Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZANOSCHI, ADRIAN
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a / Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa. - Ed. a 4-a. - Pitești : Paralela 45, 2023
ISBN 978-973-47-3926-4

I. Iurea, Gheorghe
II. Popa, Gabriel

51

Editura Paralela 45

Copyright © Editura Paralela 45, 2023
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparalela45.ro

Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA
Gabriel POPA

matematică

algebră
geometrie

clasa a VII-a

ediția a IV-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

Editura Paralela 45

PROBLEME RECAPITULATIVE
CLASA A VI-A

ALGEBRĂ

1. Se consideră mulţimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < 3x - 2 < 28\}$ şi $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$. Determinaţi $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ şi $B \setminus A$.

2. Determinaţi mulţimile X şi Y, ştiind că $X \cup Y = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$, $X \cap Y = \{5, 7, 9\}$ şi $X \setminus Y = \{1, 10\}$.

3. Fie A şi B două mulţimi, astfel încât card $(A) = 25$, card $(B) = 36$ şi card $(A \cap B) = 20$. Aflaţi card $(A \cup B)$.

4. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$.

a) Scrieţi toate submulţimile mulţimii A care au două elemente şi suma acestora este număr impar.

b) Câte submulţimi cu cinci elemente are A?

c) Câte submulţimi are, în total, mulţimea A?

5. Descompuneţi în factori primi numerele naturale: $a = 72$, $b = 75$, $c = 91$ şi $d = 138$. Care dintre aceste numere are mai mulţi divizori naturali?

6. Determinaţi cel mai mare număr natural n, astfel încât 5^n să dividă numărul $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 49 \cdot 50$.

7. Fie numerele naturale $a = 168$ şi $b = 180$. Calculaţi cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b şi cel mai mic multiplu comun al lor.

8. Aflaţi câţi divizori comuni au numerele 126 şi 420.

9. Numerele 248 şi 107, împărţite la numărul natural nenul n, dau resturile 14, respectiv 17. Aflaţi numărul n.

10. Scrieţi toţi multiplii comuni ai numerelor 24 şi 36 care sunt mai mici decât 300.

11. Aflaţi care este cel mai mic număr de elevi care se pot alinia în coloane de câte 8 elevi, de câte 12 elevi şi de câte 18 elevi.

12. Ana are mai multe mere. Dacă le grupează câte trei sau câte patru, îi rămâne, de fiecare dată, câte un măr în plus. Dacă taie fiecare măr în patru, obţine mai puţin de 100 de felii. Câte mere are Ana?

13. a) Dintr-o clasă cu 28 de elevi, fetele reprezintă 25%. Aflaţi câţi băieţi sunt în clasă.

b) Dacă într-o clasă sunt 6 băieţi şi ei reprezintă 20% din numărul total de elevi, aflaţi câţi elevi sunt în clasa respectivă.

Editura Paralela 45

TESTE INIŢIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Partea I. *Scrieţi doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $6 - 12 : 3 - 4$ este:
A. –6 B. –2 C. 4 D. 0

(0,5p) **2.** Preţul unui calculator este 2800 lei. După o reducere cu 20%, preţul acestuia devine:
A. 2200 lei B. 2000 lei C. 2240 lei D. 2600 lei

(0,5p) **3.** Dacă $a \in \mathbb{Z}$ şi $-9 < a + 1 < -7$, atunci a este egal cu:
A. –10 B. –9 C. –8 D. –7

(0,5p) **4.** Ioana a cumpărat de la magazin o pâine de 2,50 lei şi 2 kg de cartofi de 2,40 lei kilogramul. Pentru cumpărăturile făcute, Ioana a plătit:
A. 4,90 lei B. 7,30 lei C. 7,50 lei D. 6,50 lei

(0,5p) **5.** Lungimea laturii unui triunghi echilateral cu perimetrul de 12,6 m este egală cu:
A. 4 m B. 12,6 m C. 6,3 m D. 4,2 m

