Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 4696/02.08.2019.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referinţă ştiinţifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuţia şi recomandările Comisiei ştiinţifice şi metodice a publicaţiilor Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Aceasta şi-a dat avizul favorabil în ceea ce priveşte alcătuirea şi conţinutul matematic.

Redactare: Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
TUDOR, ION
Matematică : algebră, geometrie : modalităţi de lucru diferenţiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : [clasa] 7 / Ion Tudor. - Ed. a 7-a. - Piteşti : Paralela 45, 2023-
2 vol.
ISBN 978-973-47-3893-9
Partea 1. - 2023. - ISBN 978-973-47-3894-6

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești, jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalităţi de lucru diferenţiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

7

Ediţia a VII-a

Editura Paralela 45

Teste de evaluare inițială

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect:

(0,5p) **1.** Forma zecimală a fracției ordinare $\frac{3}{4}$ este:
A. 0,5; B. 0,75; C. 0,65; D. 0,8.

(0,5p) **2.** Cel mai mic număr natural prim de două cifre este:
A. 10; B. 15; C. 11; D. 13.

(0,5p) **3.** Suma numerelor raționale pozitive $1\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{6}$ este egală cu:
A. $\frac{3}{2}$; B. $\frac{2}{3}$; C. $\frac{5}{6}$; D. $\frac{3}{4}$.

(0,5p) **4.** Suplementul unghiului cu măsura de 78° este unghiul cu măsura de:
A. 160°; B. 12°; C. 90°; D. 102°.

(0,5p) **5.** Rezultatul calculului $(-1)^{2017} + (-1)^{2018}$ este egal cu:
A. 2; B. –2; C. –1; D. 0.

(0,5p) **6.** Soluția inecuației $-3x \leq 9$, unde $x \in \mathbb{Z}$, este:
A. {3, 4, 5, ...}; B. {–3,–2, –1, ...}; C. {..., –5, –4, –3}; D. {..., 1, 2, 3}.

(0,5p) **7.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 6 și 8 este egal cu:
A. 12; B. 24; C. 48; D. 18.

(0,5p) **8.** Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A și $\sphericalangle B = 4\sphericalangle C$, atunci măsura unghiului C este egală cu:
A. 60°; B. 30°; C. 18°; D. 45°.

(0,5p) **9.** Calculând 40% din 35 obținem numărul:
A. 15; B. 40; C. 70; D. 14.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete:

(0,8p) **1.** Se consideră triunghiul isoscel ABC. Dacă $AB = 10$ cm și $AC = 4,5$ cm, aflați BC.

2. Se consideră numărul rațional pozitiv $x = \frac{11}{10} - \left[2\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] : \frac{5}{2}$.

(0,8p) a) Arătați că $x = \frac{4}{15}$.

(0,7p) b) Rotunjiți la a doua zecimală numărul rațional pozitiv x.

ALGEBRĂ

Capitolul I

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Citesc și rețin

Definiție: Un număr natural a se numește **pătrat perfect** dacă există un număr natural b, astfel încât $a = b^2$.

Exemple: $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, $100 = 10^2$.

Observație: Dacă a, $a \neq 0$, este un număr natural pătrat perfect, atunci există două numere întregi b și $-b$ cu proprietatea că $a = b^2 = (-b)^2$.

Exemple: $1 = 1^2 = (-1)^2$, $4 = 2^2 = (-2)^2$, $9 = 3^2 = (-3)^2$.

Definiție: Rădăcina pătrată a numărului natural pătrat perfect a ($a = b^2$, $b \in \mathbb{Z}$) este numărul natural $|b|$. Notăm $\sqrt{a} = |b|$.

Exemple: $\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{19^2} = 19$; $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$.

Observații:

1. Dacă $a = b^2$, $b \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{a} = b$.

2. Dacă $a \in \mathbb{N}$ și $b \in \mathbb{N}^*$, atunci $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Cum se aplică?

1. Calculați:

a) $\sqrt{25}$; b) $\sqrt{81}$.

Soluție:

a) $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$; b) $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{\dfrac{49}{64}}$; b) $\sqrt{\dfrac{48}{75}}$.

Soluție:

a) $\sqrt{\dfrac{49}{64}} = \sqrt{\dfrac{7^2}{8^2}} = \dfrac{7}{8}$; b) $\sqrt{\dfrac{48^{(3}}{75}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \sqrt{\dfrac{4^2}{5^2}} = \dfrac{4}{5}$.

3. Determinaţi cardinalul mulţimii $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 5 < \sqrt{n} \leq 6\}$.

Soluţie:

$5 < \sqrt{n} \leq 6$, deci $25 < n \leq 36$, de unde rezultă $A = \{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$, prin urmare card $A = 11$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Arătaţi că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:
a) 16 = ...; b) 36 = ...; c) 49 = ...; d) 64 = ...; e) 81 = ...;
f) 100 = ...; g) 144 = ...; h) 196 = ...; i) 324 = ...; j) 400 = ...

2. Citiţi următoarele propoziţii:
a) $\sqrt{25} = 5$; b) $\sqrt{169} = 13$; c) $\sqrt{361} = 19$; d) $\sqrt{81} = 9$.

3. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:
a) $\sqrt{14^2} = 14$; $\square$ b) $\sqrt{19^2} = 19$; $\square$ c) $\sqrt{41^2} = 41$; $\square$
d) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$; $\square$ e) $\sqrt{(-13)^2} = -13$; $\square$ f) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$. $\square$

4. Calculaţi:
a) $\sqrt{16}$ = ...; b) $\sqrt{25}$ = ...; c) $\sqrt{36}$ = ...; d) $\sqrt{49}$ = ...; e) $\sqrt{64}$ = ...;
f) $\sqrt{100}$ = ...; g) $\sqrt{121}$ = ...; h) $\sqrt{144}$ = ...; i) $\sqrt{225}$ = ...; j) $\sqrt{256}$ = ...

5. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect:
a) $\sqrt{(-11)^2}$ = ...; b) $\sqrt{(-23)^2}$ = ...; c) $\sqrt{(-59)^2}$ = ...; d) $\sqrt{(-77)^2}$ = ...

6. Determinaţi mulţimile:
a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 7\}$ = ...; b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 8\}$ = ...;
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 29\}$ = ...; d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2} = 67\}$ = ...

7. Calculaţi:
a) $\sqrt{16} + \sqrt{25}$; b) $\sqrt{64} - \sqrt{49}$; c) $\sqrt{36} + \sqrt{81}$; d) $\sqrt{64} + \sqrt{25}$;
e) $\sqrt{81} - \sqrt{36}$ = ...; f) $\sqrt{16} - \sqrt{64}$ = ...

8. Calculaţi:
a) $\left(\sqrt{225} - \sqrt{36}\right) \cdot \sqrt{100}$; b) $\sqrt{121} : \left(\sqrt{25} - \sqrt{256}\right)$; c) $\sqrt{144} : \left(\sqrt{49} - \sqrt{169}\right)$;
d) $\sqrt{196} : \left(\sqrt{64} - \sqrt{100}\right)$ = ...

9. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
a) $\sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{2}{9}$; $\square$ b) $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$; $\square$ c) $\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$; $\square$ d) $\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$. $\square$

Lecţia 7. Adunarea şi scăderea numerelor reale

Citesc şi reţin

Suma numerelor reale x şi y este un număr real unic, notat $\boldsymbol{x+y}$.
Operaţia prin care se obţine suma a două numere reale se numeşte **adunare**.
Proprietăţile adunării:

- comutativitatea: $a+b=b+a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$;
- asociativitatea: $(a+b)+c=a+(b+c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- 0 este element neutru: $a+0=0+a=a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;
- orice număr $a \in \mathbb{R}$ are un opus $-a \in \mathbb{R}$: $a+(-a)=0$.

Diferenţa numerelor reale x şi y este un număr real unic, notat $x-y$, şi care reprezintă suma dintre x şi opusul lui y, adică $x-y=x+(-y)$.
Reguli de calcul:

- $a\sqrt{n}+b\sqrt{n}=(a+b)\sqrt{n}$, $n>0$;
- $a\sqrt{n}-b\sqrt{n}=(a-b)\sqrt{n}$, $n>0$;
- $a_1\sqrt{n}+a_2\sqrt{n}+a_3\sqrt{n}+\ldots+a_m\sqrt{n}=(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m)\sqrt{n}$, $n>0$.

Cum se aplică?

1. Calculaţi:

a) $3\sqrt{2}+7\sqrt{2}$; b) $9\sqrt{5}-3\sqrt{5}$; c) $2\sqrt{7}-5\sqrt{7}$.

Soluţie:

a) $3\sqrt{2}+7\sqrt{2}=\sqrt{2}(3+7)=10\sqrt{2}$; b) $9\sqrt{5}-3\sqrt{5}=\sqrt{5}(9-3)=6\sqrt{5}$;

c) $2\sqrt{7}-5\sqrt{7}=\sqrt{7}(2-5)=-3\sqrt{7}$.

2. Calculaţi:

a) $5\sqrt{12}+2\sqrt{27}$; b) $2\sqrt{63}-5\sqrt{28}$; c) $-\sqrt{18}-3\sqrt{98}$.

Soluţie:

a) $5\sqrt{12}+2\sqrt{27}=5\sqrt{2^2\cdot 3}+2\sqrt{3^2\cdot 3}=10\sqrt{3}+6\sqrt{3}=16\sqrt{3}$;

b) $2\sqrt{63}-5\sqrt{28}=2\sqrt{3^2\cdot 7}-5\sqrt{2^2\cdot 7}=6\sqrt{7}-10\sqrt{7}=-4\sqrt{7}$;

c) $-\sqrt{18}-3\sqrt{98}=-\sqrt{3^2\cdot 2}-3\sqrt{7^2\cdot 2}=-3\sqrt{2}-21\sqrt{2}=-24\sqrt{2}$.

