

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programul școlar în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Iuliana Ene

Tehnoredactare: Carmen Rădulescu

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

TUDOR, ION

Matematică – algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru – 8 /

Ion Tudor. – Ed. a 8-a. – Pitești : Paralela 45, 2024

2 vol.

ISBN 978-973-47-4116-8

Partea 2. – 2024. – ISBN 978-973-47-4194-6

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2024

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

8

Ediția a VIII-a

Editura Paralela 45

ALGEBRĂ

Capitolul II

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice



Citesc și rețin

Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice se efectuează la fel ca adunarea și scăderea fracțiilor ordinare.

1. $\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{B(x)} = \frac{A(x) \pm C(x)}{B(x)}, B(x) \neq 0.$

2. $\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)}, B(x) \neq 0, D(x) \neq 0,$ se efectuează astfel:

– se aduc la același numitor comun fracțiile algebrice $\frac{A(x)}{B(x)}$ și $\frac{C(x)}{D(x)}$;

– cu fracțiile aduse la același numitor comun se efectuează adunarea (scăderea) ca la punctul 1.

Observație: Proprietățile adunării fracțiilor ordinare se transferă și la adunarea fracțiilor algebrice.



Cum se aplică?

1. Calculați:

a) $\frac{x-1}{4x} + \frac{3x-5}{4x};$

b) $\frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{x+2}{2x}.$

Soluție:

a) $\frac{x-1}{4x} + \frac{3x-5}{4x} = \frac{x-1+3x-5}{4x} = \frac{4x-6}{4x} = \frac{2(2x-3)}{4x} = \frac{2x-3}{2x};$

b) $\frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{x+2}{2x} = \frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{3x(x+2)}{6x^2} = \frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{3x^2+6x}{6x^2} = \frac{3x^2+1-(3x^2+6x)}{6x^2} =$
 $= \frac{3x^2+1-3x^2-6x}{6x^2} = \frac{1-6x}{6x^2}.$

[illegible]

Exerciții și probleme de dificultate avansată

16. Se consideră expresia $E(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{(x-1)^3 - (x-1)} - \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1} + \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+1)^3 - (x+1)}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Arătați că $E(x)$ nu depinde de x pentru orice x din domeniul de definiție.

17. Se consideră expresia $E(x) = \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{(x+1)^2}}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Rotunjiți la a patra zecimală numărul $n = E(2) + E(3) + E(4) + \dots + E(11)$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Calculați:

a) $\frac{5x^2 - x}{x - 4} - \frac{4x^2 + 3x}{x - 4}$;

b) $\frac{2x + 1}{6x} + \frac{4 - x}{3x - 9}$.

(3p) **2.** Calculați $\frac{x + 1}{2x^2 - x} - \frac{2x + 3}{4x^2 - 1} + \frac{1}{x}$.

(3p) **3.** Se consideră expresia $E(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} - \frac{x - 3}{x^2 - 2x + 1}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Aduceți expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

Lecția 2. Înmulțirea fracțiilor algebrice



Citesc și rețin

Înmulțirea fracțiilor algebrice $\frac{A(x)}{B(x)}$ și $\frac{C(x)}{D(x)}$, $B(x) \neq 0$, $D(x) \neq 0$, se efectuează astfel: $\frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \cdot C(x)}{B(x) \cdot D(x)}$.

Observație: Proprietățile înmulțirii fracțiilor ordinare se transferă și la înmulțirea fracțiilor algebrice.



Cum se aplică?

1. Efectuați următoarele înmulțiri:

a) $\frac{x + 2}{3x^3} \cdot \frac{4x + 1}{x - 2x^2}$;

b) $\frac{x - 1}{x + 3} \cdot \frac{x + 1}{x + 3}$.

[illegible]

a) $\frac{x^2-2x+3}{x-4}$; b) $\frac{-x^2-x+1}{x+2}$; c) $\frac{5x^2+x-2}{x+3}$; d) $\frac{3x^2+x-5}{7-x}$.

[illegible]

a) $\frac{x+1}{x^2-3}$; b) $\frac{x^2+x+1}{5+x}$; c) $\frac{x^2-x-1}{x+8}$; d) $\frac{x-1}{7-x^3}$.

c)

a) $\frac{x-3}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x-2}$; b) $\frac{x+4}{x-1} \cdot \frac{x-4}{x+1}$; c) $\frac{x+1}{x-3} \cdot \frac{x+1}{x-3}$; d) $\frac{x+2}{x-6} \cdot \frac{x+2}{x-6}$.

d)

6. Calculați:

a) $\frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x+1}{x-3}$; b) $\frac{x+4}{x+5} \cdot \frac{x-6}{x-4}$; c) $\frac{6-x}{x+7} \cdot \frac{x+5}{2-x}$; d) $\frac{9+x}{x-5} \cdot \frac{2-x}{x+8}$.

a) $\frac{2x-1}{3x+2} \cdot \frac{4x-1}{5x+2}$; b) $\frac{6x-5}{2x-3} \cdot \frac{1-8x}{4x+3}$; c) $\frac{1-9x}{7x+4} \cdot \frac{3x+7}{4-3x}$.

a) $\frac{x^2-1}{x^5+x^4} \cdot \frac{7x^3}{x-1};$ b) $\frac{x^2-4}{x^6-2x^5} \cdot \frac{5x^2}{x+2};$ c) $\frac{x-3}{3x^4} \cdot \frac{x^4+3x^3}{x^2-9}.$



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Calculați:

$$\text{a) } \left(\frac{9x-7}{10x^3} + \frac{6x+2}{10x^3} \right) : \frac{1}{4x}; \quad \text{b) } \frac{2x}{5} \cdot \left(\frac{3x^2-10}{6x^2} - \frac{4x+5}{8x} \right).$$

(3p) 2. Calculați $\frac{x+1}{x+2} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{3}{x^2+2x+1} \right)$.

(3p) 3. Se consideră expresia:

$$E(x) = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{x^2-6x+8}{x^2-4x+4} - \left(\frac{1-x}{x^2-9} + \frac{x+1}{x^2+3x} \right) : \frac{x-2}{4x-12} \right], \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0, 2, 3\}.$$

a) Aduceți expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $E(x) \geq 0$.

Lecția 6. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$



Citesc și rețin

Definiție: O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ (1) se numește **ecuație de gradul II cu o necunoscută**. Numerele a, b și c se numesc **coeficienții ecuației**.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numește **soluție a ecuației** (1) dacă $au^2 + bu + c = 0$ (u verifică ecuația).

A rezolva ecuația (1) înseamnă a determina mulțimea de soluții:

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au^2 + bu + c = 0\}.$$

Definiție: Două ecuații de gradul II cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

Observație: Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației de forma $ax^2 + bx + c = 0$, atunci $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvarea ecuației (1):

A. Cazurile particulare

$$1. c = 0; \quad ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ sau } x_2 = -\frac{b}{a}, \text{ deci } S = \left\{ 0, -\frac{b}{a} \right\}.$$

$$2. b = 0; \quad ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Dacă $\frac{c}{a} > 0$, atunci $S = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \text{Dacă } \frac{c}{a} \leq 0, \text{ atunci } x^2 + \frac{c}{a} = 0 &\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right)\left(x + \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|} \text{ și } x_2 = -\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}, \text{ deci } S = \left\{-\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}, \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right\}. \end{aligned}$$

B. Cazul general

Definiție: Numărul $\Delta = b^2 - 4ac$ se numește **discriminantul ecuației (1)**.

Pentru rezolvarea ecuației (1) în cazul general $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ procedăm astfel:

1. calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$;
2. ▪ dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația (1) nu are soluții în $\mathbb{R}$, deci $S = \emptyset$;
- dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația (1) are două soluții egale în $\mathbb{R}$:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}, \text{ deci } S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\};$$

- dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația (1) are două soluții distincte în $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ deci } S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}.$$



Cum se aplică?

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $3x^2 + 5x = 0$;

b) $4x^2 - 100 = 0$.

Soluție:

a) $3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 5) = 0$, deci $x = 0$ sau $3x + 5 = 0$; $3x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$, prin urmare $S = \left\{-\frac{5}{3}, 0\right\}$;

b) $4x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) = 0$, deci $x - 5 = 0$
sau $x + 5 = 0$; $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ și $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$; prin urmare, $x \in \{-5, 5\}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$;

b) $(x - 1)^2 = -x(x + 5)$.

Soluție:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$, deci $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, prin urmare $\Delta = 0$.

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$, deci $S = \{-3\}$;

Capitolul III

FUNCȚII

Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite



Citesc și rețin

Definiție: Fie A și B două mulțimi nevide. O lege (un procedeu) f prin care se asociază fiecărui element din A un singur element din B se numește **funcție** definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B .

Notăm $f: A \rightarrow B$ și citim „funcția f este definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B ”.

Mulțimea A se numește **domeniul de definiție** al funcției, mulțimea B se numește **codomeniul** sau **domeniul de valori** al funcției, iar legea (procedeul) f se numește **legea de corespondență** a funcției.

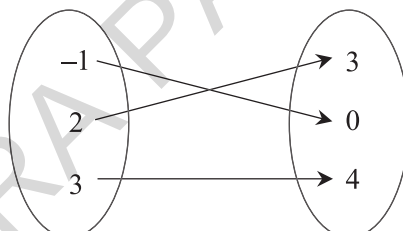
Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numește **imaginea lui x prin funcția f** sau **valoarea funcției f în punctul x** .

Moduri de definire a unei funcții

O funcție poate fi definită:

1. printr-o diagramă

Exemplu:



2. printr-un tabel

Exemplu:

x	-1	2	3
$f(x)$	0	3	4

3. printr-o formulă analitică

Exemplu:

$$f: \{-1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 3, 4\}, f(x) = x + 1$$

Definiție: Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Mulțimea $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\}$ se numește **imaginea funcției f** sau **mulțimea valorilor funcției f** . $\text{Im } f \subset B$.

Definiție: Fie $f: A \rightarrow B$ o funcție. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$, atunci funcția f se numește **funcție numerică**.

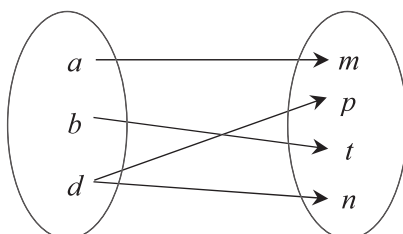
Definiție: Două funcții $f: A \rightarrow B$ și $g: C \rightarrow D$ se numesc **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$.

Notăm $f = g$ și citim „funcțiile f și g sunt egale”.



Cum se aplică?

1. Stabiliți dacă diagrama următoare definește o funcție.



Soluție:

Diagrama nu definește o funcție, deoarece elementul d din domeniul de definiție are două imagini, p și n .

2. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 4\}$, $f(x) = x^2$. Determinați mulțimea $\text{Im } f$.

Soluție:

Calculăm imaginile elementelor din domeniul de definiție: $f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, prin urmare $\text{Im } f = \{0, 1, 4\}$.

3. Se consideră funcția $g : \{-6, -4, 0, 4, 6\} \rightarrow A$, $g(x) = \frac{x}{2} + 5$.

a) Calculați media aritmetică a numerelor $g(-4)$ și $g(4)$.

b) Calculați media geometrică a numerelor $g(-6)$ și $g(6)$.

Soluție:

$$\text{a) } g(-4) = -\frac{4}{2} + 5 = 3 \text{ și } g(4) = \frac{4}{2} + 5 = 7; m_a = \frac{g(-4) + g(4)}{2} = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5;$$

$$\text{b) } g(-6) = -\frac{6}{2} + 5 = 2 \text{ și } g(6) = \frac{6}{2} + 5 = 8; m_g = \sqrt{g(-6) \cdot g(6)} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4.$$



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele funcții:

a) $f : E \rightarrow F, f(x) = 10x$;

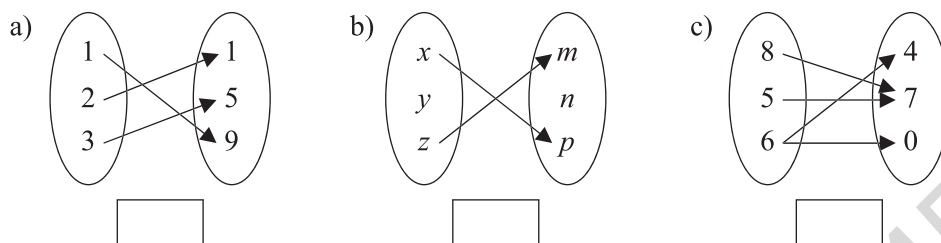
b) $g : \{-1, 1, 2\} \rightarrow \{1, 4\}, g(x) = x^2$;

c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = |x|$.

2. Se consideră funcția $f : A \rightarrow B, f(x) = 5x$. Numiți:

a) domeniul de definiție; b) domeniul de valori; c) legea de corespondență.