(0,5p) **6.** Complementul unui unghi de 35° are măsura egală cu:
A. 55° B. 65° C. 90° D. 145°

(0,5p) **7.** Un triunghi isoscel are măsura unghiului opus bazei de 20°. Fiecare dintre unghiurile alăturate bazei sale are măsura de:
A. 20° B. 50° C. 70° D. 80°

(0,5p) **8.** Un triunghi dreptunghic are catetele egale cu 6 cm şi 8 cm. Lungimea ipotenuzei triunghiului este egală cu:
A. 8 cm B. 9 cm C. 10 cm D. 14 cm

Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

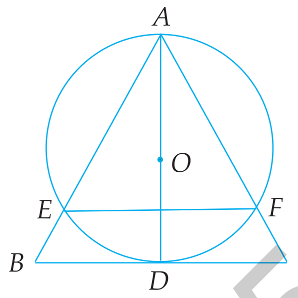
(1p) **1.** Rezolvaţi ecuaţia: $12 - 2(3x - 1) = -4$, $x \in \mathbb{Z}$.

(1p) **2.** Fie $a, b \in \mathbb{Q}^*$, astfel încât $\frac{3a+2b}{a+7b} = \frac{12}{23}$. Determinaţi valoarea raportului $\frac{a}{b}$.

(1p) **3.** Se consideră triunghiul isoscel ABC cu baza BC şi $m(\sphericalangle A) = 30°$. Dacă BD este înălţimea din B a triunghiului ABC ($D \in AC$), determinaţi măsura unghiului CBD.

Editura Paralela 45

4. În figura alăturată, ABC este un triunghi echilateral, D este mijlocul laturii BC, iar E şi F sunt punctele în care cercul cu diametrul AD şi centrul O intersectează laturile AB, respectiv AC.



(1p) a) Determinaţi măsura arcului mic $\overset{\frown}{AE}$ al cercului $\mathscr{C}(O)$ şi arătaţi că cercul este tangent dreptei BC.

(1p) b) Arătaţi că dreptele BC şi EF sunt paralele.

TESTUL 2

Partea I. *Scrieţi doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ este:

A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{11}{12}$ D. $\frac{37}{36}$

(0,5p) **2.** Dacă $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$, atunci numărul $3a-2b-1$ este egal cu:

A. 0 B. 1 C. –1 D. –2

(0,5p) **3.** Soluţia ecuaţiei $x:2+1=0$ este:

A. 4 B. $\frac{1}{2}$ C. –2 D. $-\frac{1}{2}$

(0,5p) **4.** Iulia rezolvă tema la matematică în jumătate de oră şi tema la engleză într-un sfert de oră. În total, ea a lucrat la teme timp de:

A. 45 minute B. 60 minute C. 75 minute D. 90 minute

(0,5p) **5.** Diametrul unui cerc are lungimea de 4 cm. Raza acelui cerc are lungimea de:

A. 8 cm B. 1 cm C. 2 cm D. 16 cm

(0,5p) **6.** În jurul punctului O se formează unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ şi $\sphericalangle DOA$. Primele trei unghiuri au măsurile 30°, 150°, respectiv 72°. Măsura unghiului $\sphericalangle DOA$ este:

A. 118° B. 108° C. 98° D. 128°

(0,5p) **7.** Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ şi $AC = 12$ cm, atunci lungimea segmentului MP este:

A. 2 cm B. 10 cm C. 12 cm D. 24 cm

(0,5p) **8.** În triunghiul dreptunghic ABC, AD este bisectoarea corespunzătoare ipotenuzei. Măsura unghiului $\sphericalangle DAC$ este:

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Editura Paralela 45

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect

Pătratul unui număr natural n este numărul $n^2 = n \cdot n$. Un număr de forma n^2, cu $n \in \mathbb{N}$, se numeşte **număr natural pătrat perfect**.

Exemple: $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ etc. sunt numere naturale pătrate perfecte.

