Nume: ....

Prenume: ....

Clasă: ....

Şcoală:...

....

MATE 2000+

Standard

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ZANOSCHI, ADRIAN
Matematică : Algebră, geometrie : clasa a VII-a / Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa. - Piteşti : Paralela 45, 2020
ISBN 978-973-47-3286-9

I. Iurea, Gheorghe
II. Popa, Gabriel

51

Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA
Gabriel POPA

matematică

algebră
geometrie

clasa a VII-a

mate 2000 – standard

ÎNVĂȚARE STANDARD ®
aprofundare

Editura Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Seria „Mate 2000+ Standard”, adresată elevilor de clasa a VII-a şi de clasa a VIII-a, a apărut din necesitatea sistematizării şi a interpretării creative şi aplicative a noţiunilor din noua programă de studiu, în scopul armonizării practicii şcolare cu setul de competenţe impus de programă şi cu specificul subiectelor de examen. Prin ea se urmăreşte trecerea de la formarea noţiunilor şi a deprinderilor elementare de operare cu acestea, la dezvoltarea raţionamentului matematic riguros.

Autorii au modelat conceptele şi noţiunile abstracte fireşti domeniului astfel încât elevul să vadă şi să exerseze aplicaţiile practice ale matematicii, fiind pus permanent în situaţia de a adapta aparatul teoretic la necesităţile şi la provocările vieţii de zi cu zi. Învăţarea devine, prin această deschidere către realitatea concretă, plăcută şi necesară.

Fiecare volum începe cu recapitularea materiei din clasa anterioară, dublată de testele iniţiale elaborate în acord cu gradul de dificultate al Evaluării Naţionale. Capitolele sunt împărţite în lecţii care pot fi parcurse în 1-3 ore şi se încheie, fiecare, cu câte trei teste sumative ce oferă o imagine fidelă a nivelului de pregătire la care se află, etapă cu etapă, elevii. Lecţiile încep cu o expunere detaliată şi temeinică a părţii teoretice, fapt care asigură o anumită autonomie a lucrării faţă de alte auxiliare didactice. Urmează un număr de probleme reprezentative pentru tematica lecţiei, însoţite de rezolvări punctuale, care se constituie în modele de redactare a răspunsurilor. Problemele propuse sunt gândite gradual, atât ca dificultate, cât şi din punct de vedere metodic, încât profesorul să le adapteze în mod nuanţat ritmului de pregătire al elevilor. Ele respectă, totodată, pragurile de dificultate specifice subiectelor de la Evaluarea Naţională, iar cele care depăşesc acest nivel – puţine la număr - sunt semnalate prin asterisc. Toate problemele au, la finalul culegerii, răspunsuri sau soluţii. În plus, volumul pentru clasa a VIII-a are, în ultima parte, teme recapitulative din materia claselor V-VII, gândite în spiritul subiectelor de Evaluare Naţională.

Sperăm că lucrările din seria „Mate 2000+ Standard” vor aduce bucuria învăţării pentru elevii cărora se adresează, iar colegii noştri profesori vor găsi în ele instrumente utile pentru îndrumarea copiilor. Succes tuturor!

Autorii

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect

Pătratul unui număr natural n este numărul $n^2 = n \cdot n$. Un număr de forma n^2, cu $n \in \mathbb{N}$, se numeşte **număr natural pătrat perfect**.

Exemple: $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ etc. sunt numere naturale pătrate perfecte.

DEFINIȚIE: **Rădăcina pătrată** a unui număr natural pătrat perfect x (sau *radical* din x) este numărul natural y al cărui pătrat este x, adică $x = y^2$.

Pentru a desemna rădăcina pătrată folosim simbolul $\sqrt{}$.

Exemple: $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$ etc.

Observații:

1. $3 \underset{\text{rădăcină pătrată}}{\overset{\text{pătrat}}{\rightleftarrows}} 9$

2. Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

3. În mulțimea numerelor întregi ($\mathbb{Z}$) există două numere care ridicate la pătrat dau, de exemplu, 9, aceste numere fiind –3 şi 3. Prin definiție, rădăcina pătrată a lui 9 este numărul pozitiv 3. Deci, $\sqrt{9} \neq -3$.

Vom prezenta, în continuare, **două metode de calcul a rădăcinii pătrate** a unui număr natural pătrat perfect.