3. Calculaţi: $7\sqrt{24}-3\sqrt{20}-\sqrt{150}-2\sqrt{80}$.

Soluţie:

$7\sqrt{24}-3\sqrt{20}-\sqrt{150}-2\sqrt{80}=7\sqrt{2^2\cdot 6}-3\sqrt{2^2\cdot 5}-\sqrt{5^2\cdot 6}-2\sqrt{4^2\cdot 5}=14\sqrt{6}-$
$-6\sqrt{5}-5\sqrt{6}-8\sqrt{5}=\sqrt{6}(14-5)+\sqrt{5}(-6-8)=9\sqrt{6}-14\sqrt{5}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Calculaţi:

a) $(-3) + 5$; b) $7 + (-9)$; c) $(-2) + (-6)$; d) $(-4) + (-5)$;
e) $21 + (-17)$; f) $(-19) + 12$; g) $(-12) + (-27)$; h) $(-14) + (-35)$;
i) $(-7) - 12$; j) $(-6) - 18$; k) $(-4) - (-7)$; l) $(-8) - (-6)$;
m) $18 - (-20)$; n) $14 - (-21)$; o) $(-37) - (-9)$; p) $(-41) - (-5)$.

g)

o)

2. Calculaţi:

a) $\frac{9}{4} + \frac{3}{2}$; b) $\frac{5}{6} - \frac{4}{3}$; c) $\frac{7}{6} + \frac{5}{4}$; d) $\frac{7}{4} - \frac{8}{5}$;
e) $2\frac{3}{8} + \left(-\frac{13}{6}\right)$; f) $\left(-\frac{7}{4}\right) - 1\frac{3}{14}$; g) $\left(-\frac{11}{12}\right) - 1\frac{4}{9}$; h) $\left(-2\frac{1}{8}\right) + \frac{9}{10}$.

g)

3. Calculaţi:

a) $0,(6) + 1,25$; b) $2,(3) - 0,75$; c) $0,68 - 1,(6)$;
d) $1,2(7) - 1,75$; e) $1,75 - 0,6(1)$; f) $0,2(6) - 1,52$.

e)

4. Calculaţi:

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ = ...; b) $6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ = ...; c) $7\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ = ...;
d) $5\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$ = ...; e) $4\sqrt{6} + 6\sqrt{6}$ = ...; f) $5\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$ = ...;
g) $\sqrt{7} - 8\sqrt{7}$ = ...; h) $\sqrt{3} - 9\sqrt{3}$ = ...; i) $\sqrt{2} - 11\sqrt{2}$ = ...;
j) $-6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$ = ...; k) $-7\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$ = ...; l) $-4\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$ = ...;
m) $8\sqrt{3} - 15\sqrt{3}$ = ...; n) $4\sqrt{5} - 17\sqrt{5}$ = ...; o) $2\sqrt{7} - 22\sqrt{7}$ = ...

5. Calculaţi:

a) $2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$; c) $-\sqrt{5} - 23\sqrt{5} + 9\sqrt{5}$;
d) $-7\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 5\sqrt{6}$; e) $-4\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 7\sqrt{7}$; f) $-2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$.

Fişă pentru portofoliul elevului

Numele şi prenumele:
Clasa a VII-a
Capitolul: Mulţimea numerelor reale
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziţia este adevărată, subliniaţi litera A, iar dacă propoziţia este falsă, subliniaţi litera F.

(7p) **1.** Suma numerelor $x = 2\sqrt{7}$ şi $y = -9\sqrt{7}$ este egală cu $-7\sqrt{7}$. A F

(7p) **2.** Produsul numerelor $x = 4\sqrt{3}$ şi $y = \sqrt{5}$ este egal cu $4\sqrt{15}$. A F

(7p) **3.** Raţionalizând numitorul raportului $\frac{2}{\sqrt{6}}$, obţinem raportul $\frac{\sqrt{6}}{3}$. A F

II. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) **1.** Diferenţa numerelor $x = -\sqrt{5}$ şi $y = -\sqrt{125}$ este egală cu ....

(7p) **2.** Câtul numerelor $a = \sqrt{24}$ şi $b = 2\sqrt{3}$ este egal cu ....

(7p) **3.** Cubul numărului $x = -\sqrt{2}$ este egal cu ....

III. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) **1.** Rezultatul calculului $\left[-\sqrt{10}+(-2\sqrt{10})^3\right]:\left|-9\sqrt{2}\right|$ este:

A. $2\sqrt{10}$; B. $-3\sqrt{2}$; C. $-9\sqrt{5}$; D. $3\sqrt{10}$.

(8p) **2.** Valoarea absolută a numărului real $a = 1,(6)\cdot\left(\frac{11}{2\sqrt{75}}-\frac{8}{\sqrt{48}}\right)$ este egală cu:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$; B. $\sqrt{6}$; C. $\sqrt{5}$; D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(8p) **3.** Numărul $a = \left(\frac{\sqrt{42}}{2\sqrt{5}}:\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{10}}-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{63}}{2\sqrt{5}}\right):\frac{\sqrt{6}}{8}$ aparţine mulţimii:

A. $\mathbb{N}$; B. $\mathbb{Z}$; C. $\mathbb{Q}$; D. $\mathbb{I}$.

La exerciţiile IV. şi V. scrieţi pe fişă rezolvările complete.

(8p) **IV.** Se consideră numărul $a = \left(\sqrt{\frac{0,2(6)}{1,(3)}:0,25}-\frac{1}{3\sqrt{5}}\right)^3:\sqrt{\frac{1,(6)}{1,92}}$. Arătaţi că numărul $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$.

V. Se consideră numerele:

$$x = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{14}} - \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \text{ şi } y = \left(\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right) : \frac{1}{3}.$$

(8p) a) Arătaţi că $x = \sqrt{2}$.

(8p) b) Arătaţi că $\sqrt{xy} \in \mathbb{N}$.

Lecția 13. Media geometrică a două numere reale pozitive

Citesc şi reţin

Definiţie: Media geometrică a numerelor reale **pozitive** a şi b este dată de formula $m_g = \sqrt{a \cdot b}$.

Teoremă: Dacă a şi b sunt două numere reale pozitive, atunci $m_a(a;\ b) \geq m_g(a;\ b)$. Egalitatea se obţine când $a = b$.

Cum se aplică?

1. Calculaţi media aritmetică şi media geometrică a numerelor 2 şi 8. Comparaţi cele două medii.

Soluţie:

$m_a = \dfrac{2+8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$; $m_g = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$; $m_a = 5$ şi $m_g = 4$, prin urmare $m_a > m_g$.

2. Calculaţi media geometrică a numerelor reale:

a) 3,5 şi 4,(6); b) $5\sqrt{35}$ şi $7\sqrt{35}$.

Soluţie:

a) $m_g = \sqrt{3{,}5 \cdot 4{,}(6)} = \sqrt{\dfrac{7}{\cancel{2}_1} \cdot \dfrac{\cancel{14}^{7}}{3}} = \sqrt{\dfrac{7}{1} \cdot \dfrac{7}{3}} = \sqrt{\dfrac{7^2}{3}} = \dfrac{^{\sqrt{3})}7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$;

b) $m_g = \sqrt{5\sqrt{35} \cdot 7\sqrt{35}} = \sqrt{35 \cdot \sqrt{35}^2} = \sqrt{35 \cdot 35} = \sqrt{35^2} = 35$.

3. Media geometrică a două numere reale pozitive este egală cu 18. Dacă unul dintre numere este $6\sqrt{2}$, aflaţi celălalt număr.

Soluţie:

Notăm cu x numărul necunoscut; $m_g = 18$, deci $\sqrt{6\sqrt{2} \cdot x} = 18$, prin urmare $\sqrt{6\sqrt{2} \cdot x}^2 = 18^2$ sau $6\sqrt{2} \cdot x = 324$, deci $x = \dfrac{324}{6\sqrt{2}}$ sau $x = \dfrac{^{\sqrt{2})}54}{\sqrt{2}} = \dfrac{54\sqrt{2}}{2} = 27\sqrt{2}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Încercuiţi litera corespunzătoare soluţiei corecte. Media geometrică a numerelor 12 şi 3 este egală cu:

A. $m_g = \sqrt{12:3} = \sqrt{4} = 2$; B. $m_g = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$.

2. Completaţi tabelul următor:

Numerele	16; 1	1; 25	36; 1	1; 49
Media geometrică				

GEOMETRIE

Capitolul I
PATRULATERUL

Lecţia 1. Patrulaterul convex

Citesc şi reţin

Definiţie: Numim **patrulater** de vârfuri A, B, C şi D reuniunea segmentelor $AB \cup BC \cup$ $\cup\ CD \cup DA$, unde punctele distincte A, B, C şi D îndeplinesc condiţiile:

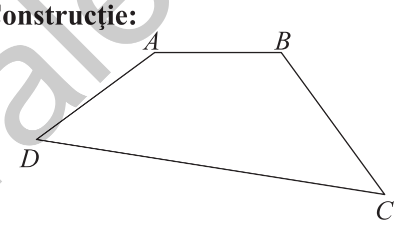
– oricare trei dintre ele sunt necoliniare;

– $AB \cap CD = \varnothing$, $BC \cap AD = \varnothing$.

Patrulaterul de vârfuri A, B, C şi D se notează $ABCD$.

Definiţie: Un **patrulater** se numeşte **convex** dacă dreapta determinată de oricare două vârfuri alăturate ale acestuia **nu separă** celelalte două vârfuri ale patrulaterului.

Construcţie:



Elemente:

a) vârfurile patrulaterului: A, B, C, D;

b) laturile patrulaterului: AB, BC, CD, DA;

c) unghiurile patrulaterului: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$;

d) diagonalele patrulaterului: AC, BD.