3. Verificați dacă următoarele diagrame reprezintă funcții, completând caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”. Justificați răspunsul.



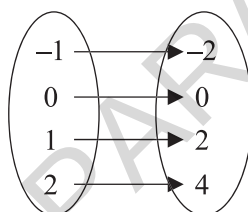
4. Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$, definită prin tabelul următor:

x	1	2	3	5
$f(x)$	2	3	4	6

Completați spațiul punctat cu:

- a) mulțimea care reprezintă domeniul de definiție al funcției;
 b) mulțimea care reprezintă domeniul de valori al funcției;
 c) legea de corespondență (exprimată printr-o formulă) a funcției.

5. Se consideră funcția $f: E \rightarrow F$, definită prin diagrama următoare:



Completați spațiul punctat cu:

- a) mulțimea care reprezintă domeniul de definiție al funcției;
 b) mulțimea care reprezintă domeniul de valori al funcției;
 c) legea de corespondență (exprimată printr-o formulă) a funcției.

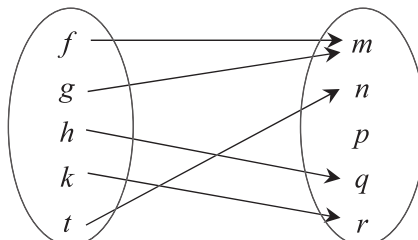
6. Se consideră funcția $f: A \rightarrow B$, definită prin tabelul următor:

x	-2	1	2	3	7
$f(x)$	-3	0	1	2	6

Completați spațiul punctat cu valoarea funcției f în punctul:

- a) 1; b) 7; c) -2; d) 3; e) 2.

7. Se consideră funcția $s: E \rightarrow F$, definită prin diagrama următoare:



Lecția 9. Funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice



Citesc și rețin

Definiție: Funcția de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, se numește **funcție liniară**.

Reprezentarea grafică a funcției liniare este o dreaptă.

Definiție: Pentru $a \neq 0$, funcția liniară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ se numește **funcție de gradul I**.

Intersecțiile graficului funcției de gradul I cu axele de coordonate

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$:

$$- G_f \cap Ox = A\left(-\frac{b}{a}; 0\right);$$

$$- G_f \cap Oy = B(0; b).$$



Cum se aplică?

1. Determinați punctul de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{4} - 1$ care are coordonatele egale.

Soluție:

Determinăm punctul $M(x; f(x)) \in G_f$ cu proprietatea $x = f(x)$, deci ${}^4)x = \frac{x}{4} - 1$ sau

$$4x = x - 4, \text{ așadar } 3x = -4, \text{ de unde obținem } x = -\frac{4}{3}, \text{ prin urmare } M\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

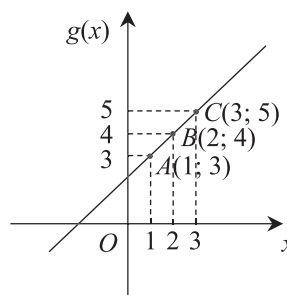
2. Reprezentați grafic în sistemul de axe ortogonale xOy funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 2$.

Soluție:

Scriem tabelul de valori al funcției g pentru $x = 1, x = 2$ și $x = 3$.

x	1	2	3
$g(x)$	3	4	5

Deci, graficul funcției g conține punctele $A(1; 3), B(2; 4)$ și $C(3; 5)$. Reprezentăm aceste puncte în sistemul de axe ortogonale xOy și construim graficul.



GEOMETRIE

Capitolul I

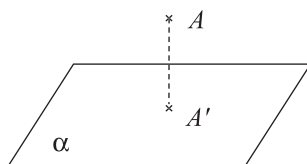
ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte



Citesc și rețin

Definiție: Proiecția unui punct exterior unui plan pe planul respectiv este piciorul perpendicularei construite din punctul respectiv pe acel plan.



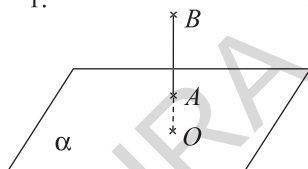
Notăm $\text{pr}_\alpha A = A'$.

Proiecția unui segment: Proiecția segmentului AB pe planul α este segmentul $A'B'$, ale cărei extremități sunt proiecțiile extremităților segmentului dat pe planul α .

Observație: Proiecția segmentului AB pe planul α este:

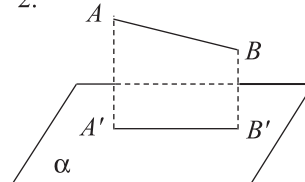
1. un punct, dacă dreapta suport a segmentului este perpendiculară pe planul α ;
2. un segment, dacă dreapta suport a segmentului nu este perpendiculară pe planul α .

1.



Notăm $\text{pr}_\alpha AB = O$.

2.



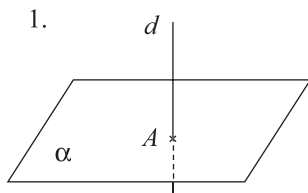
Notăm $\text{pr}_\alpha AB = A'B'$.

Proiecția unei drepte: Proiecția dreptei d pe planul α este dreapta determinată de proiecțiile pe planul α a două puncte diferite ale dreptei d .

Observație: Proiecția dreptei d pe planul α este:

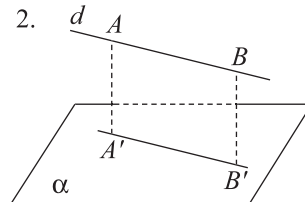
1. un punct, dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α ;
2. o dreaptă, dacă dreapta d nu este perpendiculară pe planul α .

1.



Notăm $\text{pr}_\alpha d = A$.

2.



Notăm $\text{pr}_\alpha d = A'B'$.



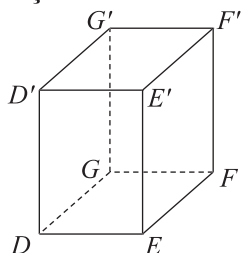
Cum se aplică?

1. Se consideră prisma patrulateră regulată $DEFGD'E'F'G'$. Determinați:

a) $\text{pr}_{(DEF)} D'$;

b) $\text{pr}_{(D'DG)} F'$.

Soluție:



a) Deoarece $D'D \perp (DEF)$, rezultă că proiecția punctului D' pe planul (DEF) este punctul D ;

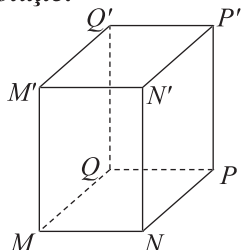
b) Deoarece $F'G' \perp (D'DG)$, rezultă că proiecția punctului F' pe planul $(D'DG)$ este punctul G' .

2. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$. Determinați:

a) $\text{pr}_{(MNP)} N'P'$;

b) $\text{pr}_{(M'MN)} NQ'$.

Soluție:

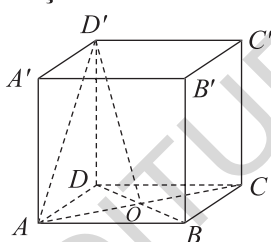


a) Observăm că $\text{pr}_{(MNP)} N' = N$ și $\text{pr}_{(MNP)} P' = P$, deci $\text{pr}_{(MNP)} N'P' = NP$;

b) Observăm că $\text{pr}_{(M'MN)} N = N$ și $\text{pr}_{(M'MN)} Q' = M'$, deci $\text{pr}_{(M'MN)} NQ' = M'N$.

3. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia de 4 cm. Aflați lungimea proiecției segmentului AD' pe planul $(D'DB)$.

Soluție:



$AC \cap BD = \{O\}$. Deoarece $AC \perp BD$ și $AC \perp D'D$, rezultă că $AC \perp (B'DD)$, prin urmare $\text{pr}_{(D'DB)} A = O$ și, deoarece $\text{pr}_{(D'DB)} D' = D'$, deducem că $\text{pr}_{(D'DB)} AD' = OD'$. În $\triangle D'DO$ cu $\angle D = 90^\circ$, aplicând teorema lui Pitagora rezultă că $D'O^2 = D'D^2 + DO^2$ și după efectuarea calculelor obținem $D'O = 2\sqrt{6}$ cm.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Încercuți litera corespunzătoare răspunsului corect. Dacă proiecția punctului E pe planul θ este punctul F , atunci:

A. $EF \parallel \theta$;

B. $EF \perp \theta$.

2. Citiți următoarele notații:

a) $\text{pr}_\alpha A = B$;

b) $\text{pr}_{(ABC)} M = N$;

c) $\text{pr}_\beta P = E$.

3. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Dacă proiecția segmentului MN pe planul β este segmentul PQ , atunci:

A. $MN \not\perp \beta$;

B. $MN \perp \beta$.

4. Citiți următoarele notații, unde AB , EF , MN și PQ sunt segmente:

a) $\text{pr}_{\alpha} AB = PQ$;

b) $\text{pr}_{(ABC)} EF = G$;

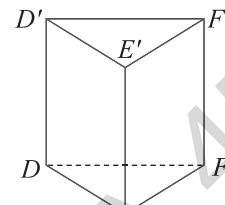
c) $\text{pr}_{\theta} MN = AB$.

5. În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare:

a) $\text{pr}_{(DEF)} D' = D$;

b) $\text{pr}_{(DEF)} E' = F$;

c) $\text{pr}_{(D'E'F')} F = F'$.

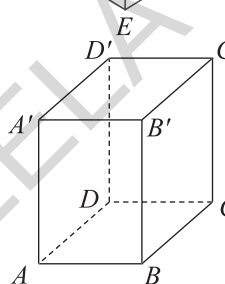


6. În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) $\text{pr}_{(ABC)} A' = \dots\dots\dots$;

b) $\text{pr}_{(ABC)} C' = \dots\dots\dots$;

c) $\text{pr}_{(A'B'C')} B = \dots\dots\dots$.



7. Pentru paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ reprezentat în figura de la problema anterioară, completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) $\text{pr}_{(A'AD)} B = \dots\dots\dots$;

b) $\text{pr}_{(C'CD)} A = \dots\dots\dots$;

c) $\text{pr}_{(A'AB)} C' = \dots\dots\dots$;

d) $\text{pr}_{(B'BC)} D' = \dots\dots\dots$.

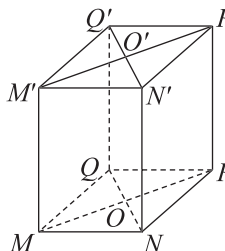
8. În figura alăturată este reprezentată prisma patrulateră regulată $MNPQM'N'P'Q'$, unde $MP \cap NQ = \{O\}$ și $M'P' \cap N'Q' = \{O'\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\text{pr}_{(N'NQ)} M = N$;

b) $\text{pr}_{(M'MP)} N = O$;

c) $\text{pr}_{(Q'QN)} P' = O'$;

d) $\text{pr}_{(M'MP)} Q' = O'$.



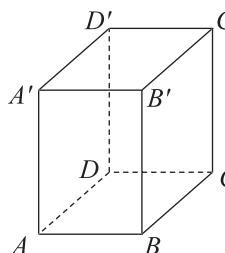
9. În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\text{pr}_{(ABC)} A'B' = AB$;

b) $\text{pr}_{(A'B'C')} BC = B'C'$;

c) $\text{pr}_{(ABC)} A'C' = AC$;

d) $\text{pr}_{(A'B'C')} BD = B'D'$.