M1. Descompunerea numărului considerat în factori primi

Exemple: 1) $1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \Rightarrow \sqrt{1024} = 2^5 = 32$;

2) $13689 = 3^4 \cdot 13^2 = (3^2 \cdot 13)^2 \Rightarrow \sqrt{13689} = 3^2 \cdot 13 = 117$.

M2. Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate

Pentru a ilustra metoda, vom calcula $\sqrt{18225}$.

I. $\sqrt{1\,|\,82\,|\,25}$

Despărţim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga.

II.
$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 1 \\ \cline{2-2} \;\underline{1} & \\ \;= & \end{array}$$

Căutăm cel mai mare număr natural al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 1. Scriem acest număr, 1, în dreapta sus, iar pătratul său $1^2 = 1$ îl aşezăm sub 1 (stânga) şi efectuăm scăderea.

III.
$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 1 \\ \cline{2-2} \;\underline{1} & 2 \\ \;= 8.2 & \end{array}$$

Coborâm, în stânga, grupa următoare (82) şi despărţim ultima cifră cu un punct, iar în dreapta coborâm dublul lui 1, adică 2.

IV.
$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 13 \\ \cline{2-2} \;\underline{1} & \cancel{24 \cdot 4 = 96} \\ \;= 8.2 & \underline{23 \cdot 3 = 69} \\ \quad \underline{6\,9} & \\ \quad 1\,3 & \end{array}$$

Împărţim pe 8 la 2, obţinem câtul 4. Aşezăm pe 4 la dreapta lui 2 şi înmulţim numărul astfel format cu 4: $24 \cdot 4 = 96$. Cum $96 > 82$, reluăm operaţia anterioară cu predecesorul lui 4, care este 3: $23 \cdot 3 = 69 < 82$. Scriem 69 sub 82 (în stânga) şi facem scăderea. Pe 3 îl scriem în dreapta sus, lângă 1.

V.
$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 135 \\ \cline{2-2} \;\underline{1} & \cancel{24 \cdot 4 = 96} \\ \;= 8.2 & \underline{23 \cdot 3 = 69} \\ \quad \underline{6\,9} & 265 \cdot 5 = 1325 \\ \quad 1\,3\,2.5 & \\ \quad \underline{1\,3\,2\,5} & \\ \quad = = = = & \end{array}$$

Coborâm, în stânga, următoarea grupă şi despărţim ultima cifră printr-un punct. În dreapta coborâm dublul lui 13 ($13 \cdot 2 = 26$). Numărul 26 se cuprinde în 132 de cinci ori. Trecem pe 5 în dreapta lui 26 şi înmulţim rezultatul cu 5, astfel: $265 \cdot 5 = 1325$. Diferenţa din stânga este zero. Scriem în dreapta sus, lângă 13, pe 5.

Algoritmul este astfel încheiat, iar $\sqrt{18225} = 135$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Calculaţi: $\sqrt{324}$, $\sqrt{5184}$ şi $\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5}$.

Soluţie: Vom descompune numerele de sub radicali în factori primi. Astfel, obţinem:

$\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt{(2 \cdot 3^2)^2} = 2 \cdot 3^2 = 18,$

$\sqrt{5184} = \sqrt{2^6 \cdot 3^4} = \sqrt{(2^3 \cdot 3^2)^2} = 2^3 \cdot 3^2 = 72,$

$\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5} = \sqrt{2^4 \cdot 5^6} = \sqrt{(2^2 \cdot 5^3)^2} = 2^2 \cdot 5^3 = 500.$

2. Determinaţi numărul natural n, ştiind că $n = \sqrt{16 \cdot 3^{10} + 3^{12}}$.

Soluţie: Cum $16 \cdot 3^{10} + 3^{12} = 3^{10} \cdot (16 + 9) = 3^{10} \cdot 5^2 = (3^5 \cdot 5)^2$, rezultă că $n = 3^5 \cdot 5 = 1215$.

3. Determinaţi numărul natural x, ştiind că $\sqrt{2x+1} - 3 = 12$.

Soluţie: Deoarece $\sqrt{2x+1} = 15$, înseamnă că $2x + 1 = 15^2$, deci $2x = 224$ sau $x = 112$.