Laturile AB şi BC, BC şi CD etc. se numesc **alăturate**, iar laturile AB şi CD, respectiv BC şi DA se numesc **opuse**.

Unghiurile $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B$, $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ etc. se numesc **alăturate**, iar unghiurile $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle C$, respectiv $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle D$ se numesc **opuse**.

Proprietăţi:

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu **360°**.

Definiţie: Perimetrul patrulaterului convex $ABCD$ este dat de formula:

$$\mathscr{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA.$$

Cum se aplică?

1. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Dacă $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 73°$ şi $\sphericalangle C = 135°$, aflaţi măsura unghiului D.

Soluţie:

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$, deci $60° + 73° + 135° + \sphericalangle D = 360°$ sau $268° + \sphericalangle D = 360°$, de unde rezultă că $\sphericalangle D = 360° - 268°$ şi obţinem $\sphericalangle D = 92°$.

2. Calculaţi perimetrul patrulaterului convex *DEFG*, cu $DE = 7$ cm, $EF = 5$ cm, $FG = 3$ cm şi $GD = 6$ cm.

Soluţie:

$\mathscr{P}_{DEFG} = DE + EF + FG + GD = 7\text{ cm} + 5\text{ cm} + 3\text{ cm} + 6\text{ cm} = 21\text{ cm}.$

3. Determinaţi măsurile unghiurilor patrulaterului convex *MNPQ* ştiind că $\sphericalangle M = 5\sphericalangle P$, $\sphericalangle N = 2\sphericalangle P$ şi $\sphericalangle Q = 4\sphericalangle P$.

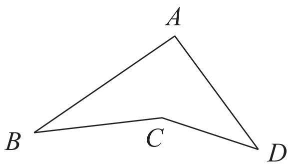
Soluţie:

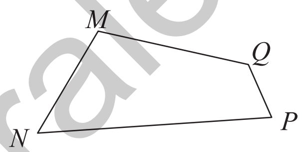
$\sphericalangle M + \sphericalangle N + \sphericalangle P + \sphericalangle Q = 360°$, deci $5\sphericalangle P + 2\sphericalangle P + \sphericalangle P + 4\sphericalangle P = 360°$, deci $12\sphericalangle P = 360°$, de unde rezultă că $\sphericalangle P = 360° : 12$ şi obţinem $\sphericalangle P = 30°$; $\sphericalangle M = 5 \cdot 30° = 150°$; $\sphericalangle N = 2 \cdot 30° = 60°$ şi $\sphericalangle Q = 4 \cdot 30° = 120°$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Completaţi spaţiul punctat cu răspunsul corect. Dintre patrulaterele *ABCD* şi *MNPQ* reprezentate în figurile următoare, cel convex este patrulaterul ....

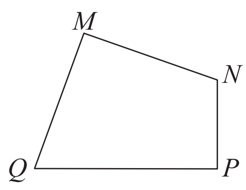




2. Construiţi patrulaterul convex *ABCD* şi notaţi cu *O* punctul de intersecţie al diagonalelor acestuia.

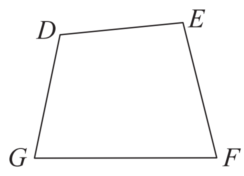
3. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex *MNPQ*. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\sphericalangle M$ şi $\sphericalangle N$ sunt alăturate; ☐
b) $\sphericalangle P$ şi $\sphericalangle Q$ sunt opuse; ☐
c) $\sphericalangle N$ şi $\sphericalangle Q$ sunt alăturate; ☐
d) $\sphericalangle M$ şi $\sphericalangle P$ sunt opuse. ☐



4. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul convex *DEFG*. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) laturile *DE* şi *FG* sunt alăturate; ☐
b) laturile *DG* şi *FG* sunt opuse; ☐
c) laturile *DE* şi *EF* sunt alăturate; ☐
d) laturile *DG* şi *EF* sunt opuse. ☐

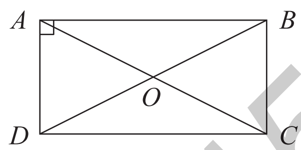


Lecţia 5. Dreptunghiul

Citesc şi reţin

Definiţie: Paralelogramul care are un unghi drept se numeşte **dreptunghi**.

Construcţie:



Proprietăţi:

Teorema 1: Cele patru unghiuri ale unui dreptunghi sunt unghiuri drepte.

Teorema 2: Diagonalele dreptunghiului sunt congruente.

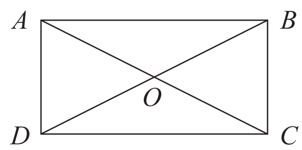
Teorema 3: Dacă într-un paralelogram diagonalele sunt congruente, atunci paralelogramul este dreptunghi.

Cum se aplică?

1. În dreptunghiul $ABCD$, notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor. Dacă $AB = 8$ cm şi $\mathscr{P}_{AOB} = 18$ cm, aflaţi $AC + BD$.

Soluţie:

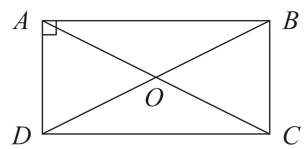
$\mathscr{P}_{AOB} = 18$ cm, deci $AB + AO + OB = 18$ cm sau 8 cm $+ AO + OB = 18$ cm, aşadar $AO + OB = 10$ cm. Deoarece $AC \equiv BD$, rezultă că $AO \equiv OB$ şi $AO + OB = AC$, prin urmare $AC = 10$ cm, şi obţinem $AC + BD = 20$ cm.



2. Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Dacă $CAD = 43°$, determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle COD$.

Soluţie:

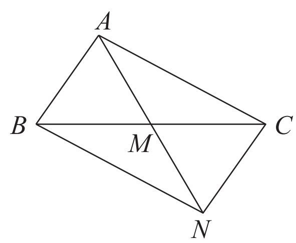
$ABCD$ este dreptunghi, deci $AO \equiv DO$, prin urmare $\sphericalangle OAD \equiv \sphericalangle ODA$. În ΔOAD avem $\sphericalangle O + \sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$, aşadar $43° + 43° + \sphericalangle O = 180°$, de unde obţinem $\sphericalangle O = 94°$; $\sphericalangle COD = \sphericalangle AOC - \sphericalangle AOD = 180° - 94° = 86°$.



3. În triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ construim mediana AM, $M \in BC$. Arătaţi că $AM = \dfrac{BC}{2}$.

Soluţie:

Notăm cu N simetricul punctului A faţă de punctul M. Deoarece $AM \equiv MN$, $BM \equiv MC$ şi $\sphericalangle BAC = 90°$, rezultă că patrulaterul $ABNC$ este dreptunghi, deci $AN = BC$, sau $2AM = BC$, prin urmare $AM = \dfrac{BC}{2}$.



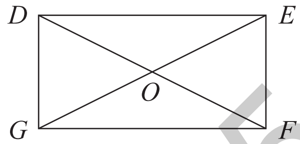
Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $DEFG$ în care am notat cu O punctul de intersecţie a diagonalelor. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) $\sphericalangle EDG = 90°$; ☐ b) $DE \equiv GF$; ☐

c) $DG \not\equiv EF$; ☐ d) $DF \equiv EG$. ☐



2. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$. Ştiind că $AD = 7$ cm şi $CD = 11$ cm, completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect:

a) $AB =$ ....; b) $BC =$ ....

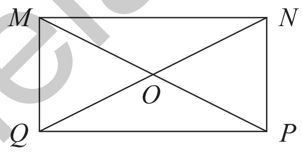
3. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $MNPQ$ în care am notat cu O punctul de intersecţie a diagonalelor. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

a) $MP = 5$ cm, atunci $NQ =$ ....;

b) $NQ = 7$ cm, atunci $MP =$ ....;

c) $MP = 6$ cm, atunci $NO =$ ....;

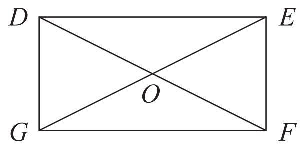
d) $QO = 4$ cm, atunci $MP =$ ....



4. În figura alăturată am notat cu O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $DEFG$. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) ΔDOE este isoscel; ☐ b) ΔEOF este isoscel; ☐

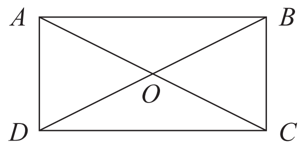
c) ΔFOG este isoscel; ☐ d) ΔGOD este isoscel. ☐



5. În figura alăturată am notat cu O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect:

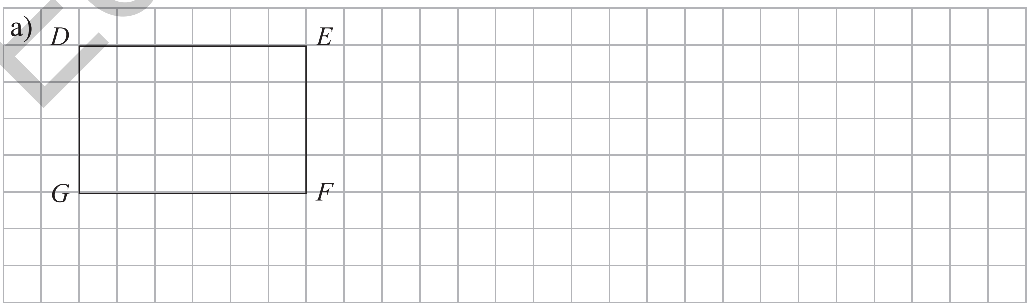
a) Dacă $AC = 10$ cm şi $AB = 7$ cm, atunci $\mathscr{P}_{AOB} =$ ....

b) Dacă $BD = 14$ cm şi $BC = 5$ cm, atunci $\mathscr{P}_{AOD} =$ ....