Definiţie: **Rădăcina pătrată** a unui număr natural pătrat perfect x (sau *radical* din x) este numărul natural y al cărui pătrat este x, adică $x = y^2$.

Pentru a desemna rădăcina pătrată folosim simbolul $\sqrt{\ }$.

Exemple: $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$ etc.

Observaţii:

1. $3 \underset{\text{rădăcină pătrată}}{\overset{\text{pătrat}}{\rightleftarrows}} 9$

2. Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

3. În mulţimea numerelor întregi ($\mathbb{Z}$) există două numere care ridicate la pătrat dau, de exemplu, 9, aceste numere fiind –3 şi 3. Prin definiţie, rădăcina pătrată a lui 9 este numărul pozitiv 3. Deci, $\sqrt{9} \neq -3$.

Vom prezenta, în continuare, **două metode de calcul a rădăcinii pătrate** a unui număr natural pătrat perfect.

M1. Descompunerea numărului considerat în factori primi

Exemple: 1) $1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \Rightarrow \sqrt{1024} = 2^5 = 32$;

2) $13689 = 3^4 \cdot 13^2 = (3^2 \cdot 13)^2 \Rightarrow \sqrt{13689} = 3^2 \cdot 13 = 117$.

Editura Paralela 45

M2. Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate

Pentru a ilustra metoda, vom calcula $\sqrt{18225}$.

I. $\sqrt{1\,|\,82\,|\,25}$

Despărţim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga.

II.
$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 1 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & \\
= &
\end{array}$$

Căutăm cel mai mare număr natural al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 1. Scriem acest număr, 1, în dreapta sus, iar pătratul său $1^2 = 1$ îl aşezăm sub 1 (stânga) şi efectuăm scăderea.

III.
$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 1 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & 2 \\
= 8.2 &
\end{array}$$

Coborâm, în stânga, grupa următoare (82) şi despărţim ultima cifră cu un punct, iar în dreapta coborâm dublul lui 1, adică 2.

IV.
$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 13 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & \underline{\cancel{24 \cdot 4 = 96}} \\
= 8.2 & 23 \cdot 3 = 69 \\
\quad \underline{6\,9} & \\
\quad 1\,3 &
\end{array}$$

Împărţim pe 8 la 2, obţinem câtul 4. Aşezăm pe 4 la dreapta lui 2 şi înmulţim numărul astfel format cu 4: $24 \cdot 4 = 96$. Cum $96 > 82$, reluăm operaţia anterioară cu predecesorul lui 4, care este 3: $23 \cdot 3 = 69 < 82$. Scriem 69 sub 82 (în stânga) şi facem scăderea. Pe 3 îl scriem în dreapta sus, lângă 1.

V.
$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 135 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & \underline{\cancel{24 \cdot 4 = 96}} \\
= 8.2 & \underline{23 \cdot 3 = 69} \\
\quad \underline{6\,9} & 265 \cdot 5 = 1325 \\
\quad 1\,3\,2.5 & \\
\quad \underline{1\,3\,2\,5} & \\
\quad = = = = &
\end{array}$$

Coborâm, în stânga, următoarea grupă şi despărţim ultima cifră printr-un punct. În dreapta coborâm dublul lui 13 ($13 \cdot 2 = 26$). Numărul 26 se cuprinde în 132 de cinci ori. Trecem pe 5 în dreapta lui 26 şi înmulţim rezultatul cu 5, astfel: $265 \cdot 5 = 1325$. Diferenţa din stânga este zero. Scriem în dreapta sus, lângă 13, pe 5.

Algoritmul este astfel încheiat, iar $\sqrt{18225} = 135$.