10. Pentru paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ reprezentat în figura de la problema anterioară, completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) $\text{pr}_{(A'B'C')} BC' = \dots\dots\dots$;

b) $\text{pr}_{(ABC)} D'B = \dots\dots\dots$;

c) $\text{pr}_{(A'AD)} A'C = \dots\dots\dots$;

d) $\text{pr}_{(B'BC)} B'D = \dots\dots\dots$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

- 11.** Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$. Determinați:
- a) $\text{pr}_{(D'DB)} A'D'$; b) $\text{pr}_{(A'AC)} AB$; c) $\text{pr}_{(B'BD)} B'C$; d) $\text{pr}_{(A'AC)} AD'$.
- 12.** Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful în V , care are muchia bazei de $4\sqrt{2}$ cm și muchia laterală de 5 cm. Calculați:
- a) lungimea proiecției segmentului AD pe planul (VBD) ;
b) lungimea proiecției segmentului VB pe planul (VAC) .
- 13.** Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu muchia de 6 cm, în care notăm cu M mijlocul muchiei CD . Calculați:
- a) lungimea proiecției segmentului AB pe planul (BCD) ;
b) lungimea proiecției segmentului AD pe planul (ABM) .
- 14.** Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia de $6\sqrt{2}$ cm. Aflați:
- a) lungimea proiecției segmentului $D'B$ pe planul $(A'AD)$;
b) lungimea proiecției segmentului BC' pe planul $(B'BD)$.
- 15.** În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, care are muchia bazei de 8 cm și înălțimea de $2\sqrt{7}$ cm, notăm cu M mijlocul muchiei $A'B'$.
- a) Calculați lungimea proiecției segmentului AM pe planul $(A'AC)$.
b) Calculați lungimea proiecției segmentului CM pe planul $(B'BD)$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

- 16.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$. Dacă punctul B' se proiectează pe planul $(A'BC')$ în centrul de greutate al triunghiului $A'BC'$, arătați că $ABCD A'B'C'D'$ este cub.
- 17.** Arătați că o piramidă patrulateră regulată are muchia bazei egală cu muchia laterală, dacă și numai dacă centrul bazei se proiectează pe planul unei fețe laterale în centrul cercului circumscris acesteia.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) **1.** Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$. Determinați:
- a) $\text{pr}_{(ABC)} D'$; b) $\text{pr}_{(B'BC)} A'$; c) $\text{pr}_{(B'BD)} C$.
- (3p) **2.** Se consideră prisma patrulateră regulată $MNPQM'N'P'Q'$. Determinați:
- a) $\text{pr}_{(MNP')} PQ$; b) $\text{pr}_{(N'NP')} MP$; c) $\text{pr}_{(N'NQ')} MQ'$.
- (3p) **3.** În piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu vârful în V , construim înălțimea VO , $O \in (ABC)$. Știind că piramida are muchia bazei de $4\sqrt{2}$ cm și muchia laterală de 6 cm, calculați lungimea proiecției muchiei VB pe planul (VAO) .

Lecția 5. Plane perpendiculare



Citesc și rețin

Definiție: Planele α și β se numesc **perpendiculare** dacă măsura unghiului dintre ele este egală cu 90° .

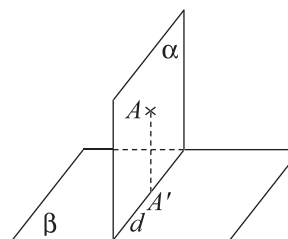
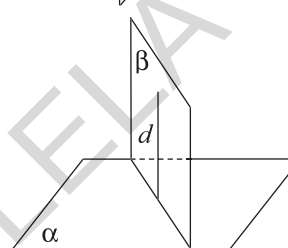
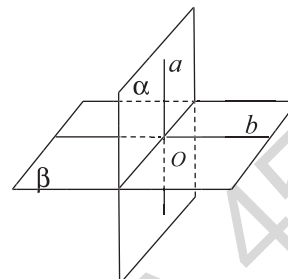
Notăm $\alpha \perp \beta$.

Teoremă: Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α , atunci orice plan β care conține dreapta d este perpendicular pe α .

$$\left. \begin{array}{l} d \perp \alpha \\ d \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha$$

Teoremă: Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci proiecția pe unul dintre plane a oricărui punct din celălalt plan aparține dreptei de intersecție a planelor.

$$\left. \begin{array}{l} d \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = d \\ A \in \alpha \\ AA' \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow A' \in d$$



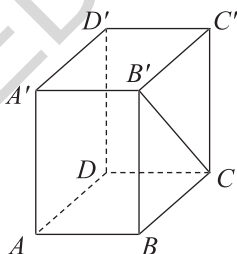
Cum se aplică?

1. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$. Arătați că:

a) $(ADD') \perp (CDD')$;

b) $(A'B'C) \perp (B'BC)$.

Soluție:

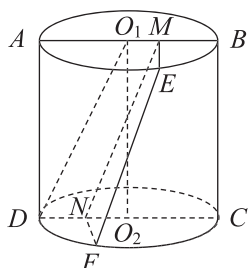


a) $(ADD') \cap (CDD') = DD'$, $AD \subset (ADD')$, $AD \perp DD'$, $CD \subset (CDD')$, $CD \perp DD'$, deci $\angle((ADD'), (CDD')) = \angle ADC = 90^\circ$, prin urmare $(ADD') \perp (CDD')$;

b) Deoarece $A'B' \subset (A'B'C)$ și $A'B' \perp (B'BC)$, rezultă că $(A'B'C) \perp (B'BC)$.

2. Dreptunghiul $ABCD$ este secțiunea axială a unui cilindru circular drept cu $R = 6$ cm și $G = 8$ cm. Se consideră punctele E și F pe cercurile de diametre AB , respectiv CD , astfel încât $\widehat{AB} = 3 \cdot \widehat{EB}$ și $\widehat{CD} = 3 \cdot \widehat{FD}$. Calculați lungimea proiecției segmentului EF pe planul (ABC) .

Soluție:



Construim înălțimea O_1O_2 a cilindrului circular drept și notăm cu M și N proiecțiile punctelor E , respectiv F pe planul (ABC) și, deoarece planul (ABC) este perpendicular pe planele bazelor, rezultă că $M \in AB$ și $N \in CD$. $\widehat{AB} = 3 \cdot \widehat{EB}$, deci $3 \cdot \widehat{EB} = 180^\circ$, de unde obținem $\widehat{EB} = 60^\circ$, prin urmare $\triangle O_1EB$ este echilateral, așadar $O_1M = \frac{R}{2} = 3$ cm.

Analog, se arată că $O_2N = 3$ cm. Deoarece $O_1M \equiv DN$ și $O_1M \parallel DN$, rezultă că O_1MND este paralelogram, deci $MN \equiv O_1D$. În $\triangle O_1O_2D$ cu $\angle O_2 = 90^\circ$, aplicând teorema lui Pitagora rezultă că $O_1D^2 = O_1O_2^2 + DO_2^2$ și obținem $O_1D = 10$ cm, deci $MN = 10$ cm.

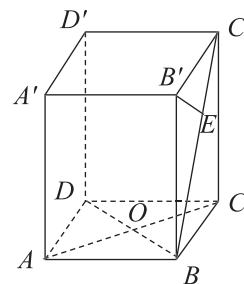
3. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$, care are muchia bazei de $4\sqrt{2}$ cm și muchia laterală de $4\sqrt{6}$ cm. Calculați:

- a) $d[A, (B'BD)]$; b) $d[B', (ABC')]$.

Soluție:

a) $AC \cap BD = \{O\}$. $B'B \perp (ABC)$ și $B'B \subset (B'BD)$, deci $(B'BD) \perp (ABC)$, prin urmare $d[A, (B'BD)] = AO = 4$ cm;

b) $AB \perp (B'BC)$ și $AB \subset (ABC')$, deci $(ABC') \perp (B'BC)$. Construim $B'E \perp (ABC')$, $E \in BC'$ și în $\triangle BB'C'$ avem $B'E = \frac{B'C' \cdot B'B}{BC'}$. În $\triangle BCC'$, cu $\angle C = 90^\circ$, aplicând teorema lui



Pitagora obținem $BC' = 8\sqrt{2}$ cm, prin urmare $B'E = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{6}}{8\sqrt{2}}$ cm, deci $B'E = 2\sqrt{6}$ cm.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele notații:

- a) $(ABC) \perp (DEF)$; b) $\alpha \perp \theta$; c) $(MNP) \perp (MNQ)$.

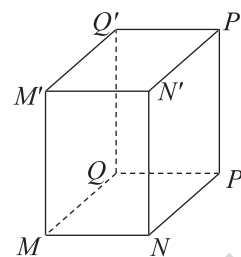
2. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Planele α și β sunt perpendiculare dacă:

- A. $\angle(\alpha, \beta) = 30^\circ$; B. $\angle(\alpha, \beta) = 45^\circ$;
C. $\angle(\alpha, \beta) = 60^\circ$; D. $\angle(\alpha, \beta) = 90^\circ$.

3. În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Deoarece $M'M \perp (MNP)$ și $M'M \subset (M'MQ)$, rezultă că $(M'MQ) \perp (MNP)$; ☐

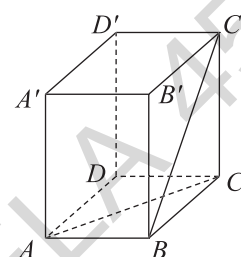
b) Deoarece $NP \perp (PP'Q')$ și $NP \subset (MNP)$, rezultă că $(MNP) \perp (PP'Q')$. ☐



4. În figura alăturată este reprezentată prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Deoarece $A'A \perp (ABC)$ și $A'A \subset (A'AC)$, rezultă că $(A'AC) \perp (ABC)$; ☐

b) Deoarece $D'C' \perp (BCC')$ și $D'C' \subset (BC'D')$, rezultă că $(BC'D') \perp (BCC')$. ☐

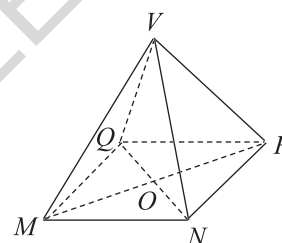


5. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VMNPQ$ cu vârful în V . Completați caseta cu semnul corespunzător „ $\perp$ ” sau „ $\nparallel$ ”. Justificați răspunsul.

a) $(VMP) \perp (MNP)$. ☐

b) $(VNP) \perp (MNP)$. ☐

c) $(VNQ) \perp (MNP)$. ☐



Exerciții și probleme de dificultate medie

6. În tetraedrul regulat $ABCD$ construim înălțimea AO , $O \in (BCD)$. Arătați că:

a) $(ABO) \perp (ACD)$; b) $(ACO) \perp (ABD)$; c) $(ADO) \perp (ABC)$.

7. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia de $4\sqrt{6}$ cm.

a) Arătați că $(A'AC) \perp (B'BD)$. b) Calculați $d[D', (A'AC)]$.

8. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, care are muchia bazei de $4\sqrt{2}$ cm și înălțimea de $4\sqrt{3}$ cm.

a) Arătați că $(B'AC) \perp (B'BD)$. b) Calculați $d[B, (B'AC)]$.

9. Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ are $AB = 3$ cm, $AD = 6$ cm, $AA' = 3\sqrt{5}$ cm. Calculați:

a) $d[B, (B'AD)]$; b) $d[B', (ABC)]$.

10. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 10$ cm, $AD = 5$ cm și $AA' = 15$ cm se consideră punctul E situat pe BD' , astfel încât $\frac{EB}{ED'} = \frac{2}{3}$. Calculați:

a) $d[E, (ABC)]$; b) $d[E, (A'AD)]$; c) $d[E, (C'CD)]$.

11. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, care are muchia bazei de 8 cm și muchia laterală de $4\sqrt{3}$ cm, notăm cu M mijlocul muchiei $B'C'$.

a) Arătați că $(A'BM) \perp (B'BC)$. b) Determinați $d[B', (A'BM)]$.

Capitolul II

ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

II.1. POLIEDRE

Definiție: Un corp geometric care este mărginit numai de fețe plane se numește **poliedru**.

Definiții:

Aria laterală a unui poliedru, notată $\mathcal{A}_l$, reprezintă suma ariilor fețelor laterale ale poliedrului.

Aria totală a unui poliedru, notată $\mathcal{A}_t$, reprezintă suma dintre aria laterală a poliedrului și aria bazei (bazelor).

Volumul unui poliedru, notat $\mathcal{V}$, reprezintă spațiul (geometric) pe care îl ocupă acesta.

Lecția 6. Prisma regulată



Citesc și rețin

Notații utilizate: h – lungimea înălțimii prismei, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei, $\mathcal{A}_l$ – aria laterală a prismei, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a prismei, $\mathcal{V}$ – volumul prismei.

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h,$$

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b,$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h.$$



Cum se aplică?

1. Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$, care are muchia bazei de 4 cm și aria laterală egală cu $48\sqrt{3}$ cm². Calculați:

a) h ;

b) $\mathcal{A}_l$;

c) $\mathcal{V}$.

Soluție:

a) $\mathcal{A}_l = 48\sqrt{3}$ cm², deci $\mathcal{P}_b \cdot h = 48\sqrt{3}$ cm² sau $12 \cdot h$ cm = $48\sqrt{3}$ cm², de unde rezultă că $h = \frac{48\sqrt{3}}{12}$ cm și obținem $h = 4\sqrt{3}$ cm;

b) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 48\sqrt{3}$ cm² + $2 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ cm² = $48\sqrt{3}$ cm² + $\frac{16\sqrt{3}}{2}$ cm² = $48\sqrt{3}$ cm² + $8\sqrt{3}$ cm² = $56\sqrt{3}$ cm²;

c) $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3}$ cm³ = $4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}$ cm³ = 48 cm³.

2. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, care are muchia bazei de $2\sqrt{2}$ cm și muchia laterală de $2\sqrt{6}$ cm, notăm cu M mijlocul muchiei BC . Aflați:

a) $\mathcal{A}_l$;

b) $\mathcal{V}$;

c) $\angle(A'B, (ABC))$;

d) $\mathcal{A}_{C'MA}$.