4. Determinaţi cifrele a, b, x, y, pentru care $\sqrt{\overline{4ab}} = \overline{xy}$.

Soluţie: Evident, dacă extragem radicalul din $\overline{4ab}$, obţinem un număr de două cifre, cu prima cifră 2, deci $x = 2$. Deoarece $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, iar $23^2 = 529$, rezultă că $a = b = 0$ şi $y = 0$ sau $a = 4$, $b = 1$ şi $y = 1$ sau $a = 8$, $b = 4$ şi $y = 2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinaţi pătratele următoarelor numere naturale: 11, 12, 13, 14, 15, 20 şi 160.

2. Ridicaţi la pătrat următoarele numere şi scrieţi de fiecare dată rezultatul ca produs de puteri ale unor numere prime: 2^5, $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, $3^{11} \cdot 5^7$, $2^n \cdot 7^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

3. Scrieţi toate numerele naturale pătrate perfecte cuprinse între 200 şi 500.

4. Arătaţi că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) 25, 36, 81, 100, 900; b) 5^4, 2^6, 12^{10}, 6^{2n}, 13^{4n+6} ($n \in \mathbb{N}$).

5. Arătaţi că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) $3^2 + 4^2$; b) $3^2 + 4^2 + 12^2$; c) $3^7 + 3^6$;
d) $2^{11} - 2^{10}$; e) $2 \cdot 3^3 \cdot 6^5$; f) $3^3 \cdot 12^5$.

6. Efectuaţi următoarele calcule şi scrieţi rezultatul sub formă de pătrat perfect:

a) $3 \cdot (3 \cdot 29 + 91 : 7 - 52)$; b) $1 + 3 + 5 + ... + 49$;
c) $2^{51} + 7 \cdot 2^{50}$; d) $9^{30} : 3^{11} + 10 \cdot 3^{48} - 3^{50}$.

7. Determinaţi câte elemente are mulţimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este pătrat perfect şi } x \leq 1000\}$.

8. a) Care poate fi ultima cifră a pătratului unui număr natural?

b) Arătaţi că, dacă n este un număr natural, atunci numerele naturale $5n + 2$ şi $5n + 7$ nu sunt pătrate perfecte.

9. Arătaţi că numărul $a = 3^{45} + 2^{62}$ nu este pătrat perfect.

10. Calculaţi (utilizând descompunerea în factori primi):

a) $\sqrt{4}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{2500}$;

b) $\sqrt{2^2}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{2^2 \cdot 5^6}$; $\sqrt{6^4 \cdot 3^8}$; $\sqrt{2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4}$;

c) $\sqrt{2^{2n}}$; $\sqrt{3^{4m}}$; $\sqrt{2^{2n} \cdot 5^{6m}}$; $\sqrt{7^{4n+2}}$; $\sqrt{2^{6m-4}}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$;

d) $\sqrt{12 \cdot 3^{11}}$; $\sqrt{18 \cdot 2^{13}}$; $\sqrt{6^3 \cdot 2^5 \cdot 3^{11}}$; $\sqrt{7^{31} + 2 \cdot 7^{30}}$; $\sqrt{3^{22} - 2 \cdot 3^{21} + 3^{20}}$.

11. Calculaţi (folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate):

a) $\sqrt{225}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{576}$;

b) $\sqrt{1764}$; $\sqrt{3136}$; $\sqrt{7056}$;

c) $\sqrt{10404}$; $\sqrt{50625}$; $\sqrt{64516}$.

12. Calculaţi:

a) $\sqrt{36} + \sqrt{64} - \sqrt{81}$;

b) $\sqrt{100} - \left(\sqrt{169} - \sqrt{25}\right)$;

c) $\sqrt{9} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$;

d) $\left(\sqrt{256} - \sqrt{144}\right) : \sqrt{4}$;

e) $\left(\sqrt{0} + \sqrt{1}\right)^7 + \sqrt{361}$;

f) $\left(2 + \sqrt{324}\right) \cdot \sqrt{16}$;

g) $\left(\sqrt{289} + \sqrt{169}\right) : \sqrt{225}$;

h) $2 \cdot \sqrt{121} - \sqrt{441}$.

13. Calculaţi:

a) $\sqrt{1+3+5+7+9+11}$;

b) $\sqrt{20 - 32 : (7-5)}$;

c) $\sqrt{104 : 2 + 4 \cdot 3}$;

d) $\sqrt{(14-6) \cdot (7+11)}$;

e) $\sqrt{2^8 + 2^{11}}$;

f) $\sqrt{15^2 + 20^2}$;

g) $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$;

h) $\sqrt{3\left(7^{12} - 7^{10}\right)}$.