Editura Paralela 45

Probleme rezolvate

1. Calculaţi: $\sqrt{324}$, $\sqrt{5184}$ şi $\sqrt{10\cdot 2^3\cdot 5^5}$.

Soluţie: Vom descompune numerele de sub radicali în factori primi. Astfel, obţinem:

$\sqrt{324} = \sqrt{2^2\cdot 3^4} = \sqrt{(2\cdot 3^2)^2} = 2\cdot 3^2 = 18,$

$\sqrt{5184} = \sqrt{2^6\cdot 3^4} = \sqrt{(2^3\cdot 3^2)^2} = 2^3\cdot 3^2 = 72,$

$\sqrt{10\cdot 2^3\cdot 5^5} = \sqrt{2^4\cdot 5^6} = \sqrt{(2^2\cdot 5^3)^2} = 2^2\cdot 5^3 = 500.$

2. Determinaţi numărul natural n, ştiind că $n = \sqrt{16\cdot 3^{10}+3^{12}}$.

Soluţie: Cum $16\cdot 3^{10}+3^{12} = 3^{10}\cdot(16+9) = 3^{10}\cdot 5^2 = (3^5\cdot 5)^2$, rezultă că $n = 3^5\cdot 5 = 1215$.

3. Determinaţi numărul natural x, ştiind că $\sqrt{2x+1} - 3 = 12$.

Soluţie: Deoarece $\sqrt{2x+1} = 15$, înseamnă că $2x+1 = 15^2$, deci $2x = 224$ sau $x = 112$.

4. Determinaţi cifrele a, b, x, y, pentru care $\sqrt{\overline{4ab}} = \overline{xy}$.

Soluţie: Evident, dacă extragem radicalul din $\overline{4ab}$, obţinem un număr de două cifre, cu prima cifră 2, deci $x = 2$. Deoarece $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, iar $23^2 = 529$, rezultă că $a = b = 0$ şi $y = 0$ sau $a = 4$, $b = 1$ şi $y = 1$ sau $a = 8$, $b = 4$ şi $y = 2$.

Probleme propuse

1. Determinaţi pătratele următoarelor numere naturale: 11, 12, 13, 14, 15, 20 şi 160.

2. Ridicaţi la pătrat următoarele numere şi scrieţi de fiecare dată rezultatul ca produs de puteri ale unor numere prime: 2^5, $2^3\cdot 3$, $2^4\cdot 3^2\cdot 5$, $3^{11}\cdot 5^7$, $2^n\cdot 7^{2n+1}$ ($n\in\mathbb{N}$).

3. Scrieţi toate numerele naturale pătrate perfecte cuprinse între 200 şi 500.

4. Arătaţi că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) 25, 36, 81, 100, 900; b) 5^4, 2^6, 12^{10}, 6^{2n}, 13^{4n+6} ($n\in\mathbb{N}$).

5. Arătaţi că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) 3^2+4^2; b) $3^2+4^2+12^2$; c) 3^7+3^6;
d) $2^{11}-2^{10}$; e) $2\cdot 3^3\cdot 6^5$; f) $3^3\cdot 12^5$.

6. Efectuaţi următoarele calcule şi scrieţi rezultatul sub formă de pătrat perfect:

a) $3\cdot(3\cdot 29+91:7-52)$; b) $1+3+5+\ldots+49$;
c) $2^{51}+7\cdot 2^{50}$; d) $9^{30}:3^{11}+10\cdot 3^{48}-3^{50}$.

7. Determinaţi câte elemente are mulţimea $A = \{x\in\mathbb{N} \mid x$ este pătrat perfect şi $x\le 1000\}$.

8. a) Care poate fi ultima cifră a pătratului unui număr natural?

b) Arătaţi că, dacă n este un număr natural, atunci numerele naturale $5n+2$ şi $5n+7$ nu sunt pătrate perfecte.

Editura Paralela 45

RECAPITULARE ŞI SISTEMATIZARE PRIN TESTE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

(1p) **1.** Arătaţi că $a = \sqrt{18} : \sqrt{2} + \sqrt{9^2 + 12^2}$ este număr natural.

(1p) **2.** Care este cel mai mic număr natural pătrat perfect divizibil cu 3, 4, 5 şi 6?

(1p) **3.** Un dreptunghi cu lungimea de două ori mai mare decât lăţimea are aria egală cu 288 m^2. Aflaţi câţi metri are perimetrul său.