6. Calculaţi perimetrul dreptunghiului $DEFG$, ştiind că:

a) $DE = 15$ cm şi $EF = 8$ cm; b) $DG = 9$ cm şi $GF = 16$ cm.



Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) **1.** Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Ştiind că:
a) $AC = 7$ cm, aflaţi BO; b) $CO = 5$ cm, aflaţi BD.

(1p) **2.** Se consideră rombul $DEFG$, cu $DE = 5$ cm şi $\sphericalangle EDG = 70°$. Aflaţi:
a) $\mathscr{P}_{DEFG}$; b) $\sphericalangle DEG$.

(1p) **3.** Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor pătratului $ABCD$. Calculaţi $\sphericalangle BAC + \sphericalangle COD$.

(1p) **4.** În pătratul $ABCD$, notăm cu M, N, P şi Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA. Arătaţi că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

5. Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Dacă $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle BOC$, aflaţi:
(1p) a) $\sphericalangle BOC$; *(1p)* b) $\sphericalangle BAC$.

6. Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor rombului $ABCD$ cu perimetrul de 28 cm şi $\sphericalangle B = 2\sphericalangle A$. Construim $OE \perp AD$, $E \in AD$. Calculaţi:
(1p) a) $\sphericalangle A$; *(1p)* b) BD; *(1p)* c) AE.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) **1.** Se consideră rombul $ABCD$, cu $AB = 4$ cm şi $\sphericalangle ABD = 54°$. Aflaţi:
a) BC; b) $\sphericalangle DBC$.

(1p) **2.** Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor pătratului $ABCD$, care are perimetrul de 20 cm. Aflaţi:
a) $\sphericalangle BDC$; b) AD.

(1p) **3.** Arătaţi că diagonalele dreptunghiului $DEFG$ sunt congruente.

(1p) **4.** Pe cercul $\mathscr{C}(O)$ considerăm punctele A, B şi C, astfel încât patrulaterul $OABC$ este romb. Determinaţi măsurile unghiurilor rombului $OABC$.

5. Se consideră rombul $ABCD$ cu $\sphericalangle B = 3\sphericalangle A$. Mediatoarele laturilor AB şi CD intersectează diagonala AC în punctele E, respectiv F.
(1p) a) Aflaţi măsurile unghiurilor rombului $ABCD$.
(1p) b) Arătaţi că patrulaterul $BEDF$ este un pătrat.

6. Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. Dacă $\mathscr{P}_{ADC} = 48$ cm, $\mathscr{P}_{ABO} = 36$ cm şi $\mathscr{P}_{BCO} = 32$ cm, aflaţi:
(1p) a) BC; *(1p)* b) AB; *(1p)* c) BD.

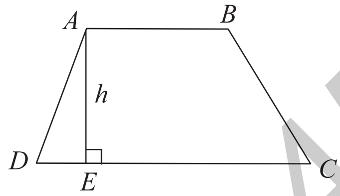
Lecţia 8. Trapezul. Trapezul isoscel

Citesc şi reţin

Definiţie: Patrulaterul care are două laturi paralele şi celelalte două laturi neparalele se numeşte **trapez**.

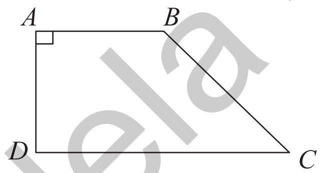
Laturile paralele ale unui trapez se numesc **bazele** trapezului.

Construcţie:



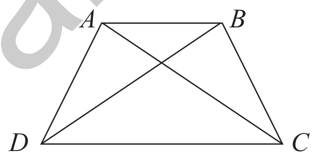
Definiţie: Trapezul care are un unghi drept se numeşte **trapez dreptunghic**.

Construcţie:



Definiţie: Trapezul care are laturile neparalele congruente se numeşte **trapez isoscel**.

Construcţie:



Definiţie: Segmentul determinat de punctele de intersecţie dintre bazele trapezului şi o perpendiculară comună a acestora se numeşte **înălţimea** trapezului. Lungimea înălţimii se notează cu h.

Proprietăţi (trapezul isoscel):

Teorema 1: Într-un trapez isoscel, unghiurile alăturate bazei mari şi unghiurile alăturate bazei mici sunt, respectiv, congruente.

Teorema 2: Dacă unghiurile alăturate unei baze a unui trapez sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

Teorema 3: Diagonalele trapezului isoscel sunt congruente.

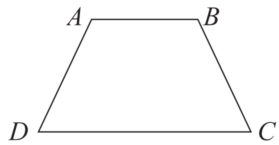
Teorema 4: Dacă un trapez are diagonalele congruente, atunci trapezul este isoscel.

Cum se aplică?

1. Aflaţi măsurile unghiurilor trapezului isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, dacă $\sphericalangle A = 3\sphericalangle D$.

Soluţie:

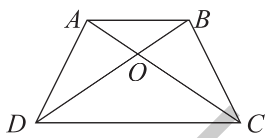
Deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$ (interne de aceeaşi parte a secantei AD), deci $3\sphericalangle D + \sphericalangle D = 180°$, de unde rezultă că $\sphericalangle D = 45°$, $\sphericalangle A = 135°$. Aplicăm teorema 1: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle D$, prin urmare $\sphericalangle B = 135°$ şi $\sphericalangle C = 45°$.



2. Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor trapezului isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Arătaţi că:

a) $AO \equiv BO$; b) $CO \equiv DO$.

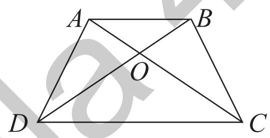
Soluţie:



a) Deoarece $ABCD$ este trapez isoscel avem $AD \equiv BC$ şi $AC \equiv BD$, deci $\Delta ABD \equiv \Delta BAC$, de unde rezultă că $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle BAO$, prin urmare $AO \equiv BO$; b) $OC = AC - AO$ şi $OD = BD - BO$, de unde rezultă că $CO \equiv DO$.

3. În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor. Dacă $\mathcal{P}_{ABC} = 25$ cm şi $\mathcal{P}_{ADO} = 19$ cm, aflaţi AB.

Soluţie:

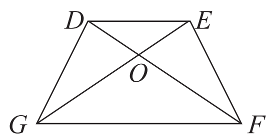


$\mathcal{P}_{ABC} = 25$ cm, deci $AB + BC + CA = 25$ cm sau $AB + BD + DA = 25$ cm (1); $\mathcal{P}_{ADO} = 19$ cm, deci $AO + OD + DA = 19$ cm, dar în problema precedentă am arătat că $AO \equiv BO$, deci $BD + DA = 19$ cm şi înlocuind în (1) obţinem $AB = 6$ cm.

Ştiu să rezolv

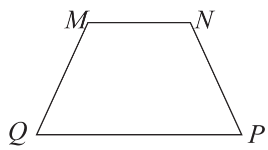
Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $DEFG$ cu $DE \parallel FG$, în care am notat cu O punctul de intersecţie a diagonalelor. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:



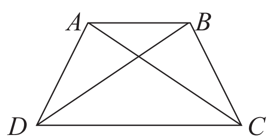
a) $DE \parallel GF$; ☐ b) $DG \parallel EF$; ☐
c) $DE \equiv GF$; ☐ d) $DG \equiv EF$; ☐
e) $\sphericalangle DGF \equiv \sphericalangle EFG$; ☐ f) $\sphericalangle EDG \equiv \sphericalangle DEF$; ☐
g) $DF \equiv EG$; ☐ h) $DO \equiv FO$. ☐

2. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:



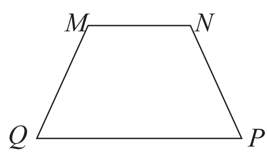
a) $MQ = 3,5$ cm, atunci $NP =$ ....;
b) $NP = 4,7$ cm, atunci $MQ =$ ....

3. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:



a) $AC = 6,5$ cm, atunci $BD =$ ....;
b) $BD = 3,8$ cm, atunci $AC =$ ....

4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect. Dacă:

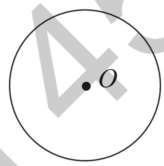


a) $\sphericalangle M = 127°$, atunci $\sphericalangle N =$ ....;
b) $\sphericalangle P = 68°$, atunci $\sphericalangle Q =$ ....

Capitolul II
Cercul

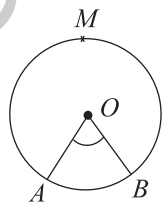
Lecţia 12. Unghi înscris în cerc

Citesc şi reţin



Definiţie: Numim **cerc** de centru O şi rază R, notat $\mathscr{C}(O, R)$, mulţimea punctelor din plan situate la distanţa R faţă de punctul O.

Definiţie: Măsura unui cerc este egală cu 360°.



Definiţie: Un unghi care are vârful în centrul unui cerc se numeşte **unghi la centru**. (În figura alăturată, unghiul $\sphericalangle AOB$ este unghi la centru pentru cercul respectiv.)

Definiţii:

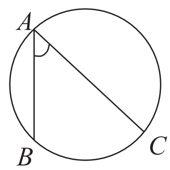
1. Mulţimea punctelor de pe un cerc situate în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ se numeşte **arcul mic** AB, notat $\overset{\frown}{AB}$.
2. Mulţimea punctelor de pe cerc situate în exteriorul unghiului $\sphericalangle AOB$ se numeşte **arcul mare** AB, notat $\overset{\frown}{AMB}$, unde M este un punct de pe cerc situat în exteriorul unghiului $\sphericalangle AOB$ (pentru ambele arce, punctele A şi B se numesc **capete** sau **extremităţi**).

Observaţie: Măsura arcului de cerc de extremităţi X şi Y se notează $\overset{\frown}{XY}$.