14. Determinaţi $x \in \mathbb{N}$, ştiind că:

a) $\sqrt{x} = 15$; b) $\sqrt{x-2} = 16$; c) $7 + \sqrt{x} = 12$; d) $\sqrt{x+3} - 4 = 6$.

15. Calculaţi $\sqrt{\overline{abc}}$, ştiind că $\sqrt{\overline{1ba}} = \overline{c3}$.

16. Determinaţi numărul natural $\overline{abcd}$, ştiind că $\sqrt{\overline{abc5}} = \overline{3d}$.

17. Aflaţi lungimea laturii unui ring de box în formă de pătrat cu aria de 36 m².

18. Aflaţi perimetrul unui pătrat echivalent cu un dreptunghi cu lungimea L = 175 cm şi lăţimea l = 28 cm (două figuri plane se numesc echivalente dacă au ariile egale).

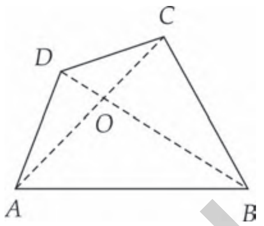
19. Podeaua unei camere are forma unui dreptunghi cu dimensiunile L = 12 m şi l = 8 m. Pentru pavarea ei se folosesc 384 plăci pătrate de gresie cu latura de x cm. Aflaţi valoarea lui x.

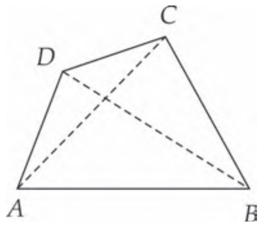
CAPITOLUL IV
PATRULATERUL

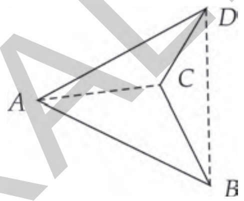
IV.1. Patrulaterul convex

Elemente:

- laturi: segmentele *AB, BC, CD; DA*;
- diagonale: segmentele *AC, BD*;
- unghiuri: ∢*A*, ∢*B*, ∢*C*, ∢*D*.







Patrulater convex: ambele diagonale se află în interiorul patrulaterului.

Patrulater concav: una dintre diagonale se află în exteriorul patrulaterului.

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este 360°.

Probleme rezolvate

1. Se consideră *ABCD* un patrulater convex în care *AB* = *AD* = 3 cm, *BC* = 4 cm, ∢*ADB* = 60° şi ∢*CBD* = 90° (fig. 1).

a) Determinaţi măsurile unghiurilor ∢*A* şi ∢*B*.

b) Aflaţi perimetrul patrulaterului.

c) Desenaţi patrulaterul *ABCD*.

Soluţie: a) Triunghiul *ABD* este isoscel şi are un unghi de 60°, deci este echilateral; rezultă că *BD* = 3 cm, iar ∢*A* = ∢*ABD* = 60°. Astfel, ∢*B* = = ∢*ABD* + ∢*CBD* = 150°.

b) Cu teorema lui Pitagora în triunghiul *BCD*, obţinem *CD* = 5 cm. Deducem că $\mathcal{P}_{ABCD}$ = *AB* + *BC* + *CD* + *DA* = 15 cm.

c) Folosind compasul, desenăm triunghiul echilateral *ABD* cu latura de 3 cm. În exteriorul acestuia, folosind echerul, desenăm triunghiul dreptunghic *BCD*, ∢*B* = 90°, cu *BC* = 4 cm. Patrulaterul *ABCD* este cel căutat.

