei. **39.** Fie S suma de bani și n prețul unui caiet. Atunci $S = 4n - 2$ și $S + 15 = 5n + 5$. Rezultă $n = 8$, $S = 30$ lei. **40.** 125 și 100. **41.** Fie x prețul rochiei. Atunci $80 + \frac{2}{3}x = x$, de unde $x = 240$ lei. **42.** Fie x lungimea fiecărei bucăți. Atunci $x - 18 = 3(x - 34)$. Rezultă $x = 42$ m. **43.** Fie f numărul fetelor din clasă și b numărul băieților din clasă. Atunci $f = b + 8$ și $f = 4(b - 4)$. Rezultă $f = 16$, $b = 8$. Sunt 24 de elevi. **44.** Fie x numărul de pagini ale cărții. Atunci $\frac{x}{5} = \frac{x}{7} + 8$. Rezultă că $x = 140$. **45.** Fie x numărul de copii care au mâncat tort și au băut suc. Atunci $2x + \frac{x}{4} = 27$. Rezultă că $x = 12$. Ionel a avut 11 invitați. *Variantă:* 4 copii consumă 8 sucuri și un tort. Sunt $27 : 9 = 3$ grupe de câte 8 sucuri și un tort, deci 12 copii. Ionel a avut 11 invitați. **46.** Într-o oră Radu repară $\frac{1}{4}$ din gard, Ioana $\frac{1}{6}$, iar Tudor $\frac{1}{3}$. Lucrând împreună, într-o oră cei trei copii repară $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ din gard, deci $\frac{3}{4}$ din gard. Cei trei copii au nevoie de $\frac{4}{3}$ ore, deci o oră și 20 de minute. **47.** $S \geq 2{,}95 \cdot 10 = 29{,}5$; $S < 2{,}95 \cdot 11 = 32{,}45$; $S \in \mathbb{N}$, deci $S =$ $= 30$, $S = 31$ sau $S = 32$. **48.** a) În zilele 2, 3, 4 și 5 trebuie să viziteze cât mai puține obiective, deci 6, 7, 8 și 9 obiective. În ziua 6 vizitează maximum $52 - (6 + 7 + 8 + 9) = 17$ obiective; b) Turistul vizitează în cele șase zile 5, a, b, c, d, e obiective, $5 < a < b < c < d < e$. Astfel, $52 =$ $= 5 + a + b + c + d + e \geq 5 + a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 4)$. Rezultă că $5a < 37$ și de aici $a_{max} =$ $= 7$. De exemplu, vizitează 5, 7, 8, 9, 10, 13 obiective. **49.** a) A; b) F; c) A; d) A; e) F; f) A; g) F. **50.** a) 4 drepte; b) 6 segmente. **51.** 10 cm sau 4 cm. **52.** a) A este între B și C; b) B este între A și C; c) C este între A și B. **53.** 2 cm. **54.** a) Semidreptele Ox, Oy; b) Punctul O; c) Fals; d) Adevărat; e) Semidreapta OD este în interiorul unghiului xOy. **55.** 44° sau 102°. **56.** a) $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOC - \sphericalangle AOB = 90°$; b) $\sphericalangle AOD = 180°$. **57.** a) $\sphericalangle MON = \sphericalangle AOB = 20°$; b) 70°. **58.** a) $x = 24°$; b) $x = 16°$. **59.** Fie $EH = x$; atunci $BE = 2x$ și $AB = 4x$, deci perimetrul figurii $AHIJFGCD$ este $22x$; a) 66 cm; b) $AH = 21$ cm. **60.** Fie l lungimea dreptunghiului și l lățimea dreptunghiului. Din $L \cdot l = 40$ și $(L + 2)l = 50$ rezultă $l = 5$ m, $L = 8$ m. Astfel, perimetrul dreptunghiului este egal cu 26 m.

Teste inițiale

Testul 1. **1.** 1. **2.** 61. **3.** $a > d > c > b$. **4.** 10 timbre. **5.** $a = 10$, $b = 2$; media aritmetică = 6. **6.** b) 4 cm; c) 16 cm. **7.** 0.