Definiţii:

1. Dacă $\overset{\frown}{AB}$ este un arc mic, atunci $\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle AOB$.
2. Dacă $\overset{\frown}{AMB}$ este un arc mare, atunci $\overset{\frown}{AMB} = 360° - \sphericalangle AOB$.

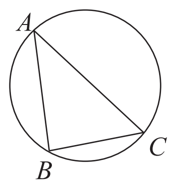
Definiţie: Două arce $\overset{\frown}{AB}$ şi $\overset{\frown}{CD}$ ale aceluiaşi cerc (sau din cercuri congruente) se numesc **congruente**, dacă $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$; se notează $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$.



Definiţie: Un unghi cu vârful pe cerc şi ale cărui laturi sunt două coarde ale cercului se numeşte **unghi înscris în cerc**.

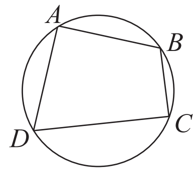
Teoremă: Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale:

$$\sphericalangle BAC = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}.$$



Definiţie: Un triunghi se numeşte **înscris într-un cerc** dacă vârfurile sale aparţin cercului respectiv. În acest caz, spunem că cercul este **circumscris triunghiului**, centrul său fiind punctul de concurenţă a mediatoarelor laturilor triunghiului.

Definiţie: Un patrulater se numeşte **patrulater inscriptibil**, dacă există un cerc care conţine vârfurile acestuia. Cercul respectiv se numeşte **cercul circumscris patrulaterului**.



Teoremă: Patrulaterul care are unghiurile opuse suplementare este inscriptibil.

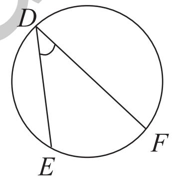
Teoremă: Patrulaterul în care diagonalele formează cu două laturi opuse ale acestuia unghiuri congruente este inscriptibil.

Cum se aplică?

1. Pe un cerc se consideră punctele E şi F şi punctul D pe arcul mare de extremităţi E şi F.

a) Dacă $\overset{\frown}{EF} = 56°$, aflaţi $\sphericalangle EDF$. b) Dacă $\sphericalangle EDF = 32°$, aflaţi $\overset{\frown}{EF}$.

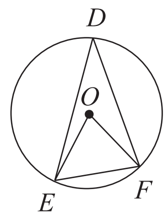
Soluţie:



a) $\sphericalangle EDF = \dfrac{\overset{\frown}{EF}}{2} = \dfrac{56°}{2} = 28°$; b) $\sphericalangle EDF = \dfrac{\overset{\frown}{EF}}{2}$, deci $32° = \dfrac{\overset{\frown}{EF}}{2}$, de unde rezultă că $\overset{\frown}{EF} = 32° \cdot 2$ şi obţinem $\overset{\frown}{EF} = 64°$.

2. Pe cercul $\mathscr{C}(O,\ 2\sqrt{3}\text{ cm})$ se consideră punctele D, E şi F. Ştiind că $\sphericalangle EDF = 30°$, calculaţi lungimea coardei EF.

Soluţie:

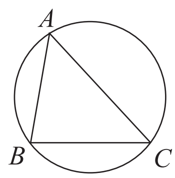


$\sphericalangle EDF = \dfrac{\overset{\frown}{EF}}{2}$ sau $30° = \dfrac{\overset{\frown}{EF}}{2}$, de unde rezultă că $\overset{\frown}{EF} = 60°$, prin urmare $\sphericalangle EOF = 60°$, deci ΔEOF este echilateral, prin urmare $EF = R =$ $= 2\sqrt{3}$ cm.

3. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC, ştiind că măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ şi $\overset{\frown}{CA}$ sunt direct proporţionale cu numerele 10, 11 şi 19.

Soluţie:

Din ipoteză avem $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{10} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{11} = \dfrac{\overset{\frown}{CA}}{19} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA}}{10+11+19} = \dfrac{360°}{40} = 9°$, deci $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{10} = 9°$, de unde rezultă că $\overset{\frown}{AB} = 90°$ şi analog obţinem $\overset{\frown}{BC} = 99°$ şi $\overset{\frown}{CA} =$ $= 171°$; $\sphericalangle A = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{99°}{2} = 49°30'$, $\sphericalangle B = \dfrac{\overset{\frown}{CA}}{2} = \dfrac{171°}{2} = 85°30'$, $\sphericalangle C =$ $= \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$.



Ştiu să rezolv

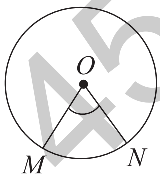
Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.
Măsura cercului este egală cu:
A. 100°; B. 180°; C. 360°; D. 400°.

2. În figura alăturată este reprezentat cercul $\mathscr{C}(O)$ şi unghiul la centru $\sphericalangle MON$. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect:

a) Dacă $\sphericalangle MON = 54°$, atunci $\overset{\frown}{MN}$ = ...

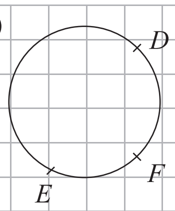
b) Dacă $\overset{\frown}{MN} = 48°$, atunci $\sphericalangle MON$ = ...



3. Pe un cerc se consideră punctele E şi F, iar pe arcul mare de extremităţi E şi F se consideră punctul D. Aflaţi $\overset{\frown}{EF}$ şi $\overset{\frown}{EDF}$, dacă:

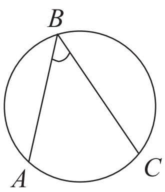
a) $\overset{\frown}{EDF} = 5\overset{\frown}{EF}$; b) $\overset{\frown}{EDF} = 4\overset{\frown}{EF}$.

b)



4. În figura alăturată este reprezentat un cerc şi unghiul $\sphericalangle ABC$ înscris în cercul respectiv. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

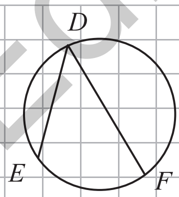
a) $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{3}$; $\square$ b) $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$. $\square$



5. Pe un cerc se consideră punctele E şi F, iar punctul D este situat pe arcul mare de extremităţi E şi F. Aflaţi $\sphericalangle EDF$, dacă:

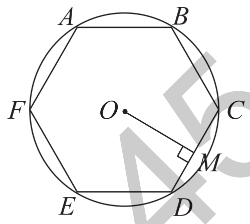
a) $\overset{\frown}{EF} = 40°$; b) $\overset{\frown}{EF} = 74°$; c) $\overset{\frown}{EF} = 96°$.

c)



Lecţia 15. Poligoane regulate înscrise într-un cerc

Citesc şi reţin



Definiţie: Un poligon care are toate laturile congruente şi toate unghiurile congruente se numeşte **poligon regulat**.

Teoremă: Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc. Centrul cercului se numeşte **centrul poligonului regulat**.

Lungimea laturii poligonului regulat cu n laturi se notează l_n.

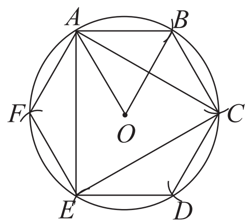
Definiţie: Segmentul construit din centrul unui poligon regulat, perpendicular pe o latură a acestuia, se numeşte **apotema poligonului regulat**.

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este dată de formula $S_n = (n - 2) \cdot 180°$.

Teoremă: Măsura unui unghi al unui poligon regulat cu n laturi, notată u_n, este dată de formula $u_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

Construcţia unui poligon regulat înscris într-un cerc dat

În continuare, prezentăm construcţia cu ajutorul compasului şi al riglei negradate a hexagonului regulat $ABCDEF$ înscris în cercul dat, $\mathscr{C}(O, R)$.



Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$ construim punctul A şi, luând în compas o deschidere egală cu R, construim arcul $\overset{\frown}{AB}$. ΔAOB este echilateral, deci $\overset{\frown}{AB} = 60°$, prin urmare, construind în acelaşi fel arcele $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$ şi $\overset{\frown}{EF}$, cercul a fost împărţit în şase arce de cerc congruente. Cu ajutorul riglei, construim hexagonul regulat $ABCDEF$.

Observaţie: Triunghiul ACE este echilateral, deci această construcţie poate fi utilizată şi pentru construcţia triunghiului echilateral înscris într-un cerc dat.

Cum se aplică?

1. Calculaţi suma măsurilor unghiurilor unui poligon regulat cu 10 laturi.

Soluţie:

Se aplică formula $S_n = (n - 2) \cdot 180°$. Obţinem $S_{10} = (10 - 2) \cdot 180° = 8 \cdot 180° = 1440°$.

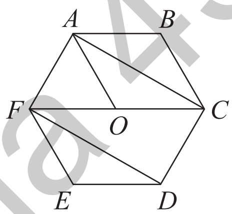
2. Aflaţi numărul de laturi ale unui poligon regulat care are unghiurile cu măsura de 135°.