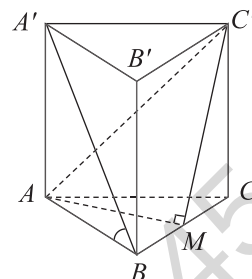
Soluție:

$$\text{a) } \mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 3l \cdot h = 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} \text{ cm}^2 = 12\sqrt{12} \text{ cm}^2 = 12\sqrt{2^2 \cdot 3} \text{ cm}^2 = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2;$$

$$\text{b) } \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{(2\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6} \text{ cm}^3 = \frac{(8\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{6})}{4} \text{ cm}^3 = 12\sqrt{2} \text{ cm}^3;$$

$$\text{c) } \angle(A'B, (ABC)) = \angle A'BA. \text{ În } \triangle A'BA \text{ cu } \angle A = 90^\circ, \operatorname{tg}(\angle B) = \frac{A'A}{AB} = \frac{2\sqrt{6} \text{ cm}}{2\sqrt{2} \text{ cm}} = \sqrt{3}, \text{ deci } \angle A'BA = 60^\circ;$$

d) Arătăm că $\triangle C'MA$ este dreptunghic, aplicând teorema celor 3 perpendiculare: $C'C \perp (ABC)$, $CB \subset (ABC)$, $AM \subset (ABC)$ și $AM \perp BC$, deci $C'M \perp AM$, prin urmare $\mathcal{A}_{C'MA} = \frac{C'M \cdot AM}{2}$. Din $\triangle C'CM$ cu $\angle C = 90^\circ$, aplicând teorema lui Pitagora, rezultă că $C'M^2 = C'C^2 + CM^2$, deci $C'M^2 = (2\sqrt{6})^2 + \sqrt{2}^2$, așadar $C'M^2 = 26 \text{ cm}$ și obținem $C'M = \sqrt{26} \text{ cm}$. $AM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm} = \sqrt{6} \text{ cm}$, prin urmare $\mathcal{A}_{C'MA} = \frac{\sqrt{26} \cdot \sqrt{6}}{2} \text{ cm}^2 = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 39}}{2} \text{ cm}^2 = \frac{2\sqrt{39}}{2} \text{ cm}^2 = \sqrt{39} \text{ cm}^2$.



3. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$, cu muchia bazei de $3\sqrt{3} \text{ cm}$ și înălțimea de $3\sqrt{6} \text{ cm}$. Calculați:

- a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{V}$; c) măsura $\angle(BD', (A'AD))$; d) $d(C, BD')$.

Soluție:

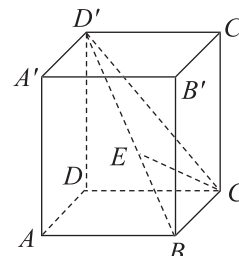
$$\text{a) } \mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6} \text{ cm}^2 = 36\sqrt{18} \text{ cm}^2 = 108\sqrt{2} \text{ cm}^2;$$

$$\text{b) } \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = l^2 \cdot h = 27 \cdot 3\sqrt{6} \text{ cm}^3 = 81\sqrt{6} \text{ cm}^3;$$

$$\text{c) } \text{Deoarece } BA \perp (A'AD), \text{ rezultă că } \angle(BD', (A'AD)) = \angle AD'B. \text{ În } \triangle AD'B \text{ cu } \angle A = 90^\circ, \operatorname{tg}(\angle D') = \frac{AB}{D'A} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ prin}$$

urmare $\angle AD'B = 30^\circ$;

d) Construim $CE \perp BD'$, $E \in BD'$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle CC'D'$ cu $\angle C' = 90^\circ$, rezultă că $D'C^2 = C'C^2 + C'D'^2$, deci $D'C^2 = (3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{3})^2$ sau $D'C^2 = 54 + 27$, așadar $D'C^2 = 81$, prin urmare $D'C = \sqrt{81} \text{ cm}$ și obținem $CD' = 9 \text{ cm}$. Analog, din $\triangle BCD'$ cu $\angle C = 90^\circ$, cu teorema lui Pitagora rezultă că $D'B^2 = D'C^2 + BC^2$, deci $D'B^2 = 9^2 + (3\sqrt{3})^2$ sau $D'B^2 = 81 + 27$, așadar $D'B^2 = 108$, prin urmare $D'B = \sqrt{108} \text{ cm}$ și obținem $BD' = 6\sqrt{3} \text{ cm}$. În $\triangle BCD'$ avem $CE = \frac{CB \cdot CD'}{BD'} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 9}{6\sqrt{3}} \text{ cm} = \frac{27\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \text{ cm} = \frac{9}{2} \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}$.





Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Utilizând notațiile specifice prisme regulate, rezolvați următoarele probleme.

- Dacă $l = 4$ cm și $h = 3\sqrt{3}$ cm, aflați $\mathcal{P}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$.
- Dacă $l = 2\sqrt{3}$ cm și $h = 7$ cm, aflați $\mathcal{P}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$.
- Dacă $l = 6$ cm și $\mathcal{A}_l = 90$ cm², aflați $\mathcal{P}_b$, h , $\mathcal{A}_b$ și $\mathcal{V}$.
- Dacă $h = 8$ cm și $\mathcal{A}_l = 48$ cm², aflați $\mathcal{P}_b$, l , $\mathcal{A}_b$ și $\mathcal{V}$.



2. Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$. Utilizând notațiile specifice prisme regulate, rezolvați următoarele probleme.

- Dacă $l = 2$ cm și $\mathcal{V} = 10\sqrt{3}$ cm³, aflați $\mathcal{A}_b$, h , $\mathcal{P}_b$ și $\mathcal{A}_l$.
- Dacă $h = 8$ cm și $\mathcal{V} = 32\sqrt{3}$ cm³, aflați $\mathcal{A}_b$, l , $\mathcal{P}_b$ și $\mathcal{A}_l$.
- Dacă $\mathcal{A}_l = 54\sqrt{3}$ cm² și $\mathcal{A}_t = 60\sqrt{3}$ cm², aflați $\mathcal{A}_b$, l , $\mathcal{P}_b$, h și $\mathcal{V}$.
- Dacă $\mathcal{A}_l = 72\sqrt{3}$ cm² și $\mathcal{A}_t = 90\sqrt{3}$ cm², aflați $\mathcal{A}_b$, l , $\mathcal{P}_b$, h și $\mathcal{V}$.





Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) 1. Se consideră un paralelipiped dreptunghic cu $L = 4$ cm, $l = 3$ cm și $h = 5$ cm. Calculați:
- a) $\mathcal{A}_t$; b) $\mathcal{V}$; c) d .
- (3p) 2. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB = 3$ cm, $AD = 4$ cm și $AA' = 4\sqrt{3}$ cm. $BC' \cap CB' = \{O\}$. Calculați:
- a) $\mathcal{A}_t$; b) $\mathcal{V}$; c) $\mathcal{P}_{AOA'}$.
- (3p) 3. Paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AD = 2\sqrt{3}$ cm și $AA' = 3\sqrt{2}$ cm are $\mathcal{V} = 36$ cm³. Calculați:
- a) $d[(A'D), (B'BC)]$; b) d ; c) $\angle((B'AD), (A'D))$.

Lecția 8. Cubul



Citesc și rețin

Notații utilizate: l – lungimea muchiei cubului, d – lungimea diagonalei cubului, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a cubului, $\mathcal{V}$ – volumul cubului.

$$d = l\sqrt{3},$$

$$\mathcal{A}_t = 6l^2,$$

$$\mathcal{V} = l^3.$$



Cum se aplică?

1. Un cub are muchia de $2\sqrt{2}$ cm. Calculați d , $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$.

Soluție:

$$d = l\sqrt{3} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm} = 2\sqrt{6} \text{ cm}; \mathcal{A}_t = 6l^2 = 6 \cdot (2\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = 6 \cdot 8 \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2;$$

$$\mathcal{V} = l^3 = (2\sqrt{2})^3 \text{ cm}^3 = 8\sqrt{2}^3 \text{ cm}^3 = 8\sqrt{2^2 \cdot 2} \text{ cm}^3 = 16\sqrt{2} \text{ cm}^3.$$

2. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$, care are lungimea muchiei egală cu 3 cm. Determinați:

a) $\mathcal{A}_t$;

b) $\mathcal{V}$;

c) $\angle(B'C', AD')$;

d) $d(B', CD)$.

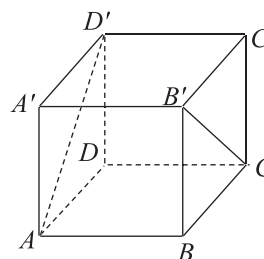
Soluție:

a) $\mathcal{A}_t = 6l^2 = 6 \cdot 3^2 \text{ cm}^2 = 6 \cdot 9 \text{ cm}^2 = 54 \text{ cm}^2$;

b) $\mathcal{V} = l^3 = 3^3 \text{ cm}^3 = 27 \text{ cm}^3$;

c) Deoarece $B'C' \parallel A'D'$, rezultă că $\angle(B'C', AD') = \angle(A'D', AD') = \angle A'D'A = 45^\circ$;

d) Aplicăm teorema celor 3 perpendiculare: $B'B \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$, $CD \subset (ABC)$ și $BC \perp CD$, așadar $B'C \perp CD$, prin urmare $d(B', CD) = B'C = 3\sqrt{2}$ cm.



3. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$, care are aria totală egală cu 144 cm^2 . Determinați:
 a) l ; b) $\mathcal{V}$; c) $\angle(D'A, (D'DB))$; d) $d(C, BD')$.

Soluție:

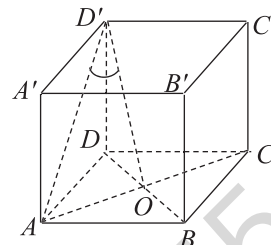
a) $\mathcal{A}_t = 144 \text{ cm}^2$ sau $6l^2 = 144 \text{ cm}^2$, deci $l^2 = 24 \text{ cm}^2$,
 așadar $l = \sqrt{24} \text{ cm}$ și obținem $l = 2\sqrt{6} \text{ cm}$;

b) $\mathcal{V} = l^3 = (2\sqrt{6})^3 \text{ cm}^3 = 48\sqrt{6} \text{ cm}^3$;

c) $AC \cap BD = \{O\}$. Deoarece $\text{pr}_{(D'DB)} A = O$, rezultă că
 $\text{pr}_{(D'DB)} D'A = D'O$, prin urmare $\angle(D'A, (D'DB)) = \angle AD'O$.

În $\triangle D'AO$ cu $\angle O = 90^\circ$, $\sin \angle D' = \frac{AO}{D'A} = \frac{1}{2}$, prin urmare $\angle AD'O = 30^\circ$;

d) Construim $CE \perp BD'$, $E \in BD'$. În $\triangle BCD'$ cu $\angle C = 90^\circ$, CE este înălțime, deci
 $CE = \frac{CB \cdot CD'}{BD'} = \frac{2\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Se consideră un cub. Calculați d , $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$, în următoarele cazuri:

a) $l = 3 \text{ cm}$;

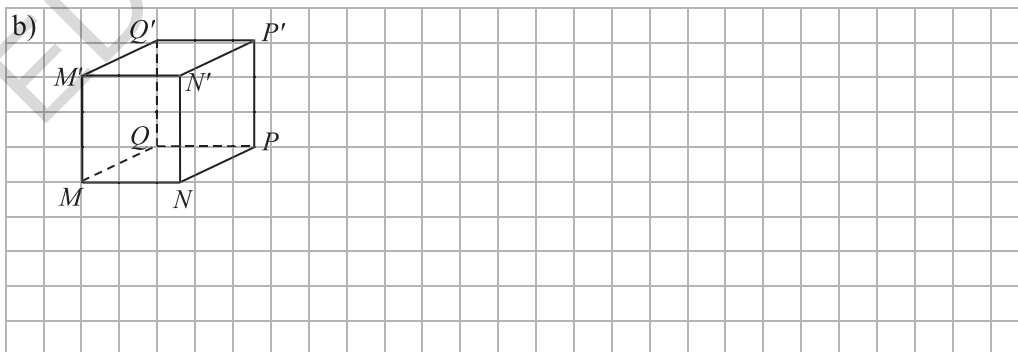
b) $l = 4 \text{ cm}$.



2. Se consideră un cub. Calculați l , $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$, știind că:

a) $d = 5\sqrt{3} \text{ cm}$;

b) $d = 6\sqrt{2} \text{ cm}$.



3. Se consideră un cub. Calculați l , d și $\mathcal{V}$, știind că:

a) $\mathcal{A}_t = 48 \text{ cm}^2$;

b) $\mathcal{A}_t = 54 \text{ cm}^2$.



4. Se consideră un cub. Calculați l , d și $\mathcal{A}_t$, știind că:

a) $\mathcal{V} = 216 \text{ cm}^3$;

b) $\mathcal{V} = 48\sqrt{6} \text{ cm}^3$.