Testul 2. **1.** 4. **2.** a) 1; b) 0. **3.** 50. **4.** 10, 20 și 30. **5.** $n = 63 \vdots 9$.

6. 

a) 18°; b) 90°. **7.** 10 numere.

Testul 3. **1.** 2. **2.** $2\frac{1}{6}$. **3.** Ana are 5 cărți, Bianca are 7 cărți și Cristi are 10 cărți. **4.** $n = 102\overline{ab} +$ $+ 51 = 51(2\overline{ab} + 1) \vdots 51$. **5.** $a < b$. **6.** 261. **7.** a) 12 cm; b) 96 de cubulețe; c) 8 cubulețe.

ARITMETICĂ

Capitolul I. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

I.1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice/nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime

1. a) $\{a, r, i, t, m, e, c\}$; b) $\{a, l, g, e, b, r\}$; c) $\{g, e, o, m, t, r, i, a\}$. **2.** Ana și Dan. **3.** a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$. **4.** $1 \in A$, $2 \notin A$, $3 \notin A$, $4 \in A$, $5 \notin A$, $1 \notin B$, $2 \in B$, $3 \notin B$, $4 \in B$, $5 \in B$. **5.** P_1 – A; P_2 – F; P_3 – A; P_4 – F; P_5 – A; P_6 – A. **6.** a) $A \in a$; b) $B \notin b$; c) $N \in (MP)$; d) $M \in NP$ sau $N \in MP$ sau $P \in MN$. **7.** $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5, 8\}$, $C = \{0, 1, 3, 7\}$, $D = \{0, 1, 2, 3\}$. **8.** De și 57 de fizică. **38.** Fie x numărul monedelor de 2 euro și y numărul bancnotelor de 5 euro. Avem $2x + 10x + 5y = 100$, deci $12x + 5y = 100$, de unde deducem că x se divide cu 5 și y se divide cu 4, deci $x = 5a$ și $y = 4b$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Înlocuind, obținem $3a + b = 5$, ceea ce înseamnă că $a = 1$, $b = 2$ și astfel obținem $x = 5$, $y = 8$. Elena are 50 de monede de 1 euro, 5 monede de 2 euro și 8 bancnote de 5 euro.

Recapitulare și sistematizare prin teste

Testul 1. **1.** c). **2.** b). **3.** c). **4.** $5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$. **5.** $n \mid (16n + 15) \Leftrightarrow n \mid 15 \Leftrightarrow n \in \{1, 3, 5, 15\}$. **6.** $45 \mid n \Leftrightarrow 5 \mid n$ și $9 \mid n \Leftrightarrow n \in \{180, 585\}$. **7.** Numărul $72 = 2^3 \cdot 3^2$ are 12 divizori. **8.** $a = 7^n(7^2 - 7 - 1) = 7^n \cdot 41 = 7^{n-1} \cdot 287 \Rightarrow 287 \mid a$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. **9.** Numerele subliniate de două ori sunt multiplii celui mai mic multiplu comun al numerelor 12 și 8: 24, 48, 72 și 96.

Testul 2. **1.** c). **2.** a). **3.** d). **4.** c.m.m.d.c.(60, 105) = 15, c.m.m.m.c.(60, 105) = 420. **5.** $a = 14$, $b = 15$. **6.** $a = 3$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 2$, $a + b + c + d = 7$. **7.** $46 = na + 4$, $77 = nb + 5$, $a, b \in \mathbb{N}$, $n > 5$; $42 = na$, $72 = nb \Rightarrow n \in D_{(42, 72)} = D_6 = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow n = 6$. **8.** $(n + 1) \mid (2n + 17) \Leftrightarrow (n + 1) \mid (2n + 17 - 2n - 2) \Leftrightarrow (n + 1) \mid 15 \Leftrightarrow n \in \{0, 2, 4, 14\}$. **9.** Fie n numărul de oi. Deoarece $n = 2a + 1 = 3b + 1 = 4c + 1 = 5d + 1$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}$), rezultă că $n - 1$ este multiplu comun al numerelor 2, 3, 4 și 5, deci $n - 1 = 60k$ sau $n = 60k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Singurul număr natural de forma $60k + 1$, mai mic decât 400, care se divide cu 7, este 301. Așadar, ciobanul are 301 oi.