Soluţie:

$u_n = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \Rightarrow 135^\circ = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \Rightarrow n \cdot 135^\circ = n \cdot 180^\circ - 360^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow n \cdot 180^\circ - n \cdot 135^\circ = 360^\circ \Rightarrow n\,(180^\circ - 135^\circ) = 360^\circ \Rightarrow n \cdot 45^\circ = 360^\circ \Rightarrow n =$
$= \dfrac{360^\circ}{45^\circ} \Rightarrow n = 8.$

3. Se consideră hexagonul regulat *ABCDEF*. Arătaţi că patrulaterul *ACDF* este dreptunghi.

Soluţie:



$\sphericalangle ACD = \dfrac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6} = \dfrac{4\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$ şi, deoarece $AB \equiv BC$, rezultă că $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 30^\circ$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCA = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ şi analog se arată că $\sphericalangle CAF = 90^\circ$, deci $\sphericalangle FAC + \sphericalangle ACD = 180^\circ$ (interne de aceeaşi parte a secantei), prin urmare $AF \parallel CD$ şi, deoarece $AF \equiv CD$, rezultă că patrulaterul *ACDF* este dreptunghi.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Calculaţi suma măsurilor unghiurilor unui poligon regulat ce are:
a) 5 laturi; b) 6 laturi.

b)

2. Aflaţi măsura unui unghi al unui poligon regulat ce are:
a) 6 laturi; b) 8 laturi.

a)

3. Aflaţi numărul de laturi ale unui poligon convex care are suma măsurilor unghiurilor egală cu:
a) 1080°; b) 1800°.

a)

Modele de teste pentru evaluarea cunoştinţelor

Testul 1

Capitolele: Mulţimea numerelor reale, Patrulaterul şi Cercul
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(7p) **1.** Numărul $\sqrt{0,01}$ aparţine mulţimii:

A. $\mathbb{N}$; B. $\mathbb{Z}$; C. $\mathbb{Q}$; D. $\mathbb{I}$.

(7p) **2.** Media aritmetică a numerelor $\sqrt{20}$ şi $2\sqrt{45}$ este egală cu:
A. $3\sqrt{6}$; B. $2\sqrt{3}$; C. $6\sqrt{2}$; D. $4\sqrt{5}$.

(7p) **3.** Comparând numerele reale $a = 5\sqrt{3}$ şi $b = 6\sqrt{2}$ obţinem:
A. $a \geq b$; B. $a > b$; C. $a < b$; D. $a \leq b$.

(7p) **4.** Rezultatul calculului $3\sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$ este egal cu:
A. $12\sqrt{5}$; B. $6\sqrt{3}$; C. $9\sqrt{2}$; D. $10\sqrt{2}$.

(7p) **5.** Perimetrul paralelogramului cu $L = 15$ cm şi $l = 8$ cm este egal cu:
A. 52 cm; B. 28 cm; C. 46 cm; D. 30 cm.

(7p) **6.** Dacă $ABCD$ este un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$ şi $\sphericalangle A = 108°$, atunci măsura unghiului C este egală cu:
A. 65°; B. 72°; C. 54°; D. 90°.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(8p) **1.** Scrieţi sub forma cea mai simplă opusul numărului real:

$$x = \left|(-\sqrt{2})^3 + (-\sqrt{2})^5\right| : (-2\sqrt{6}).$$

(8p) **2.** Rotunjiţi la prima zecimală numărul real $a = \left(\sqrt{0,5 \cdot 1,3(8)} - \dfrac{7}{30}\right) : \sqrt{1,(3)}$.

(8p) **3.** Media aritmetică ponderată a numerelor reale $3\sqrt{5}$ şi $8\sqrt{5}$ cu ponderile 2, respectiv n este egală cu $6\sqrt{5}$. Determinaţi numărul natural n.

(8p) **4.** Pe un cerc se consideră punctele D, E şi F în această ordine, astfel încât $\overset{\frown}{EDF} = 7\overset{\frown}{EF}$. Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle EDF$.

5. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 7$ cm, $CD = 21$ cm şi $\sphericalangle A = 2\sphericalangle D$.

(8p) a) Aflaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ şi $\sphericalangle D$.

(8p) b) Calculaţi perimetrul trapezului $ABCD$.

INDICAȚII ŞI RĂSPUNSURI

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ

Testul 1

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	B	C	A	D	D	B	B	C	D

Partea a II-a: **1.** $BC + AC > AB$, deci $BC = 10$ cm. **2.** a) $x = \frac{11}{10} - \left(\frac{^{4)}7}{3} - \frac{^{3)}1}{4}\right) : \frac{5}{6} = \frac{11}{10} - \frac{25}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{^{3)}11}{10} - \frac{^{5)}5}{6} = \frac{8^{(2}}{30} = \frac{4}{15}$; b) $x = \frac{4}{15} = 0{,}2(6) = 0{,}266...$, deci rotunjind la a doua zecimală numărul raţional pozitiv x obţinem 0,27. **3.** a) $BC = 17$ cm; b) $\sphericalangle AED = 60°$; c) ΔADE este echilateral cu latura de 10 cm, prin urmare $\mathscr{P}_{ADE} = 30$ cm.

Testul 2

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	C	D	A	B	A	D	C	B	A

Partea a II-a: **1.** $x = \frac{21}{40}$. **2.** a) $a = 9$ şi $b = 12$; b) $\frac{b}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1{,}(3)$. **3.** a) $\sphericalangle NFD = \sphericalangle EDF = 60°$, deci $NF \parallel DE$; b) $NF \equiv MD$; $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle D$ şi $FD \equiv DE$, deci $\Delta NFD \equiv \Delta MDE$; c) $\Delta NFD \equiv \Delta MDE$, deci $\sphericalangle DNF = \sphericalangle EMD = 90°$, deci $DN \perp FN$, dar $FN \parallel DE$, prin urmare $ND \perp DE$.

Testul 3

Partea I:

Nr. item	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultate	D	D	C	A	C	A	B	C	C

Partea a II-a: **1.** $x \in \{0, 1, 2\}$. **2.** a) $x < y$; b) $y : (x^2 - y) = \frac{17}{9} : \left(\frac{121}{36} - \frac{17}{9}\right) = \frac{17}{9} : \frac{53}{36} = \frac{68}{53}$.

3. a) $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = 45°$, deci $AD \equiv BD$; b) $\sphericalangle ACE = 45°$ şi $\sphericalangle CDH = 90°$, deci $\sphericalangle DHC = 45°$; c) $AD \equiv BD$, $\sphericalangle ADH \equiv \sphericalangle BDC$ şi $DH \equiv DC$, deci $\Delta ADH \equiv \Delta BDC$, aşadar $AH \equiv BC$.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecţia 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr raţional

1. a) $16 = 4^2$; b) $36 = 6^2$; c) $49 = 7^2$; d) $64 = 8^2$; e) $81 = 9^2$; f) $100 = 10^2$; g) $144 = 12^2$; h) $196 = 14^2$; i) $324 = 18^2$; j) $400 = 20^2$. **2.** a) Rădăcina pătrată a numărului natural 25 este 5 sau radical din 25 este egal cu 5. **3.** a) A; b) A; c) A; d) A; e) F; f) A. **4.** a) $\sqrt{16} = 4$; b) $\sqrt{25} = 5$; c) $\sqrt{36} = 6$; d) $\sqrt{49} = 7$; e) $\sqrt{64} = 8$; f) $\sqrt{100} = 10$; g) $\sqrt{121} = 11$; h) $\sqrt{144} = 12$; i) $\sqrt{225} = 15$; j) $\sqrt{256} = 16$. **5.** a) $\sqrt{(-11)^2} = 11$; b) $\sqrt{(-23)^2} = 23$; c) $\sqrt{(-59)^2} = 59$; d) $\sqrt{(-77)^2} = 77$. **6.** a) $A = \{-7, 7\}$; b) $B = \{-8, 8\}$; $C = \{-29, 29\}$; $D = \{-67, 67\}$. **7.** a) 9; b) 1; c) 15; d) 13; e) 3; f) –4. **8.** a) 90; b) –1; c) –2; d) –7. **9.** a) A; b) A; c) A; d) A. **10.** a) $\frac{6}{5}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $\frac{8}{9}$; d) $\frac{5}{7}$; e) $\frac{9}{10}$; f) $\frac{7}{12}$; g) $\frac{15}{8}$; h) $\frac{14}{5}$. **11.** a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{5}{6}$; e) $\frac{4}{7}$; f) $\frac{5}{9}$. **12.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{3}{2}$;

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. **2.** A. **3.** A. **II. 1.** $4\sqrt{5}$. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $-2\sqrt{2}$. **III. 1.** C. **2.** D. **3.** B. **IV.** $a = \frac{4}{9}$, $\sqrt{a} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.

V. a) $x = \sqrt{2}$; b) $y = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{xy} = 2 \in \mathbb{N}$.

Lecţia 12. Media aritmetică şi media aritmetică ponderată a *n* numere reale, $n \geq 2$

1. 28; 32; 40; 35. **2.** 7; 8; 9; 12. **3.** $9\sqrt{6}$; $12\sqrt{5}$; $8\sqrt{7}$; $12\sqrt{3}$. **4.** $5\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $6\sqrt{5}$; $8\sqrt{7}$. **5.** a) 8; b) 7; c) 7; d) 6. **6.** a) $2\frac{1}{8}$; b) $1\frac{7}{24}$; c) $\frac{19}{36}$; d) $1\frac{21}{40}$. **7.** a) $\frac{25}{24}$; b) $\frac{47}{24}$; c) $\frac{61}{60}$; d) $\frac{17}{9}$. **8.** a) $y = 34\sqrt{2}$; b) $y = 30\sqrt{2}$; c) $y = 27\sqrt{2}$. **9.** a) $\sqrt{2}+3\sqrt{7}$; b) $3\sqrt{5}+3\sqrt{3}$. **10.** a) $5\sqrt{2}+5\sqrt{3}+7\sqrt{5}$; b) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$. **11.** a) $1\frac{7}{8}$; b) $\frac{23}{36}$; c) $\frac{29}{54}$; d) $1\frac{13}{72}$. **12.** a) $y = 15\sqrt{7}$; b) $y = 7\sqrt{7}$; c) $y = 13\sqrt{7}$. **13.** a) $2\frac{1}{30}$; b) $\frac{167}{192}$. **14.** a) $\frac{43}{150}$; b) $\frac{77}{480}$. **15.** a) $5\sqrt{2}$; b) $6\sqrt{7}$. **16.** a) $\frac{21\sqrt{5}}{2}$; b) $\frac{19\sqrt{3}}{2}$. **17.** a) $5\sqrt{7}$; b) $4\sqrt{5}$. **18.** a) $n = 5$; b) $n = 6$. **19.** a) $1\frac{9}{29}$; b) $2\frac{9}{22}$. **20.** a) $n = 3$; b) $n = 2$. **21.** a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **22.** 7,32. **23.** a) $n = 3$; b) $n = 5$. **24.** $a = 2\sqrt{7}$, $b = 6\sqrt{7}$, $c = 16\sqrt{7}$. **25.** Deoarece $\overline{1,a38} < \overline{1,2a8}$ rezultă că $a \in \{0, 1\}$; $x < \overline{1,a38} < \overline{1,2a8}$, deci $\overline{1,a38} = \frac{x+\overline{1,2a8}}{2}$, de unde obţinem $x \in \{0,868; 1,058\}$. **Test de evaluare stadială: 1.** a) $3\sqrt{7}$; b) 2; c) $4\sqrt{3}+3$. **2.** a) $5\sqrt{6}$; b) $\frac{59}{120}$. **3.** $2\sqrt{3}$.