Exerciții și probleme de dificultate medie

5. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu muchia de $2\sqrt{3} \text{ cm}$. Aflați:

a) d ;

b) $\mathcal{A}_t$;

c) $\mathcal{V}$;

d) $\angle(C'C, AB)$.

6. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu diagonala de $2\sqrt{6} \text{ cm}$. Aflați:

a) l ;

b) $\mathcal{A}_t$;

c) $\mathcal{V}$;

d) $\angle(B'C, A'A)$.

7. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu aria totală de 108 cm^2 . Aflați:

a) l ;

b) d ;

c) $\mathcal{V}$;

d) $\mathcal{A}_{ABCD'}$.

8. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu volumul de 64 cm^3 . Aflați:

a) l ;

b) d ;

c) $\mathcal{A}_t$;

d) $\mathcal{A}_{D'AC}$.

9. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu diagonala de $2\sqrt{3} \text{ cm}$. Aflați:

a) l ;

b) $\mathcal{A}_t$;

c) $\mathcal{V}$;

d) $d(B', AC)$.

10. Dacă aria totală și volumul unui cub se exprimă prin același număr, aflați:

a) l ;

b) d ;

c) $\mathcal{A}_t$;

d) $d[A, (B'BD)]$.

- 11.** În cubul $ABCD A'B'C'D'$, care are aria totală egală cu 96 cm^2 , notăm cu M mijlocul muchiei $B'C'$. Determinați:
 a) l ; b) γ ; c) $\angle(AD', (ABC))$; d) $d[M, (D'AB)]$.
- 12.** Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu volumul de $54\sqrt{2} \text{ cm}^3$. Aflați:
 a) l ; b) $\mathcal{A}_i$; c) $\angle(AD', B'C)$; d) $d(A, BD')$.
- 13.** Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu aria totală de 96 cm^2 . Aflați:
 a) d ; b) γ ; c) $d(A', BD)$; d) $\angle(B'C, (B'BD))$.
- 14.** Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$, care are muchia cu lungimea de $2\sqrt{3} \text{ cm}$. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, determinați:
 a) $\mathcal{A}_i$; b) γ ; c) $\mathcal{A}_{OB'D'}$; d) $\sin[\angle(B'O, (D'AC))]$.
- 15.** Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$, care are aria totală egală cu 72 cm^2 . Determinați:
 a) l ; b) γ ; c) $\angle(AC, BC')$; d) $d[B', (A'BC')]$.
- 16.** În cubul $ABCD A'B'C'D'$, care are diagonala de $4\sqrt{6} \text{ cm}$, notăm cu M mijlocul muchiei $A'D'$. Determinați:
 a) $\mathcal{A}_i$; b) γ ; c) $d(M, AC)$; d) $\angle(BC', (ACC'))$.
- 17.** Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia de $2\sqrt{6} \text{ cm}$, în care notăm cu O centrul feței $ABCD$ și cu M mijlocul diagonalei BC' . Calculați:
 a) $\mathcal{A}_i$; b) γ ; c) $d[M, (B'BD)]$; d) $\angle(BC', D'O)$.
- 18.** În cubul $ABCD A'B'C'D'$, care are muchia de $2\sqrt{3} \text{ cm}$, notăm cu O centrul feței $ABCD$. Calculați:
 a) $\mathcal{A}_i$; b) γ ; c) $\angle(B'O, A'D)$; d) $d[A', (D'AC)]$.
- 19.** În cubul $ABCD A'B'C'D'$, care are muchia de $3\sqrt{2} \text{ cm}$, notăm cu O centrul feței $ABCD$. Determinați:
 a) $\mathcal{A}_i$; b) γ ; c) $d[D', (B'AC)]$; d) $\sin[\angle((B'AC), (D'AC))]$.
- 20.** În cubul $ABCD A'B'C'D'$, care are diagonala de $4\sqrt{3} \text{ cm}$, notăm cu M mijlocul muchiei CC' . Calculați:
 a) $\mathcal{A}_i$; b) γ ; c) $\mathcal{A}_{BMD'}$; d) $\angle((D'AB), (D'DB))$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

- 21.** Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$. Dacă punctele A , C și B' se proiectează pe diagonala BD' în același punct, arătați că paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ este cub.
- 22.** Dacă notăm cu x , y și z lungimile diagonalelor a trei fețe ale unui paralelipiped dreptunghic care au un vârf în comun, arătați că $\mathcal{A}_i \leq xy + yz + zx$ și precizați când se obține egalitatea.



Citesc și rețin

Notații utilizate: a_b – lungimea apotemei bazei piramidei, a_p – lungimea apotemei piramidei, h – lungimea înălțimii piramidei, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei, $\mathcal{A}_l$ – aria laterală a piramidei, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a piramidei, $\mathcal{V}$ – volumul piramidei.

$$\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2}, \quad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = \frac{\mathcal{P}_b(a_p + a_b)}{2}, \quad \gamma = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}.$$



Cum se aplică?

1. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V are muchia bazei de 6 cm și muchia laterală de $3\sqrt{5}$ cm. Calculați:

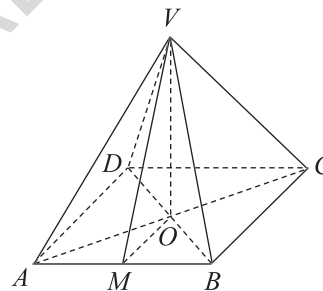
- a) a_p ; b) $\mathcal{A}_i$; c) $\mathcal{V}$.

Soluție:

a) Construim apotema VM , $M \in AB$. În $\triangle VAM$ cu $\angle M = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = a_p^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$, de unde obținem $a_p = 6$ cm;

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{A}_t &= \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} + l^2 = 72 \text{ cm}^2 + 36 \text{ cm}^2 = \\ &= 108 \text{ cm}^2; \end{aligned}$$

c) $AC \cap BD = \{O\}$. În $\triangle VOM$ cu $\angle O = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $a_p^2 = h^2 + a_b^2$, de unde obținem $h = 3\sqrt{3}$ cm; $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{36 \cdot 3\sqrt{3}}{3}$ cm³ = $36\sqrt{3}$ cm³.



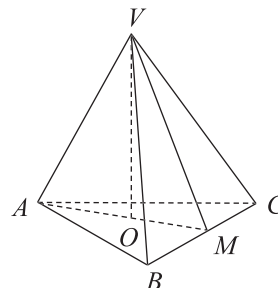
2. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu vârful în V , care are muchia bazei de 6 cm și aria laterală egală cu $9\sqrt{15}$ cm². Calculați:

- a) $\mathcal{A}_i$; b) $\mathcal{P}_t$; c) $\mathcal{V}$; d) $\nless(VA, (ABC))$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathcal{A}_t &= \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = 9\sqrt{15} \text{ cm}^2 + \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{15} \text{ cm}^2 + \\ &+ 9\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 9\sqrt{3}(1+\sqrt{5}) \text{ cm}^2; \end{aligned}$$

b) $\mathcal{A}_l = 9\sqrt{15} \text{ cm}^2$, deci $\frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} = 9\sqrt{15} \text{ cm}^2$, prin urmare $\frac{18a_p}{2} \text{ cm} = 9\sqrt{15} \text{ cm}^2$, deci $18a_p = 18\sqrt{15} \text{ cm}$, de



unde rezultă că $a_p = \sqrt{15}$ cm. Construim apotema VM a piramidei, $M \in BC$. În $\triangle VMB$ cu $\sphericalangle M = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = a_p^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$, deci $m^2 = \sqrt{15}^2 + 3^2$ sau $m^2 = 24$, prin urmare $m = \sqrt{24}$ cm și obținem $m = 2\sqrt{6}$ cm. $\mathcal{P}_f = 2m + l = 4\sqrt{6}$ cm + 6 cm = $2(3 + 2\sqrt{6})$ cm;

c) $l = R\sqrt{3}$, deci $6 = R\sqrt{3}$, de unde obținem $R = 2\sqrt{3}$ cm. În $\triangle VOA$ cu $\sphericalangle O = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = R^2 + h^2$, deci $(2\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{3})^2 + h^2$, așadar $24 = 12 + h^2$, de unde rezultă că $h^2 = 12$, prin urmare $h = \sqrt{12}$ cm și obținem $h = 2\sqrt{3}$ cm.

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3 = 18 \text{ cm}^3;$$

d) Observăm că $\text{pr}_{(ABC)} VA = AO$, deci $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle VAO$. În $\triangle VAO$ cu $\sphericalangle O = 90^\circ$, $\sin \sphericalangle A = \frac{VO}{VA} = \frac{2\sqrt{3} \text{ cm}}{2\sqrt{6} \text{ cm}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \stackrel{(\sqrt{2})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci $\sphericalangle VAO = 45^\circ$.

3. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V , care are muchia bazei de $2\sqrt{3}$ cm și înălțimea de $\sqrt{6}$ cm, notăm cu M mijlocul muchiei AD . Calculați:

- a) $\mathcal{V}$; b) $\mathcal{A}_i$; c) $\sphericalangle(AD, VB)$; d) $d[M, (VBC)]$.

Soluție:

a) $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{l^2 \cdot h}{3} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{6}}{3} \text{ cm}^3 = \frac{12\sqrt{6}}{3} \text{ cm}^3 = 4\sqrt{6} \text{ cm}^3;$

b) $AC \cap BD = \{O\}$. Construim apotema VN , $N \in BC$. În $\triangle VON$ cu $\sphericalangle O = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora:

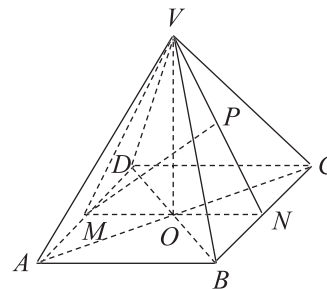
$$a_p^2 = h^2 + a_b^2, \text{ deci } a_p^2 = \sqrt{6}^2 + \sqrt{3}^2, \text{ așadar } a_p^2 = 9, \text{ prin}$$

$$\text{urmare } a_p = \sqrt{9} \text{ cm și obținem } a_p = 3 \text{ cm. } \mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} =$$

$$= \frac{8\sqrt{3} \cdot 3}{2} \text{ cm}^2 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2;$$

c) Deoarece $AD \parallel BC$, rezultă că $\sphericalangle(AD, VB) = \sphericalangle(BC, VB) = \sphericalangle VBC$. În $\triangle VBN$ cu $\sphericalangle N = 90^\circ$, $\text{tg}(\sphericalangle B) = \frac{VN}{BN} = \frac{3 \text{ cm}}{\sqrt{3} \text{ cm}} = \sqrt{3}$, prin urmare $\sphericalangle VBC = 60^\circ$;

d) Construim $MP \perp (VBC)$, $P \in VN$, deoarece $(VMN) \perp (VBC)$; $\mathcal{A}_{VMN} = \frac{MP \cdot VN}{2}$ sau $\frac{MP \cdot VN}{2} = \frac{MN \cdot VO}{2}$, deci $MP \cdot 3 \text{ cm} = 6\sqrt{2} \text{ cm}^2$, de unde rezultă că $MP = 2\sqrt{2} \text{ cm}$.



Lecția 10. Trunchiul de piramidă regulată



Citesc și rețin

Notații utilizate: a_t – lungimea apotemei trunchiului de piramidă, i – lungimea înălțimii trunchiului de piramidă, $\mathcal{P}_B$ – perimetrul bazei mari, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei mici, $\mathcal{A}_B$ – aria bazei mari, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei mici, $\mathcal{A}_l$ – aria laterală a trunchiului de piramidă, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a trunchiului de piramidă, $\mathcal{V}$ – volumul trunchiului de piramidă.

$$\mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_t}{2}, \quad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b,$$

$$\mathcal{V} = \frac{i}{3} (\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}).$$



Cum se aplică?

1. Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei mari de $6\sqrt{3}$ cm, muchia bazei mici de $4\sqrt{3}$ cm și muchia laterală de $2\sqrt{7}$ cm. Calculați:

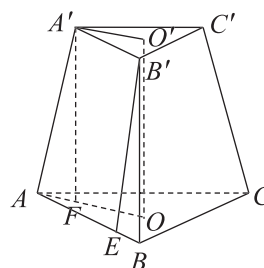
- a) a_t ; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{V}$.

Soluție:

a) Construim $B'E \perp AB$, $E \in AB$, deci $BE = \frac{L-l}{2} = \sqrt{3}$ cm. În $\triangle B'BE$ cu $\angle E = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = a_t^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2$, de unde obținem $a_t = 5$ cm;

$$b) \mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_t}{2} = \frac{30\sqrt{3} \cdot 5}{2} \text{ cm}^2 = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2;$$

c) Notăm cu O și O' centrele celor două baze și construim $A'F \perp AO$, $F \in AO$. $L = R\sqrt{3}$, deci $6\sqrt{3} = R\sqrt{3}$, de unde obținem $R = 6$ cm și, analog, rezultă că $r = 4$ cm; $AF = R - r = 2$ cm. În $\triangle A'AF$ cu $\angle F = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = i^2 + (R - r)^2$, de unde obținem $i = 2\sqrt{6}$ cm; $\mathcal{V} = \frac{i}{3} (\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b})$ și după efectuarea calculelor obținem $\mathcal{V} = 114\sqrt{2} \text{ cm}^3$.



2. Trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ are muchia bazei mari de $8\sqrt{2}$ cm, muchia laterală de $3\sqrt{6}$ cm și apotema de 6 cm. Aflați:

- a) l ; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{V}$; d) h .

Soluție:

a) Construim $C'M \perp BC$, $M \in BC$. În $\triangle C'MC$ cu $\sphericalangle M = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = a_l^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2$ sau $\frac{8\sqrt{2}-l}{2} = 3\sqrt{2}$, de unde obținem $l = 2\sqrt{2}$ cm;

$$b) \mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_l}{2} = \frac{40\sqrt{2} \cdot 6}{2} \text{ cm}^2 = 120\sqrt{2} \text{ cm}^2;$$

c) Construim $A'N \perp (ABC)$, $N \in AC$, deci $AN = R - r = 6$ cm. În $\triangle A'NA$ cu $\sphericalangle N = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = i^2 + (R - r)^2$, de unde obținem $i = 3\sqrt{2}$ cm. $\mathcal{V} = \frac{i}{3}(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}) = \sqrt{2}(128 + 8 + 32) \text{ cm}^3 = 168\sqrt{2} \text{ cm}^3$;

d) Aplicăm teorema piramidelor asemenea: $\frac{l}{L} = \frac{h-i}{h}$, deci $\frac{1}{4} = \frac{h-3\sqrt{2}}{h}$, de unde obținem $h = 4\sqrt{2}$ cm.

3. În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, care are muchia bazei mari de 6 cm, muchia bazei mici de 3 cm și muchia laterală de $2\sqrt{3}$ cm, notăm cu O centrul bazei mari ABC . Calculați:

- a) i ; b) $\mathcal{V}$; c) $\sphericalangle(AA', (ABC))$; d) $d(O, CC')$.

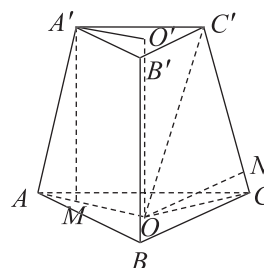
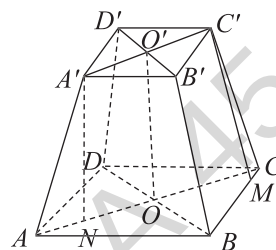
Soluție:

a) Notăm cu O' centrul bazei mici și construim $A'M \perp AO$, $M \in AO$. $L = R\sqrt{3}$, deci $6 = R\sqrt{3}$, de unde obținem $R = 2\sqrt{3}$ cm și, analog, rezultă că $r = \sqrt{3}$ cm. În $\triangle A'MA$ cu $\sphericalangle M = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora: $m^2 = i^2 + (R - r)^2$, de unde obținem $i = 3$ cm;

b) $\mathcal{V} = \frac{i}{3}(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b})$ și după efectuarea calculelor obținem $\mathcal{V} = \frac{63\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$;

c) $\sphericalangle(AA', (ABC)) = \sphericalangle A'MA$. În $\triangle A'MA$ cu $\sphericalangle M = 90^\circ$, $\sin A = \frac{A'M}{AA'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\sphericalangle A'MA = 60^\circ$;

d) Construim $ON \perp CC'$, $N \in CC'$. Observăm că $\mathcal{A}_{O'OC'C'} = \mathcal{A}_{O'OCC'} + \mathcal{A}_{OCC'C'}$ sau $\frac{3\sqrt{3} \cdot 3}{2} \text{ cm}^2 = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 + \frac{ON \cdot 2\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ și, efectuând calculele, obținem $ON = 3$ cm.



- (3p) 6. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V notăm cu M și N mijloacele muchiilor BC , respectiv CV , $AM \cap BD = \{E\}$ și $BN \cap VM = \{F\}$. Piramida are muchia bazei și muchia laterală de aceeași lungime, 6 cm. Calculați:
- a) $\angle$; b) $\angle(EF, AC)$; c) $\mathcal{A}_{VAM}$.

Fișă pentru portofoliul elevului

Numele și prenumele:

Clasa a VIII-a

Capitolul: Aree și volume ale unor corpuri geometrice (Lecțiile 9 și 10)

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziția este adevărată, subliniați litera A, iar dacă propoziția este falsă, subliniați litera F.

- (7p) 1. Aria laterală a piramidei triunghiulare regulate cu $l = 4$ cm și $a_p = 3$ cm este egală cu 18 cm^2 . A F
- (7p) 2. Aria totală a tetraedrului regulat cu muchia de 3 cm este egală cu $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. A F
- (7p) 3. Înălțimea piramidei patrulateră regulate cu $l = 2$ cm și $\mathcal{V} = 4 \text{ cm}^3$ este egală cu 3 cm. A F

II. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.

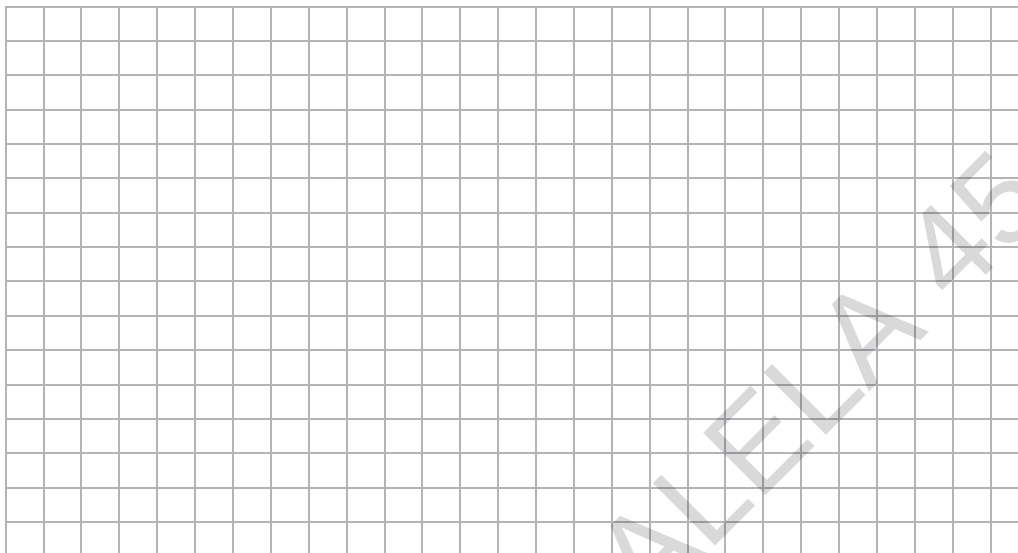
- (7p) 1. Aria totală a trunchiului de piramidă triunghiulară regulată cu $L = 4$ cm, $l = 2$ cm și $\mathcal{A}_l = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$ este egală cu
- (7p) 2. Aria laterală a piramidei hexagonale regulate cu $l = 2\sqrt{2}$ cm și $a_p = 3\sqrt{2}$ cm este egală cu
- (7p) 3. Volumul piramidei patrulateră regulate cu $\mathcal{P}_b = 12$ cm și $h = 4$ cm este egal cu

III. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (8p) 1. Volumul piramidei patrulateră regulate care are secțiunea diagonală un triunghi echilateral cu perimetrul de 18 cm este egal cu:
A. 24 cm^3 ; B. $16\sqrt{2} \text{ cm}^3$; C. $18\sqrt{3} \text{ cm}^3$; D. 40 cm^3 .
- (8p) 2. Aria laterală a trunchiului de piramidă triunghiulară regulată cu $l = 3\sqrt{2}$ cm, $m = 3\sqrt{3}$ cm și $a_l = 5$ cm este egală cu:
A. $20\sqrt{3} \text{ cm}^2$; B. $30\sqrt{6} \text{ cm}^2$; C. $40\sqrt{5} \text{ cm}^2$; D. $60\sqrt{2} \text{ cm}^2$.
- (8p) 3. Înălțimea piramidei din care provine trunchiul de piramidă patrulateră regulată cu $L = 6$ cm, $l = 2$ cm și $i = 2\sqrt{5}$ cm este egală cu:
A. $4\sqrt{3}$ cm; B. 4 cm; C. 6 cm; D. $3\sqrt{5}$ cm.

La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

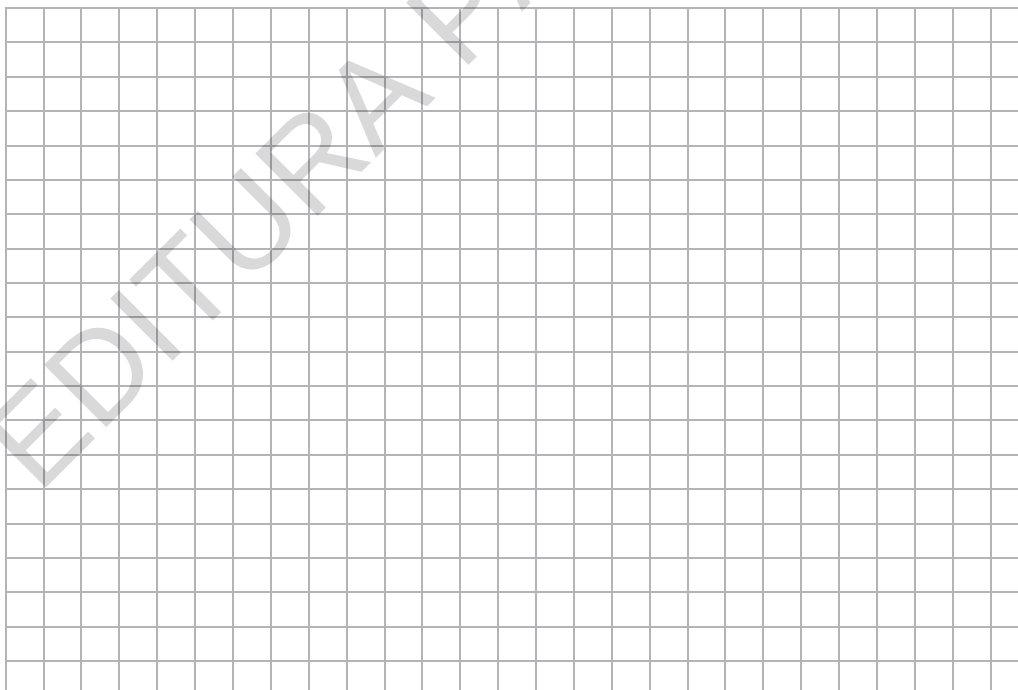
IV. Un tetraedru regulat are volumul egal cu $18\sqrt{2} \text{ cm}^3$. Calculați suma lungimilor (8p) muchiilor tetraedrului regulat.



V. În piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V notăm cu O centrul bazei și cu M mijlocul muchiei CV . Piramida are apotema de $2\sqrt{6} \text{ cm}$ și aria laterală egală cu $36\sqrt{6} \text{ cm}^2$.

(8p) a) Calculați γ .

(8p) b) Aflați $\sin(\angle(VB, OM))$.



II.2. CORPURI ROTUNDE

Definiție: Un corp geometric care este mărginit parțial sau total de suprafețe neplane (curbe) se numește **corp rotund**.

Corpurile rotunde studiate în acest capitol sunt: cilindrul circular drept, conul circular drept, trunchiul de con circular drept și sfera.

Definiții:

Aria laterală a unui corp rotund, notată $\mathcal{A}_l$, reprezintă aria suprafeței laterale a acestuia.

Aria totală a unui corp rotund, notată $\mathcal{A}_t$, reprezintă suma dintre aria laterală a corpului rotund și aria bazei (bazelor).

Volumul unui corp rotund, notat $\mathcal{V}$, reprezintă spațiul (geometric) pe care îl ocupă acesta.

Lecția 11. Cilindrul circular drept



Citesc și rețin

Notații utilizate: R – raza cilindrului circular drept, G – lungimea generatoarei cilindrului circular drept, h – lungimea înălțimii cilindrului circular drept, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei cilindrului circular drept, $\mathcal{A}_l$ – aria laterală a cilindrului circular drept, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a cilindrului circular drept, $\mathcal{V}$ – volumul cilindrului circular drept.

$$\mathcal{A}_l = 2\pi R G,$$

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 2\pi R(G + R),$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi R^2 h.$$



Cum se aplică?

1. Se consideră un cilindru circular drept cu $R = 4$ cm și $G = 5$ cm. Aflați $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$.