CAPITOLUL II. RAPOARTE. PROPORȚII

II.1. Rapoarte

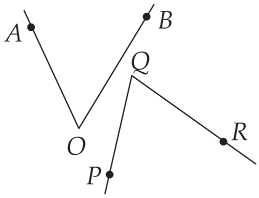
1. a) $\frac{2}{6}$; b) $\frac{7}{10}$; c) $\frac{15}{43}$; d) $\frac{256}{32}$; e) $\frac{3^3}{3}$; f) $\frac{3,5}{0,2}$. **2.** a) $\frac{a}{b} = {}^{(12}\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{2a}{a+b} = {}^{(12}\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$; c) $\frac{3b-10}{a+20} = {}^{(2}\frac{62}{32} = \frac{31}{16}$. **3.** a) 1,5; b) 0,25; c) 0,24; d) 5,4; e) 0,2; f) 2. **4.** a) $a = 4,5$; b) $b = 3,5$; c) $c = 50$; d) $d = 21$; e) $e = 1,7$. **5.** a) $\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{15x}{4y} = \frac{15}{4} \cdot \frac{x}{y} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{2} = 1,5$; b) $\frac{7y}{12x} = \frac{21}{16} \Leftrightarrow \frac{7}{12} \cdot \frac{y}{x} = \frac{21}{16}$, deci $\frac{y}{x} = \frac{21}{16} : \frac{7}{12} = \frac{21}{16} \cdot \frac{12}{7} = \frac{9}{4} = 2,25$. **6.** a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}$; b) Dintre rapoartele scrise la subpunctul a), au loc egalitățile $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$, deci $R = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right\}$, iar card($R$) = 7. **7.** $a = \frac{11}{900}$, $b = \frac{110}{900}$, deci $\frac{a}{b} = \frac{\frac{11}{900}}{\frac{110}{900}} = \frac{11}{900} : \frac{110}{900} = \frac{11}{900} \cdot \frac{900}{110} = \frac{1}{10} = 0,1$. Valoarea raportului dintre 9 și $\frac{a}{b}$ este egală cu $\frac{9}{0,1} = 90$. **8.** Lățimea dreptunghiului este egală cu latura pătratului, deci raportul cerut este egal cu $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; b) Perimetrul dreptunghiului este

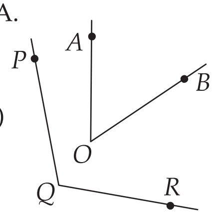
GEOMETRIE

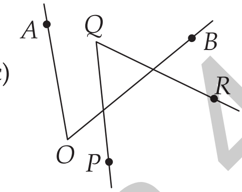
Capitolul V. Noțiuni geometrice fundamentale

V.1. Unghiul. Recapitulare și completări

1. b), c), e), f). **2.** $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle BOD$, $\sphericalangle AOD$. **3.** a) A; b) A; c) F; d) A; e) A; f) F. **4.** a) A; b) A; c) F; d) F; e) A; f) A.

5. a) 

b) 

c) 

9. Cum fețele paralelipipedului sunt dreptunghiuri, pe fiecare față putem identifica patru unghiuri drepte. Vom vedea în clasa a VIII-a că, de fapt, există și alte unghiuri drepte formate de câte două muchii ale paralelipipedului. **10.** a) 720'; 192'; 1534'; b) 25°; 33°; 300°. **11.** a) 98°; 60°47'; 171°23'; b) 48°; 18°8'; 8°33'; 77°47'; c) 81°; 128°56'; 92°40'; d) 24°; 6°24'; 8°25'.