Lecţia 13. Media geometrică a două numere reale pozitive

1. B. **2.** 4; 5; 6; 7. **3.** 6; 9; 8; 10. **4.** a) 14; b) 15; c) 12; d) 20. **5.** a) 5; b) 7; c) 4; d) 3. **6.** a) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$; b) $\frac{3\sqrt{7}}{5}$; c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; d) $\frac{7\sqrt{2}}{3}$. **7.** a) $\frac{7\sqrt{3}}{6}$; b) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$; c) $\frac{5\sqrt{6}}{12}$; d) $\frac{13\sqrt{5}}{15}$. **8.** a) 10; b) 15; c) 56; d) 63. **9.** a) $x = 32\sqrt{3}$; b) $x = 32\sqrt{2}$; c) $x = 12\sqrt{6}$; d) $x = 48\sqrt{3}$. **10.** a) $10\sqrt{2}$; b) $21\sqrt{3}$; c) $20\sqrt{2}$; d) $12\sqrt{7}$. **11.** a) $2\sqrt{21}$; b) $3\sqrt{10}$; c) $5\sqrt{14}$; d) $6\sqrt{14}$. **12.** a) $6\sqrt{\sqrt{3}}$; b) $10\sqrt{\sqrt{2}}$. **13.** a) $25\sqrt{6}$; b) $9\sqrt{5}$; c) $18\sqrt{3}$; d) $32\sqrt{7}$; e) $24\sqrt{2}$; f) $25\sqrt{7}$. **14.** $x + x^{-1} = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$. **15.** a) $x + y \geq 2\sqrt{x \cdot y}$, $y + z \geq 2\sqrt{y \cdot z}$ şi $z + x \geq 2\sqrt{z \cdot x}$, prin urmare $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8\sqrt{x^2y^2z^2} = 8xyz$; b) $xy + 1 \geq 2\sqrt{xy}$, $yz + 1 \geq 2\sqrt{yz}$ şi $zx + 1 \geq 2\sqrt{zx}$, prin urmare $(xy + 1) \cdot (yz + 1)(zx + 1) \geq 8xyz$. **16.** a) $x = \sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$; $m_g = 2$; b) $x = \sqrt{3}$, $y = 3\sqrt{3}$; $m_g = 3$. **17.** a) $x = 4\sqrt{3}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{9}$; $m_g = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; b) $x = 3\sqrt{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $m_g = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **18.** $x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \leq \frac{x(y+z)}{2} + \frac{y(z+x)}{2} + \frac{z(x+y)}{2} = \sqrt{x^2y^2} + \sqrt{y^2z^2} + \sqrt{z^2x^2} \leq \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{y^2+z^2}{2} + \frac{z^2+x^2}{2} = x^2 + y^2 + z^2$. **19.** $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$. **20.** Notând $b + c = x$, $c + a = y$, $a + b = z$ obţinem

$\in \{-804, 804\}$. **Test de evaluare stadială: 1.** a) $x \in \{-9, 9\}$; b) $x \in \{-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\}$; c) $x \in \left\{-\frac{5\sqrt{2}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{6}\right\}$. **2.** $x \in \{-3, 13\}$. **3.** $x \in \{-5 \cdot 2^{13}, 5 \cdot 2^{13}\}$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $y = \sqrt{6}$; $m_g = 1 \in \mathbb{N}$. **6.** $n = 4$. **Testul 2. 5.** $y = 4\sqrt{5} - 3$. **6.** $m_{ap} = 0{,}6$. **Testul 3. 5.** $m_{ap} = \frac{5}{13}$. **6.** $y = 4\sqrt{6}$.

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. F. **2.** A. **3.** A. **II. 1.** $2\sqrt{2}$. **2.** $\varnothing$. **3.** $\frac{1}{3}$. **III. 1.** A. **2.** C. **3.** D. **IV.** $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $m_g = 1 \in \mathbb{N}$. **V.** a) $n = 6$; b) $x \in \left\{-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right\}$.

Probleme din realitatea cotidiană

1. $\mathscr{P} = 4 \cdot 15\sqrt{2}$ dam $> 4 \cdot 15 \cdot 1{,}41$ dam $= 84{,}6$ dam $> 84{,}5$ dam. **2.** 3,5 m^2. **3.** 5850 kg. **4.** 34 cărţi. **5.** 2,5 lei. **6.** 8,75. **7.** $2\sqrt{34}$ dm $= \sqrt{136}$ dm $> 3\sqrt{15}$ dm $= \sqrt{135}$ dm. **8.** $\mathscr{P} = 10\sqrt{5} \cdot 4$ m $< 40 \cdot 2{,}237$ m $= 89{,}48$ m $< 89{,}5$ m. **9.** Luna a doua. **10.** $245\sqrt{3}$ km $> 245 \cdot 1{,}73$ km $= 423{,}85$ km; $423{,}85 : 60 = 7{,}06...$, deci automobilul nu poate parcurge distanţa respectivă în 7 ore. **11.** $\mathscr{A}_d = 30\sqrt{3}$ m^2; $\mathscr{A}_r = 30\sqrt{3}$ m^2, deci $\mathscr{A}_d = \mathscr{A}_r$. **12.** 25 ani. **13.** 7. **14.** Laura, Irina, Ioana, Maria sau Maria, Irina, Ioana, Laura. **15.** 94 spectatori. **16.** $\mathscr{V}_c = 250\sqrt{2}$ dm^3 $> 250 \cdot 1{,}41$ dm^3 $= 352{,}5$ dm^3 $= 352{,}5$ ℓ. **17.** Ştefan, Andrei şi Mihai au aceeaşi vârstă. **18.** Dan şi Ion au aceeaşi vârstă. **19.** 2 ani sau 3 ani sau 4 ani sau 6 ani. **20.** Vali – 1 an, Ion – 3 ani, Nicu – 5 ani, Dan – 9 ani sau Vali – 2 ani, Ion – 4 ani, Nicu – 5 ani, Dan – 8 ani.

GEOMETRIE

Capitolul I. Patrulaterul

Lecţia 1. Patrulaterul convex

1. $MNPQ$. **3.** a) A; b) F; c) F; d) A. **4.** a) F; b) F; c) A; d) A. **5.** C. 360°. **6.** A. **7.** a) $\sphericalangle D = 110°$; b) $\sphericalangle A = 85°$. **8.** a) $\mathscr{P}_{MNPQ} = 23$ cm; b) $\mathscr{P}_{MNPQ} = 24$ cm. **9.** F. **10.** a) $AD = 12$ cm; b) $BC = 8{,}5$ cm. **11.** a) $\sphericalangle M = 36°$, $\sphericalangle N = 72°$, $\sphericalangle P = 108°$, $\sphericalangle Q = 144°$; b) $\sphericalangle M = 96°$, $\sphericalangle N = 24°$, $\sphericalangle P = 120°$, $\sphericalangle Q = 120°$. **12.** Notăm cu $x°$, $(x + 2)°$, $(x + 4)°$ şi $(x + 6)°$ măsurile celor 4 unghiuri; $x° + x° + 2° + x° + 4° + x° + 6° = 360°$ sau $4x° + 12° = 360°$, deci $4x° = 348°$, aşadar $x° = 87°$, prin urmare unghiurile au măsurile de 87°, 89°, 91°, 93°. **13.** a) $DE = EF = 30$ cm, $FG = 10$ cm, $GD = 20$ cm; b) $EF = FG = 30$ cm, $GD = 7{,}5$ cm, $DE = 22{,}5$ cm. **14.** a) $\sphericalangle A = 51°$, $\sphericalangle B = 102°$, $\sphericalangle C = 101°$, $\sphericalangle D = 106°$; b) $\sphericalangle A = 81°$, $\sphericalangle B = 138°$, $\sphericalangle C = 95°$, $\sphericalangle D = 46°$. **15.** a) $AB = 19$ cm, $BC = 38$ cm, $CD = 32$ cm şi $DA = 11$ cm; b) $AB = 30$ cm, $BC = 45$ cm, $CD = 10$ cm şi $DA = 15$ cm. **16.** a) $\sphericalangle D = 120°$, $\sphericalangle E = 72°$, $\sphericalangle F = 96°$ şi $\sphericalangle G = 72°$; b) a) $\sphericalangle D = 30°$, $\sphericalangle E = 60°$, $\sphericalangle F = 120°$ şi $\sphericalangle G = 150°$. **17.** a) $\sphericalangle M = 60°$, $\sphericalangle N = 70°$, $\sphericalangle P = 100°$, $\sphericalangle Q = 130°$; b) $\sphericalangle M = 64°$, $\sphericalangle N = 72°$, $\sphericalangle P = 104°$, $\sphericalangle Q = 120°$. **18.** a) $\sphericalangle D = 150°$, $\sphericalangle E = 120°$, $\sphericalangle F = 75°$, $\sphericalangle G = 15°$; b) $\sphericalangle D = 144°$, $\sphericalangle E = 108°$, $\sphericalangle F = 72°$, $\sphericalangle G = 36°$. **19.** $AC < AB + BC$ şi $AC < AD + DC$, deci $2AC < \mathscr{P}_{ABCD}$ şi analog se arată că $2BD < \mathscr{P}_{ABCD}$, prin urmare $2(AC + BD) < 2\mathscr{P}_{ABCD}$, de unde rezultă că $AC + BD < \mathscr{P}_{ABCD}$. **20.** a) $\mathscr{P}_{ABD} + \mathscr{P}_{BCD} = \mathscr{P}_{ACD} + \mathscr{P}_{ABC}$, sau $2BD = 2AC$, deci $AC \equiv BD$; b) $\mathscr{P}_{ABD} = \mathscr{P}_{ACD}$ şi $AC \equiv BD$, prin urmare $AB \equiv CD$.
Test de evaluare stadială: 1. $\sphericalangle F = 85°$. **2.** $\sphericalangle M = 90°$. **3.** $AC = 9$ cm.