Soluție:

$$\mathcal{A}_l = 2\pi R G = 2\pi \cdot 4 \cdot 5 \text{ cm}^2 = 40\pi \text{ cm}^2; \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 40\pi \text{ cm}^2 + 2\pi R^2 = 40\pi \text{ cm}^2 + 32\pi \text{ cm}^2 = 72\pi \text{ cm}^2; \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = 16\pi \cdot 5 \text{ cm}^3 = 80\pi \text{ cm}^3.$$

2. Un cilindru circular drept are aria laterală egală cu $30\pi \text{ cm}^2$ și aria totală egală cu $48\pi \text{ cm}^2$. Calculați:

a) R ;

b) G .

Soluție:

a) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$, deci $48\pi \text{ cm}^2 = 30\pi \text{ cm}^2 + 2\mathcal{A}_b$, de unde rezultă că $2\mathcal{A}_b = 18\pi \text{ cm}^2$ sau $\mathcal{A}_b = 9\pi \text{ cm}^2$, prin urmare $\pi R^2 = 9\pi$, deci $R^2 = 9 \text{ cm}^2$ și obținem $R = 3$ cm;

b) $\mathcal{A}_l = 30\pi \text{ cm}^2$, deci $2\pi R G = 30\pi \text{ cm}^2$ sau $6\pi G = 30\pi \text{ cm}$, de unde obținem $G = 5$ cm.

3. Un cilindru circular drept are aria laterală egală cu $24\pi \text{ cm}^2$ și volumul egal cu $24\sqrt{2} \pi \text{ cm}^3$. Aflați:

a) R ;

b) G ;

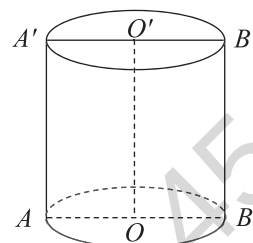
c) $\mathcal{A}_t$.

Soluție:

a) $\mathcal{A}_l = 24\pi \text{ cm}^2$ sau $2\pi RG = 24\pi \text{ cm}^2$, deci $RG = 12 \text{ cm}^2$. $\mathcal{V} = 24\sqrt{2} \pi \text{ cm}^3$ sau $R \cdot RG = 24\sqrt{2} \text{ cm}^3$, deci $12R = 24\sqrt{2} \text{ cm}$, de unde obținem $R = 2\sqrt{2} \text{ cm}$;

b) $RG = 12 \text{ cm}^2$ sau $2\sqrt{2} \cdot G = 12 \text{ cm}$, de unde rezultă că $G = 3\sqrt{2} \text{ cm}$;

c) $\mathcal{A}_t = 2\pi R(G + R) = 2\pi \cdot 2\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2 = 2\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \text{ cm}^2 = 40\pi \text{ cm}^2$.



Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Calculați R , $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ unui cilindru circular drept, în următoarele cazuri:

a) $R = 4 \text{ cm}$ și $G = 7 \text{ cm}$;

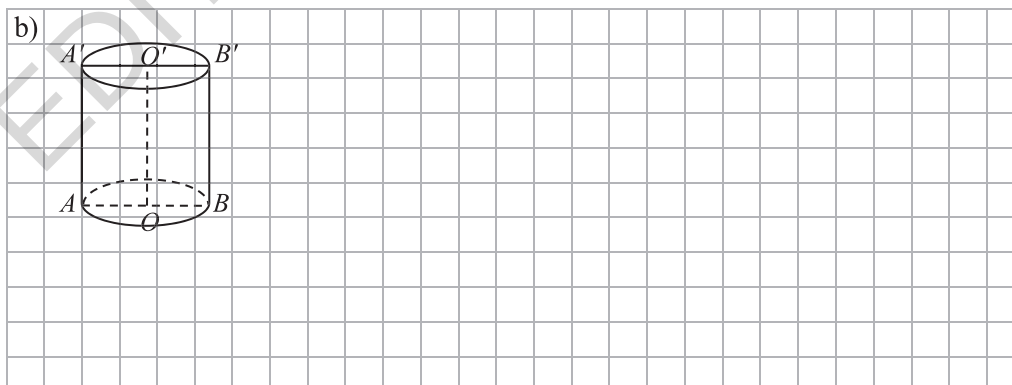
b) $R = 6 \text{ cm}$ și $G = 8 \text{ cm}$.



2. Calculați R , $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ unui cilindru circular drept, știind că:

a) $G = 5 \text{ cm}$ și $\mathcal{A}_b = 16\pi \text{ cm}^2$;

b) $G = 6 \text{ cm}$ și $\mathcal{A}_b = 25\pi \text{ cm}^2$.



Modele de teste pentru evaluarea cunoștințelor

Capitolele: *Calcul algebric în $\mathbb{R}$, Funcții, Elemente ale geometriei în spațiu, Aree și volume ale unor corpuri geometrice, Corpuri rotunde*

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (7p) 1. Se consideră funcția $f: \{-2, 0, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2 - 1$. Valoarea funcției în punctul 0 este egală cu:
A. 0; B. -1; C. -3; D. 2.
- (7p) 2. Scriind sub forma cea mai simplă rezultatul calculului $\frac{x-1}{6x^4} : \frac{x-1}{3x^3}$, obținem:
A. $\frac{1}{2x}$; B. $\frac{x-1}{3x}$; C. $\frac{4x}{x-1}$; D. $\frac{3x}{2}$.
- (7p) 3. Numărul de soluții reale ale ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$ este egal cu:
A. 0; B. 1; C. 2; D. 3.
- (7p) 4. Graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 1$ intersectează axa Oy a sistemului de axe ortogonale xOy în punctul:
A. $M(0; 1)$; B. $N(0; 3)$; C. $P(1; 0)$; D. $Q(3; 0)$.
- (7p) 5. Aria laterală a cilindrului circular drept cu $R = 2$ cm și $G = 5$ cm este egală cu:
A. 15π cm²; B. 30π cm²; C. 25π cm²; D. 20π cm².
- (7p) 6. Volumul paralelipipedului dreptunghic cu $L = 3$ dm, $I = 1$ dm și $h = 4$ dm este egal cu:
A. 14 dm³; B. 16 dm³; C. 12 dm³; D. 18 dm³.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

- (8p) 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:
 $(2x-1)(2x+1) - (x-2)^2 + x + 3 = 0$.
2. Se consideră expresia $E(x) = (2x-2) \cdot \left(\frac{x+2}{6x} - \frac{3x+2}{2x-8} \cdot \frac{x^2-4x}{9x^2-4} \right) + 1$, unde
 $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, 4 \right\}$.
- (8p) a) Arătați că $E(x) = 9x^2 - 6x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, 4 \right\}$.
- (8p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{E(x)} = 2$.
- (8p) 3. Calculați aria totală a trunchiului de con circular drept care are $R = 5$ cm, $r = 2$ cm și $V = 52$ cm³.
4. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V , care are muchia bazei de $4\sqrt{3}$ cm și înălțimea de $2\sqrt{6}$ cm.
- (8p) a) Calculați aria laterală a piramidei.
- (8p) b) Determinați $\sin[\angle(VB, (VAD))]$.

Teste de evaluare finală

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (0,5p) 1. Cardinalul mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\}$ este egal cu:
A. 3; B. 6; C. 5; D. 4.
- (0,5p) 2. Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-4; 3)$ este:
A. -3; B. 0; C. -4; D. 3.
- (0,5p) 3. Soluția ecuației $1 - x = 4$, $x \in \mathbb{R}$, este egală cu:
A. -4; B. -5; C. -3; D. -6.
- (0,5p) 4. Rezultatul calculului $(x + x)^3 : (4x)$ este egal cu:
A. x^2 ; B. $2x^2$; C. $4x$; D. x^3 .
- (0,5p) 5. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 1 = 0$, unde $x \in \mathbb{R}$ este:
A. $\{0, 1\}$; B. $\{-1, 0\}$; C. $\{1, 2\}$; D. $\{-1, 1\}$.
- (0,5p) 6. Valoarea fracției algebrice $F(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ pentru $x = -2$ este egală cu:
A. -3; B. 4; C. 8; D. -1.
- (0,5p) 7. Volumul cilindrului circular drept cu $R = 2$ cm și $G = 5$ cm este egal cu:
A. 20π cm³; B. 25π cm³; C. 30π cm³; D. 35π cm³.
- (0,5p) 8. Aria totală a unui tetraedru regulat cu muchia de 4 cm este egală cu:
A. $8\sqrt{2}$ cm²; B. $4\sqrt{3}$ cm²; C. $16\sqrt{3}$ cm²; D. 16 cm².
- (0,5p) 9. Dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă triunghiulară regulată, atunci măsura unghiului dintre dreptele $A'B'$ și BC este egală cu:
A. 30° ; B. 45° ; C. 60° ; D. 90° .

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

- (0,8p) 1. Știind că $\sqrt{5} < 2,25$, determinați cel mai mare număr întreg care verifică inecuația $(\sqrt{5}x - 3)^2 + 1 > (\sqrt{5}x - 5\sqrt{2})(\sqrt{5}x + 5\sqrt{2})$.
- (0,7p) 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}x + 4$.
a) Calculați media aritmetică a numerelor $f(-\sqrt{2})$ și $f(\sqrt{2})$.
(0,8p) b) Reprezentați grafic funcția în sistemul de axe ortogonale xOy și calculați distanța de la punctul O la graficul funcției f .
- (0,7p) 3. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V are muchia bazei de 6 cm și unghiul dintre planele (VAC) și (VDC) cu măsura de 60° .
a) Calculați volumul piramidei $VABCD$.
(0,7p) b) Calculați distanța de la punctul O la muchia VA .
(0,8p) c) Determinați $\angle((VBC), (ABC))$.

Modele de teste pentru Evaluarea Națională

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

Testul 1

Subiectul I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

- (5p) 1. Cel mai mare număr natural de forma $\overline{4x4}$ divizibil cu 3 este:
a) 464; b) 474; c) 484; d) 494.
- (5p) 2. Se consideră mulțimile $E = \{a, b, c, d\}$ și $F = \{d, p, t\}$. Cardinalul mulțimii $E \cup F$ este egal cu:
a) 4; b) 5; c) 6; d) 7.
- (5p) 3. Prețul unui abonament telefonic după o ieftinire cu 4% este de 48 lei. Prețul abonamentului telefonic înainte de ieftinire a fost de:
a) 50 lei; b) 52 lei; c) 60 lei; d) 72 lei.
- (5p) 4. Se consideră numărul $x = \sqrt{5^{11}} - 5^{10}$. Numărul x este egal cu:
a) $5^5 \sqrt{2}$; b) $5 \cdot 2^8$; c) $2 \cdot 5^5$; d) $5^4 \sqrt{5}$.
- (5p) 5. În tabelul următor sunt reprezentate numele și anul nașterii pentru componenții unei echipe de baschet.

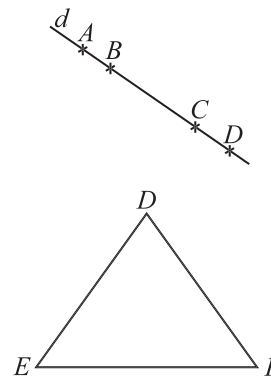
Numele	Alin	Eugen	Andrei	Dan	Cosmin
Anul nașterii	1997	1996	1998	1997	1998

Cel mai vârstnic component al echipei de baschet este:

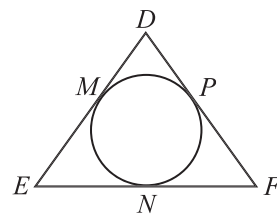
- a) Alin; b) Eugen; c) Andrei; d) Dan.
- (5p) 6. Ioana afirmă că „singurul număr natural de două cifre care este atât pătrat perfect cât și cub perfect este 64”. Afirmatia Ioanei este:
a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

- (5p) 1. În figura alăturată, pe dreapta d sunt reprezentate punctele A, B, C și D . Numărul segmentelor determinate de cele patru puncte este egal cu:
a) 3; b) 4;
c) 5; d) 6.
- (5p) 2. În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral DEF . Dacă semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 15 cm, atunci lungimea laturii EF este egală cu:
a) 5 cm; b) 10 cm;
c) 15 cm; d) 20 cm.

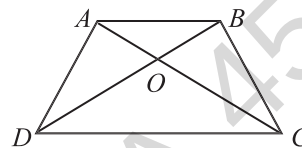


- (5p) 3. În figura alăturată, M , N și P sunt punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul DEF cu laturile acestuia. Dacă $DM = 3$ cm, $EN = 4$ cm și $FP = 5$ cm, atunci lungimile laturilor DE , EF și FD sunt egale cu:



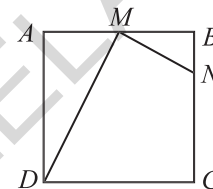
- a) 7 cm, 9 cm, 8 cm; b) 6 cm, 8 cm, 10 cm;
c) 7 cm, 8 cm, 10 cm; d) 8 cm, 9 cm, 10 cm.