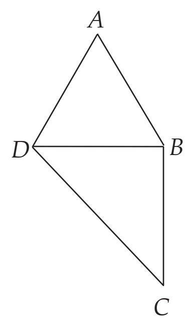


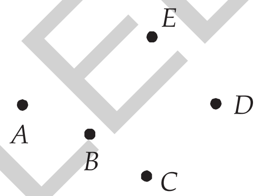
Fig. 1

2. Notăm cu M mulţimea unghiurilor ascuţite ale unui patrulater convex. Câte elemente poate avea mulţimea M?

Soluţie: Există patrulatere cu 0 unghiuri ascuţite (cele cu unghiurile 90°, 90°, 90°, 90°), cu 1 unghi ascuţit (de exemplu cele cu unghiurile 60°, 100°, 100°, 100°), cu 2 unghiuri ascuţite (de exemplu cele cu unghiurile 60°, 60°, 120°, 120°) şi cu 3 unghiuri ascuţite (de exemplu cele cu unghiurile 80°, 80°, 80°, 120°). Dacă, prin absurd, un patrulater ar avea toate unghiurile ascuţite, suma lor ar fi mai mică decât $4 \cdot 90° = 360°$, fapt imposibil. În concluzie, mulţimea M poate avea 0, 1, 2 sau 3 elemente.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră punctele A, B, C, D, E, ca în figura alăturată. Desenaţi şi notaţi două patrulatere convexe şi două patrulatere concave, având vârfurile în câte patru dintre cele cinci puncte.



2. a) Desenaţi un patrulater convex $ABCD$.

b) Numiţi perechile de laturi opuse ale patrulaterului.

c) Numiţi diagonalele patrulaterului.

d) Numiţi perechile de unghiuri alăturate ale patrulaterului.

3. Alegem, la întâmplare, două dintre unghiurile unui patrulater. Care este probabilitatea ca unghiurile alese să fie opuse?

4. Laturile unui patrulater, exprimate în metri, sunt patru numere naturale consecutive. Aflaţi lungimile laturilor patrulaterului, ştiind că perimetrul său este 46 m.

5. Ionuţ parcurge traseul $A \to B \to C \to D \to A$ din figura 2. El face 500 de paşi. Care este lungimea pasului lui Ionuţ?

6. Perimetrul patrulaterului din figura 3 este 100 cm. Perimetrele triunghiurilor ABC şi ACD sunt 75 cm, respectiv 8 dm. Aflaţi lungimea diagonalei AC.

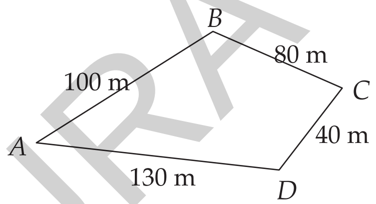


Fig. 2

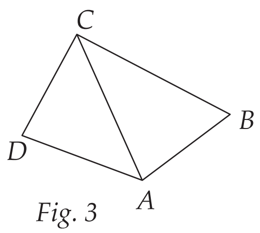


Fig. 3

7. Construiţi un patrulater convex $ABCD$, ştiind că triunghiul ABD este isoscel cu $AB = BD = 5$ cm şi $AD = 4$ cm, iar triunghiul BCD este echilateral. Calculaţi perimetrul patrulaterului.

8. Construiţi un patrulater convex $ABCD$ care nu are toate unghiurile drepte şi:

a) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$; b) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90°$.

9. Construiţi un patrulater convex $ABCD$, astfel încât:

a) $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle C = 150°$, $\sphericalangle D = ?°$; b) $\sphericalangle A = 100°$, $\sphericalangle B = ?°$, $\sphericalangle C = 120°$, $\sphericalangle D = 20°$.

10. Construiţi un patrulater convex $ABCD$, astfel încât triunghiul ACD este echilateral, iar triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza BC. Determinaţi măsurile unghiurilor patrulaterului.

11. În patrulaterul convex $ABCD$, măsura unghiului A este media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri. Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle A$.

12. În patrulaterul convex $ABCD$, măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ şi $\sphericalangle D$ sunt direct proporţionale cu numerele 2, 4, 6 şi 8. Aflaţi măsurile unghiurilor patrulaterului.

13. În patrulaterul convex $ABCD$, măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ şi $\sphericalangle D$ sunt invers proporţionale cu numerele 2, 3, 4 şi 6. Aflaţi măsurile unghiurilor patrulaterului.

14. Folosind metoda prin care aţi demonstrat că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este 360°, calculaţi suma măsurilor unghiurilor unui:

a) pentagon; b) hexagon.

15. Se consideră patrulaterul $ABCD$ cu $\sphericalangle A = \sphericalangle DBC = 90°$, $AB = 7{,}2$ cm, $BC = 5$ cm şi $CD = 13$ cm. Aflaţi perimetrul patrulaterului.

16. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt perpendiculare şi se intersectează în punctul O. Determinaţi perimetrul patrulaterului, ştiind că $OA = 5$ cm, $OB = OD = 12$ cm şi $OC = 16$ cm.

17. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB = AD$ şi $BC = CD$. Demonstraţi că dreptele AC şi BD sunt perpendiculare.

18. Fie $ABCD$ un patrulater şi M mijlocul diagonalei AC. Determinaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle D$, ştiind că $AM = BM = DM$.

19. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt perpendiculare şi se intersectează în O, iar punctul O este mijlocul segmentului BD (fig. 4).

a) Demonstraţi că triunghiurile ABC şi ADC sunt congruente.

b) Ştiind că $\sphericalangle B = 90°$, $\sphericalangle C = 60°$ şi $AB = 6$ cm, determinaţi lungimea segmentului OC.

20. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB = BC$, $\sphericalangle A = 105°$, $\sphericalangle B = 60°$ şi $\sphericalangle D = 45°$ (fig. 5).

a) Arătaţi că $AC = CD$.

b) Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle DBC$.

21. Fie $ABCD$ un patrulater convex, care are unghiurile opuse $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle D$ de măsuri egale. Demonstraţi că bisectoarele AP şi CQ ale unghiurilor $\sphericalangle A$, respectiv $\sphericalangle C$ sunt drepte paralele (fig. 6).

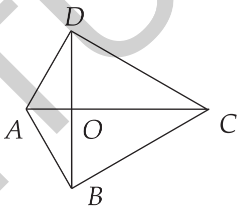


Fig. 4

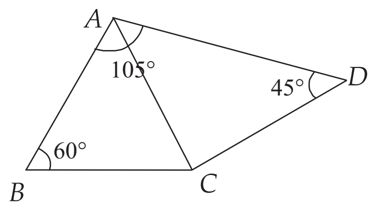


Fig. 5

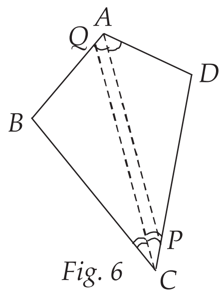
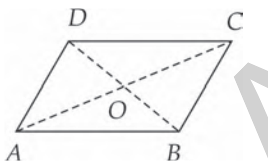


Fig. 6

IV.2. PARALELOGRAMUL

Un patrulater care are laturile opuse paralele se numeşte paralelogram.

Proprietăţi:



P_1: Laturile opuse ale unui paralelogram sunt segmente egale.

R_1P_1: Dacă un patrulater are laturile opuse egale două câte două, el este un paralelogram.

R_2P_1: Dacă un patrulater are o pereche de laturi opuse paralele şi egale, el este un paralelogram.

P_2: Unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt egale, iar unghiurile alăturate sunt suplementare.

R_1P_2: Dacă un patrulater are două perechi consecutive de unghiuri alăturate suplementare, el este un paralelogram.

R_2P_2: Dacă un patrulater are unghiurile opuse egale două câte două, el este un paralelogram.

P_3: Diagonalele unui paralelogram se înjumătăţesc.

RP_3: Dacă diagonalele unui patrulater se înjumătăţesc, el este un paralelogram.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB = 2BC$, iar M mijlocul laturii CD (fig. 1).
a) Arătaţi că triunghiurile DAM şi CBM sunt isoscele.
b) Demonstraţi că AM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.
c) Arătaţi că unghiul $\sphericalangle AMB$ este drept.

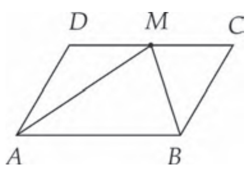


Fig. 1

Soluţie: a) Conform P_1, avem $AB = CD$ şi $AD = BC$; rezultă că $DA = DM$ şi $CB = CM$.
b) Dreptele AB şi CD sunt paralele; considerând secanta AM, obţinem că $\sphericalangle DMA = \sphericalangle MAB$ (alt. int.). Pe de altă parte, din a) obţinem $\sphericalangle DMA = \sphericalangle DAM$. Deducem că $\sphericalangle MAB = \sphericalangle DAM$, adică AM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.
c) Ca la b), se arată că BM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$. Atunci $\sphericalangle MAB + \sphericalangle MBA = \frac{1}{2}\sphericalangle A + \frac{1}{2}\sphericalangle B = \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$ (am ţinut seama de P_2). Suma unghiurilor triunghiului MAB fiind 180°, rezultă că $\sphericalangle AMB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Cuprins