Fişă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. **2.** A. **3.** A. **II. 1.** 81 cm^2. **2.** 9 cm. **3.** 27 cm^2. **III. 1.** C. **2.** D. **3.** B. **IV.** $\Delta TAB \equiv \Delta TDC$, deci $\sphericalangle TAB \equiv \sphericalangle TDC$ şi $\sphericalangle TBA \equiv \sphericalangle TCD$, dar $\sphericalangle TAD \equiv \sphericalangle TDA$ şi $\sphericalangle TBC \equiv \sphericalangle TCB$, prin urmare $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CDA$ şi $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DCB$, deci $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180°$, de unde rezultă că $AD \parallel BC$, aşadar $ABCD$ este trapez isoscel. **V.** a) Observăm că $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle ACD = 30°$, deci $\sphericalangle DAC = 90°$, prin urmare $CD = 2AD = 60$ cm; $\mathscr{P}_{ABCD} = 150$ cm; b) În ΔADO, $DO = 2AO$, deci $CO = 2OA$, prin urmare $OC \equiv OE$ şi analog se arată că $OD \equiv OF$, de unde rezultă că $CDEF$ este dreptunghi. Din ΔCDE obţinem $DE = \dfrac{CE}{2} = 34$ cm; $\mathscr{A}_{CDEF} = 2040$ cm^2.

Probleme din realitatea cotidiană

1. 96 stâlpi. **2.** $\mathscr{A}_{DEFC} = 16{,}5$ dm^2. **3.** $\mathscr{P}_{DMCN} = 16$ dm. **4.** 16 m. **5.** Cantităţile sunt egale. **6.** $\mathscr{A}_{ABCD} = 44$ m^2. **7.** 12 m^2. **8.** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 120°$ şi $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 60°$. **9.** 800 m^2. **10.** 5429 m^2, 2492 m^2. **11.** a) d(A, CD) + d(B, CD) = 1,3 m; b) d(A, CD) = 1,3 m. **12.** $\mathscr{A}_{AMCN} = 100$ dam^2. **13.** $\mathscr{A}_{EFGH} = 50\%\mathscr{A}_{ABCD}$. **14.** $\mathscr{P}_{ABCD} = 9$ m. **15.** $EF = 8$ m. **16.** $\mathscr{A}_{ABCD} = 200$ dam^2. **17.** 54 m^2 de parchet. **18.** $\mathscr{A} = 490$ m^2. **19.** 108 m. **20.** $BD = 2$ km, $DC = 4$ km.

Capitolul II. Cercul

Lecţia 12. Unghi înscris în cerc

1. C. **2.** a) $\overset{\frown}{MN} = 54°$; b) $\sphericalangle MON = 48°$. **3.** a) $\overset{\frown}{EF} = 60°$; $\overset{\frown}{EDF} = 300°$; b) $\overset{\frown}{EF} = 72°$; $\overset{\frown}{EDF} = 288°$. **4.** a) F; b) A. **5.** a) $\sphericalangle EDF = 20°$; b) $\sphericalangle EDF = 37°$; c) $\sphericalangle EDF = 48°$. **6.** a) $\overset{\frown}{EF} = 30°$; b) $\overset{\frown}{EF} = 52°$; c) $\overset{\frown}{EF} = 90°$. **7.** a) $\sphericalangle A = 77°$, $\sphericalangle B = 67°$ şi $\sphericalangle C = 36°$; b) $\sphericalangle A = 30°30'$, $\sphericalangle B = 85°$ şi $\sphericalangle C = 64°30'$. **8.** a) $\overset{\frown}{AB} = 170°$, $\overset{\frown}{BC} = 80°$ şi $\overset{\frown}{CA} = 110°$; b) $\overset{\frown}{AB} = 146°$, $\overset{\frown}{BC} = 92°$ şi $\overset{\frown}{CA} = 122°$. **9.** $\sphericalangle MPN = 90°$. **10.** $EF = 14\sqrt{5}$ cm. **11.** a) $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 70°$ şi $\sphericalangle C = 50°$; b) $\sphericalangle A = 63°$, $\sphericalangle B = 72°$ şi $\sphericalangle C = 45°$. **12.** a) $\overset{\frown}{AB} = 136°$, $\overset{\frown}{BC} = 96°$ şi $\overset{\frown}{CA} = 128°$; b) $\overset{\frown}{AB} = 138°$, $\overset{\frown}{BC} = 102°$ şi $\overset{\frown}{CA} = 120°$. **13.** a) $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 48°$ şi $\sphericalangle C = 72°$; b) $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 45°$ şi $\sphericalangle C = 75°$. **14.** a) Cum $\sphericalangle ACB = 45°$, rezultă că $\sphericalangle AOB = 90°$ şi obţinem $R = 7$ cm; b) Analog obţinem $R = 9$ cm. **15.** a) $EF = 6\sqrt{2}$ cm; b) $EF = 5\sqrt{2}$ cm. **16.** Observăm că ΔOAB este echilateral, deci $\sphericalangle AOB = 60°$, prin urmare $\sphericalangle ACB \in \{30°; 150°\}$. **17.** a) Cum $\sphericalangle BAO = 23°$, rezultă că $\sphericalangle AOB = 134°$, deci $\sphericalangle ACB = 67°$. Analog obţinem $\sphericalangle BAC = 53°$, deci $\sphericalangle ABC = 60°$; b) $\sphericalangle BAC = 53°$, $\sphericalangle ABC = 51°$ şi $\sphericalangle BCA = 76°$. **18.** Dacă $E \in \overset{\frown}{BD}$, atunci $ABED$ şi $ADCF$ sunt inscriptibile, deci $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FAC = \sphericalangle BDE$, aşadar $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EAF$. **19.** Dacă notăm cu h înălţimea ΔOEF, rezultă că $h = \dfrac{R}{2}$, prin urmare înălţimea se opune unui unghi cu măsura de 30°, deci $\sphericalangle EOF \in \{30°, 150°\}$ şi $\sphericalangle EDF \in \{15°, 75°\}$. **20.** Patrulaterele $AEFC$ şi $EBDF$ sunt inscriptibile; $\sphericalangle BDF + \sphericalangle BEF = 180°$, deci $\sphericalangle BDF \equiv \sphericalangle AEF$; $\sphericalangle AEF + \sphericalangle ACF = 180°$, prin urmare $\sphericalangle BDC + \sphericalangle ACD = 180°$, de unde rezultă că $AC \parallel BD$. **21.** Construim $DM \perp AB$, $M \in AB$ şi $DN \perp AC$, $N \in AC$ şi observăm că $\Delta DMB \equiv \Delta DNC$, deci $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle DCA$, prin urmare punctele A, B, C şi D sunt conciclice. **22.** $BCEF$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle FBE \equiv \sphericalangle ECF$ (1). Din patrulaterele inscriptibile $BDHF$ şi $CDHE$ rezultă $\sphericalangle FBH \equiv \sphericalangle FDH$, respectiv $\sphericalangle ECH \equiv \sphericalangle EDH$ şi folosind (1) obţinem $\sphericalangle FDH \equiv \sphericalangle EDH$; analog obţinem $\sphericalangle EFH \equiv \sphericalangle DFH$, de unde rezultă concluzia. **23.** Notăm cu D al doilea punct de intersecţie al cercurilor circumscrise triunghiurilor AMP şi CPN şi observăm că $\sphericalangle ABC + \sphericalangle MDN = 180°$, deci $BMDN$ este inscriptibil, prin urmare cele trei cercuri au în comun punctul D. **24.** Se arată că $\sphericalangle APN = 90°$, deci $APND$ este inscriptibil, prin urmare $\sphericalangle APD \equiv \sphericalangle AND$ şi $\sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle BNC$, dar $\sphericalangle AND \equiv \sphericalangle BNC$, deci $\sphericalangle APD \equiv \sphericalangle PAD$, aşadar $DP = DA = l$. **25.** Dacă DE şi DF sunt diametre în cercurile circumscrise triunghiurilor ABD, respectiv ACD, rezultă că punctele E, A şi F sunt coliniare. $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$ şi $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle C$, deci $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle F$, prin urmare $DE \equiv DF$. **26.** Considerăm punctul $E \in AD$, astfel încât $DE \equiv DC$ şi, deoarece $\sphericalangle ADC = 60°$, rezultă că ΔEDC este echilateral, deci $EC \equiv DC$, prin urmare $\Delta AEC \equiv \Delta BDC$, de unde rezultă că $AE \equiv BD$, deci $AD = BD + CD$. **27.** Fie T punctul diametral opus punctului D.

Cuprins