- (5p) 4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $\mathcal{P}_{ABD} = 35$ cm și $\mathcal{P}_{BCO} = 28$ cm, atunci lungimea bazei mici AB este egală cu:



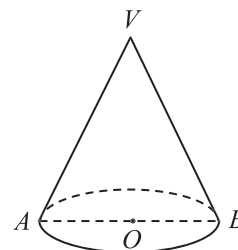
- a) 9 cm; b) 6 cm;
c) 8 cm; d) 7 cm.

- (5p) 5. Pătratul $ABCD$ din figura alăturată reprezintă schematic o placă de gresie care s-a spart în trei bucăți. Dacă latura pătratului este de 4 dm, $AM \equiv MB$ și $\angle DMN = 90^\circ$, atunci aria patrulaterului $MNCD$ este egală cu:



- a) 14 dm^2 ; b) 10 dm^2 ;
c) 11 dm^2 ; d) 12 dm^2 .

- (5p) 6. În figura alăturată este reprezentat un con circular drept. Dacă secțiunea axială VAB a conului are perimetrul de 70 cm, iar raza și generatoarea sunt direct proporționale cu numerele 2 și 5, atunci aria laterală a conului este egală cu:



- a) $100\pi \text{ cm}^2$; b) $250\pi \text{ cm}^2$;
c) $200\pi \text{ cm}^2$; d) $125\pi \text{ cm}^2$.

Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete.

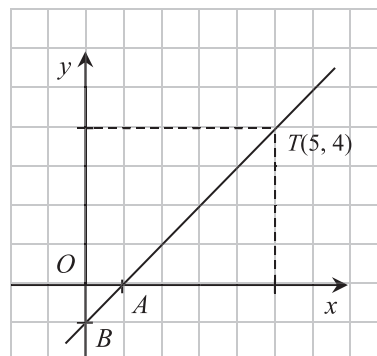
1. Ștefan este fiul lui Ion. În urmă cu trei ani, vârsta lui Ion era de 7 ori mai mare decât vârsta lui Ștefan, iar peste un an vârsta lui Ștefan va fi de 4 ori mai mică decât vârsta lui Ion.

- (3p) a) Calculează vârsta lui Ștefan și vârsta lui Ion.
(2p) b) Peste câți ani vârsta lui Ion va fi de 3 ori mai mare decât vârsta lui Ștefan?

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 1$.

- (2p) a) Dacă A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox , respectiv Oy , ale sistemului de axe ortogonale xOy , determină măsurile unghiurilor triunghiului OAB .

- (3p) b) Determină punctele situate pe graficul funcției f la distanța $3\sqrt{2}$ u față de punctul $T(5; 4)$.



INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II – CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice

1. a) $\frac{6-2x}{5x^4}$; b) $\frac{3x+3}{7x^2}$; c) $\frac{4x-1}{2x^3}$; d) $\frac{8x-13}{4x^2}$. 2. a) $8x$; b) $3x$; c) $2x$; d) $4x$. 3. a) $\frac{10x+1}{4x}$;
b) $\frac{4-16x}{9x}$; c) $-\frac{2x+25}{12x^2}$; d) $\frac{x+29}{15x^2}$. 4. a) $\frac{14x-7}{8x}$; b) $\frac{5x-5}{9x}$; c) $\frac{7x+13}{18x^2}$; d) $\frac{17}{24x^2}$.
5. a) $\frac{3-5x}{3x^2}$; b) $\frac{3x^2+2}{4x^4}$; c) $\frac{2x^2-15}{6x^5}$. 6. a) $\frac{5-8x^2}{6x^3}$; b) $\frac{5x-14}{10x^3}$; c) $\frac{21x^3+10}{12x^5}$.
7. a) $\frac{4-x}{x^2-2x}$; b) $\frac{3x+8}{12x^2-12x}$; c) $\frac{14-5x^2}{4x^3+2x^2}$. 8. a) $\frac{2x+1}{8x^3+4x^2}$; b) $\frac{5x-1}{24x^3+8x^2}$; c) $\frac{3x-5}{18x^3-6x^2}$.
9. a) $\frac{5}{x^3}$; b) $\frac{7}{x^3}$. 10. a) $\frac{7x^2+10}{18x^2-12x}$; b) $\frac{3x^2-4}{24x^2-12x}$. 11. a) $\frac{9}{x^3-6x^2+9x}$; b) $\frac{4}{x^3+4x^2+4x}$;
c) $-\frac{1}{9x^3+6x^2+x}$; d) $\frac{1}{4x^3+4x^2+x}$. 12. a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x+3}{x-3}$; c) $\frac{x}{x-5}$; d) $\frac{2x-1}{2x+1}$.
13. a) $\frac{1}{x^2-3x}$; b) $\frac{4x+4}{x(x^2-4)}$. 14. a) $E(x) = -\frac{x^3+15x+3}{4x^4-x^2}$; b) $E(x) = -\frac{x^3+9x+10}{4x^3-9x^5}$. 15. a) $E(x) =$
 $= \frac{2x^3+61x-3}{(x+3)(x-3)^2}$; b) $E(x) = \frac{-4x^3-43x+2}{(x-2)(x+2)^2}$. 16. $E(x) = 1$. 17. $E(x) = \frac{2}{|x^2-1|}$, $n = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 4} +$
 $+\frac{2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{10 \cdot 12} = \frac{175}{132} = 1,32(57)$; $n = 1,3258$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) x ; b) $\frac{x-1}{2x^2-6x}$. 2. $\frac{4x}{4x^2-1}$. 3. $E(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$.

Lecția 2. Înmulțirea fracțiilor algebrice

1. a) $\frac{16y^3}{25x^7}$; b) $\frac{21x}{8y^4}$; c) $\frac{10y^3}{21x^5}$; d) $\frac{20x^3}{27y^4}$. 2. a) $\frac{x^2+x}{3y^2-3y}$; b) $\frac{2y^2-4y}{x^4-3x^3}$; c) $\frac{x^2+3x}{5y^2-20y}$;
d) $\frac{5y-y^2}{6x^2-12x}$. 3. a) $\frac{4x^5-8x^4+12x^3}{x-4}$; b) $\frac{-4x^5-4x^4+4x^3}{x+2}$; c) $\frac{20x^5+4x^4-8x^3}{x+3}$;
d) $\frac{12x^5+4x^4-20x^3}{7-x}$. 4. a) $\frac{x^2-1}{x^2-3}$; b) $\frac{x^3-1}{5+x}$; c) $\frac{x^3-2x^2+1}{x+8}$; d) $\frac{x^2-2x+1}{7-x^3}$. 5. a) $\frac{x^2-9}{x^2-4}$;
b) $\frac{x^2-16}{x^2-1}$; c) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}$; d) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-12x+36}$. 6. a) $\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-6}$; b) $\frac{x^2-2x-24}{x^2+x-20}$;
c) $\frac{-x^2+x+30}{-x^2-5x+14}$; d) $\frac{-x^2-7x+18}{x^2+3x-40}$. 7. a) $\frac{8x^2-6x+1}{15x^2+16x+4}$; b) $\frac{-48x^2+46x-5}{8x^2-6x-9}$;

Teste de evaluare sumativă

Testul 1. 5. $D(\sqrt{6}; \sqrt{6})$. **6.** $d(A, G) = 6$ u. **Testul 2. 5.** 60° . **6.** $a = \frac{1}{3}$. **Testul 3. 5.** $A(\sqrt{2}; -3)$.

6. $M_1(-3; -1)$, $M_2(1; 3)$.

Fișă pentru portofoliul elevului

I. 1. A. 2. F. 3. A. II. 1. 4. 2. $M(0; 3)$. **3. 2. III. 1. B.** 5 u. **2. A.** 1. **3. D.** $M(6; 5)$. **IV.** $(a-1)^2 + (a+b)^2 = 0$, deci $a = 1$ și $b = -1$, prin urmare $g(x) = x - 1$. **V. a)** $G_f \cap Ox = \{A(2; 0)\}$ și $G_f \cap Oy = \{B(0; -4)\}$; **b)** $M(1; -2)$, $N(-1; 2)$; $\mathcal{A}_{AON} = \mathcal{A}_{BON} = 2$ u².

Probleme din realitatea cotidiană

1. $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(z) = z + 1$. **2.** $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(t) = 2t$. **3.** $L = 3$ dm, $l = 2$ dm.
4. 38 dam. **5.** $\mathcal{P} = 40$ m. **6.** $\mathcal{V} = 45$ dm³. **7.** $\mathcal{V} = 0,16\pi$ m³. **8.** 30 august. **9.** 48 exerciții. **10.** 6,92.
11. $\mathcal{A} = 1200$ m². **12.** 16 apartamente. **13.** 15 dam. **14.** 8 ani, 18 ani. **15.** 60 km/h. **16.** 192 dm².
17. F. **18.** Se determină funcția care are ca reprezentare grafică dreapta EF și apoi se arată că $f(5) = 2$. **19.** $C(2; 2)$. **20.** $P(31; 42)$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL I – ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte

1. B. $EF \perp \theta$. **2. a)** Proiecția punctului A pe planul α este punctul B ; **b)** Analog; **c)** Analog.
3. A. $MN \not\perp \beta$. **4. a)** Proiecția segmentului AB pe planul α este segmentul PQ ; **b)** Analog; **c)** Analog. **5. a)** A; **b)** F; **c)** A. **6. a)** $\text{pr}_{(ABC)} A' = A$; **b)** $\text{pr}_{(ABC)} C' = C$; **c)** $\text{pr}_{(A'B'C')} B = B'$.
7. a) $\text{pr}_{(A'AD)} B = A$; **b)** $\text{pr}_{(C'CD)} A = D$; **c)** $\text{pr}_{(A'AB)} C' = B'$; **d)** $\text{pr}_{(B'BC)} D' = C'$. **8. a)** F; **b)** A; **c)** A; **d)** A.
9. a) A; **b)** A; **c)** A; **d)** A. **10. a)** $\text{pr}_{(A'B'C')} BC' = B'C'$; **b)** $\text{pr}_{(ABC)} D'B = DB$; **c)** $\text{pr}_{(A'AD)} A'C = A'D$; **d)** $\text{pr}_{(B'BC)} B'D = B'C$. **11. a)** $D'O'$; **b)** AO ; **c)** $B'O$; **d)** AO' . **12. a)** $\{O\} = AC \cap BD$; $DO = 4$ cm; **b)** $VO = 3$ cm. **13. a)** $BO = 2\sqrt{3}$ cm, $O = \text{pr}_{(ABC)} A$; **b)** $AM = 3\sqrt{3}$ cm. **14. a)** $AD' = 12$ cm; **b)** $AC \cap BD = \{O\}$. $B'O = 6\sqrt{3}$ cm. **15. a)** Construim $MN \perp A'C'$, $N \in A'C'$, deci $\text{pr}_{(A'AC)} AM = AN$; $AN = 6$ cm; **b)** $AC \cap BD = \{O\}$. Construim $MP \perp B'D'$, $P \in B'D'$, așadar $\text{pr}_{(B'BD)} CM = OP$; $OP = 6$ cm. **16.** Notăm cu G centrul de greutate al $\Delta A'BC'$ și cu a lungimea muchiei $B'B$, iar $A'C' \cap B'D' = \{O\}$. Cum $A'O \equiv C'O$, rezultă că $G \in BO$. Observăm că $A'C' \perp (B'BG)$, deci $A'C' \perp B'D'$, prin urmare $A'B'C'D'$ este pătrat. Deoarece $\angle BB'O = 90^\circ$, avem $\frac{B'O^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, de unde rezultă că $B'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, deci $B'D' = a\sqrt{2}$, așadar $A'B' = a$, prin urmare $ABCD A'B'C'D'$ este cub. **17. „ $\Rightarrow$ ”** Notăm cu O centrul bazei $ABCD$ și cu O_1 centrul feței laterale VBC . Deoarece $l = m$, rezultă că $OVBC$ este piramidă regulată, deci $\text{pr}_{(VBC)} O = O_1$. „ $\Leftarrow$ ” Deoarece $\text{pr}_{(VBC)} O = O_1$, rezultă că $\Delta OO_1B \equiv \Delta OO_1V \equiv \Delta OO_1C$, deci $BO \equiv VO \equiv CO$, prin urmare $\Delta BOC \equiv \Delta VOC$, de unde rezultă că $BC \equiv VC$, așadar $l = m$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) D; **b)** B'; **c)** O, unde $\{O\} = AC \cap BD$. **2. a)** $P'Q'$; **b)** $N'P'$; **c)** $Q'O$, unde $\{O\} = MP \cap NQ$.
3. $AO \cap BC = \{O\}$; $VM = 2\sqrt{7}$ cm.