12. Avem 15°12' = (15 · 60 + 12)' = 912', 24° = (24 · 60)' = 1440', așadar $k = \frac{912}{1440} = \frac{19}{30}$. Cum $\frac{15}{30} < \frac{19}{30} < \frac{20}{30}$, rezultă că $\frac{1}{2} < k < \frac{2}{3}$. **13.** $\sphericalangle AOC$ = 65°, $\sphericalangle BOD$ = 71°, $\sphericalangle AOD$ = 113°. **14.** a) $\sphericalangle AOB$ = 24°48', $\sphericalangle AOC$ = 49°36', $\sphericalangle BOE$ = 74°24', $\sphericalangle BOF$ = 99°12'. **15.** Se observă că $OD \subset$ $\subset$ Int($\sphericalangle BOC$), prin urmare $\sphericalangle BOD$ = 180° – ($\sphericalangle AOC$ + $\sphericalangle COD$) = 35° = $\sphericalangle AOC$. **16.** Dacă $OD \subset$ $\subset$ Int($\sphericalangle BOC$), atunci $\sphericalangle BOD$ = 180° – ($\sphericalangle AOC$ + $\sphericalangle COD$) = 83°. Dacă $OD \subset$ Int($\sphericalangle AOC$), atunci $\sphericalangle BOD$ = 180° – ($\sphericalangle AOC$ – $\sphericalangle COD$) = 147°. **17.** a) $\sphericalangle BOC$ = 180° – $\sphericalangle AOC$ = 127°, $\sphericalangle BOD$ = 180° – – $\sphericalangle AOC$ = 53°; b) $\sphericalangle COD$ = $\sphericalangle AOC$ + $\sphericalangle AOD$ = 180°, deci $\sphericalangle COD$ este unghi alungit și, de aici, cerința problemei. **18.** Cum $\sphericalangle AOB$ = $\sphericalangle AOC$ + $\sphericalangle BOC$ = $a° + b° + a' + b' = (a + b)° + (a + b)'$ se exprimă, în grade, printr-un număr natural, rezultă că $a + b$ se divide cu 60. Dar $0 < a + b <$ < 120, deci $a + b = 60$, prin urmare $\sphericalangle AOB$ = 60° + 60' = 61°.

V.2. Unghiuri complementare, unghiuri suplementare. Unghiuri adiacente

1. Unghiurile reprezentate la c) sunt adiacente, iar cele de la a), b) și d) nu sunt adiacente. **4.** a) 60°; b) 45°; c) 7°; d) 77°47'. **5.** a) 150°; b) 45°; c) 90°; d) 77°13'. **6.** a) 53°30'; b) 22°30'. **7.** a) 77°30'; b) 150°. **8.** Complementul unghiului este 180° – 140° = 40°, deci unghiul are măsura 90° – – 40° = 50°. **9.** Fie x măsura, în grade, a unghiului căutat. Avem $\frac{(90-x)+(180-x)}{2} = 60 \Rightarrow$ $\Rightarrow 270 - 2x = 120 \Rightarrow x = 75$. **10.** Fie x măsura, în grade, a unghiului căutat. Avem $2(90 - x) =$ $= \frac{2}{3}(180 - x) \Rightarrow 6(90 - x) = 2(180 - x) \Rightarrow 3(90 - x) = 180 - x \Rightarrow 270 - 3x = 180 - x \Rightarrow 270 = 180 +$ $+ 2x \Rightarrow 2x = 90 \Rightarrow x = 45$. **11.** Fie a și b (grade) măsurile celor două unghiuri; atunci $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$ și $a + b = 180$. Obținem $a = 75$, $b = 105$, așadar $\frac{2}{3} \cdot b = 70°$, iar $\frac{4}{5} \cdot a = 60°$, de unde concluzia

CUPRINS

Cuvânt-înainte 5

PROBLEME RECAPITULATIVE – CLASA A V-A 7
TESTE INIŢIALE 12

ARITMETICĂ

CAPITOLUL I. MULŢIMI. MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE
I.1. Descriere, notaţii, reprezentări. Mulţimi numerice/nenumerice. Relaţia dintre un element şi o mulţime 14
I.2. Relaţii între mulţimi 16
I.3. Mulţimi finite, cardinalul unei mulţimi finite. Mulţimi infinite, mulţimea numerelor naturale 18
I.4. Operaţii cu mulţimi: reuniune, intersecţie, diferenţă 20
Recapitulare şi sistematizare prin teste 23
I.5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime 24
I.6. Cel mai mare divizor comun. Numere prime între ele 27
I.7. Cel mai mic multiplu comun 29
I.8. Proprietăţi ale divizibilităţii în $\mathbb{N}$ 32
Recapitulare şi sistematizare prin teste 35

CAPITOLUL II. RAPOARTE. PROPORŢII
II.1. Rapoarte 37
II.2. Procente 41
II.3. Proporţii. Proprietatea fundamentală a proporţiilor 44
II.4. Proporţii derivate. Şir de rapoarte egale 47
II.5. Mărimi direct şi invers proporţionale 50
II.6. Regula de trei simplă 54
II.7. Elemente de organizare a datelor 55
II.8. Probabilităţi 61
Recapitulare şi sistematizare prin teste 65

CAPITOLUL III. MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI
III.1. Număr întreg. Mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi 67
III.2. Adunarea şi scăderea numerelor întregi 71
III.3. Înmulţirea numerelor întregi 74
III.4. Împărţirea numerelor întregi când deîmpărţitul este multiplu al împărţitorului 77
III.5. Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri 80
III.6. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor 83

III.7. Ecuaţii şi inecuaţii în mulţimea numerelor întregi....85
III.8. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor/inecuaţiilor în contextul numerelor întregi....87
Recapitulare şi sistematizare prin teste....89

CAPITOLUL IV. MULŢIMEA NUMERELOR RAŢIONALE
IV.1. Număr raţional. Mulţimea ℚ a numerelor raţionale....90
IV.2. Adunarea şi scăderea numerelor raţionale....97
IV.3. Înmulţirea şi împărţirea numerelor raţionale....102
IV.4. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr raţional nenul. Reguli de calcul cu puteri....106
IV.5. Ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor....110
IV.6. Ecuaţii în mulţimea numerelor raţionale....114
IV.7. Probleme rezolvate cu ajutorul ecuaţiilor....118
Recapitulare şi sistematizare prin teste....121

GEOMETRIE

CAPITOLUL V. NOŢIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE
V.1. Unghiul. Recapitulare şi completări....123
V.2. Unghiuri complementare, unghiuri suplementare. Unghiuri adiacente....126
V.3. Bisectoarea unui unghi....128
V.4. Unghiuri opuse la vârf....131
V.5. Unghiuri formate în jurul unui punct....133
Recapitulare şi sistematizare prin teste....135
V.6. Drepte paralele....136
V.7. Criterii de paralelism. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă....140
V.8. Drepte perpendiculare în plan....144
V.9. Mediatoarea unui segment. Simetria faţă de o dreaptă....149
V.10. Cercul. Elemente în cerc. Unghi la centru....154
V.11. Poziţiile unei drepte faţă de un cerc. Poziţiile relative a două cercuri....159
Recapitulare şi sistematizare prin teste....163

CAPITOLUL VI. TRIUNGHIUL
VI.1. Triunghiul: definiţie, elemente. Perimetru. Clasificări....165
VI.2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi. Teorema unghiului exterior....169
VI.3. Construcţia triunghiurilor....172
VI.4. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi....175
VI.5. Mediatoarele laturilor unui triunghi....178
VI.6. Înălţimile unui triunghi....180
VI.7. Medianele unui triunghi....184
Recapitulare şi sistematizare prin teste....186

VI.8. Congruenţa triunghiurilor oarecare. Criteriile de congruenţă a triunghiurilor 187
VI.9. Criteriile de congruenţă a triunghiurilor dreptunghice 192
VI.10. Metoda triunghiurilor congruente 196
VI.11. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment..200
Recapitulare şi sistematizare prin teste...203
VI.12. Proprietăţi ale triunghiului isoscel 205
VI.13. Proprietăţi ale triunghiului echilateral 212
VI.14. Proprietăţi ale triunghiului dreptunghic..217
VI.15. Teorema lui Pitagora 222
Recapitulare şi sistematizare prin teste...225

RECAPITULARE FINALĂ
ARITMETICĂ 227
GEOMETRIE 231

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI...240