(1p) **4.** Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $4\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75} = x\sqrt{3}$.

(1p) **5.** Care dintre elementele mulţimii $A = \left\{-13; -\frac{1}{2}; 2,(3); \sqrt{18}; 7; \sqrt{64}\right\}$ este număr iraţional?

(1p) **6.** Fie $a = \left(\sqrt{15}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{18} - \sqrt{3}\right) : \sqrt{3}$. Calculaţi $\sqrt{a}$.

(1p) **7.** Calculaţi diferenţa dintre media aritmetică şi media geometrică a numerelor $a = 5$ şi $b = 45$.

(1p) **8.** Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 = 8$.

(1p) **9.** Determinaţi numărul $x = 16 + 4 \cdot \left\{2 + \sqrt{2} \cdot \left[\sqrt{2} + 3 \cdot \left(\sqrt{27} - 3\sqrt{3}\right)\right] - 7^0\right\} : (-1)^7$.

TESTUL 2

(1p) **1.** Dovediţi că $a = \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{49}{36}}$ este număr natural.

(1p) **2.** Determinaţi numărul real x, ştiind că $\frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{x}$.

(1p) **3.** Fie $a = \left|3 - \sqrt{5}\right| + \left|\sqrt{5} + \sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3} - 2\right|$. Calculaţi $(a - 7)^6$.

(1p) **4.** Determinaţi numărul întreg x, ştiind că $x - 1 < -\sqrt{3} < x$.

(1p) **5.** Pentru o demonstraţie de gimnastică, 6250 de elevi din câteva şcoli au fost aranjaţi pe mai multe rânduri, astfel încât numărul de elevi din fiecare rând să fie egal cu numărul total de rânduri. Procedând astfel, organizatorul a constatat că 9 elevi au rămas în afara formaţiei. Aflaţi numărul elevilor de pe un rând.

Editura Paralela 45

CAPITOLUL II
ECUAŢII ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

II.1. Transformarea unei egalităţi într-o egalitate echivalentă. Identităţi

Proprietăţi ale relaţiei de egalitate în mulţimea numerelor reale

I. Dacă a şi b sunt numere reale, atunci:

1. $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c, \forall\, c \in \mathbb{R}$;
2. $a = b \Leftrightarrow a - c = b - c, \forall\, c \in \mathbb{R}$;
3. $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c, \forall\, c \in \mathbb{R}^*$;
4. $a = b \Leftrightarrow a : c = b : c, \forall\, c \in \mathbb{R}^*$;

II. Dacă a, b, c, d sunt numere reale, atunci:

1. $a = b$ şi $c = d \Rightarrow a + c = b + d$;
2. $a = b$ şi $c = d \Rightarrow a - c = b - d$;
3. $a = b$ şi $c = d \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$;
4. $a = b$ şi $c = d \neq 0 \Rightarrow a : c = b : d$.

Probleme rezolvate

1. Considerăm propoziţia: „Dacă a, b, c sunt numere reale şi $a = b$, atunci $ac = bc$". Stabiliţi dacă reciproca acestei propoziţii este adevărată.

Soluţie: Reciproca este falsă. De exemplu, pentru $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $ac = bc$ şi $a \neq b$.

2. Fie a, b, c numere reale, astfel încât $a = 2$ şi $a^2 + ab + ac = 12$. Determinaţi $3a - 4b - 4c$ şi $a^2 - 2ab - 2bc$.

Soluţie: Din relaţiile date rezultă $4 + 2b + 2c = 12$ sau $2(b + c) = 8$, deci $b + c = 4$. Avem $3a - 4b - 4c = 3a - 4(b + c) = 6 - 16 = -10$ şi $a^2 - 2ab - 2bc = 4 - 4b - 4c = 4 - 4(b + c) = 4 - 16 = -12$.

3. Fie a, b numere reale. Arătaţi că următoarele egalităţi sunt echivalente.

a) $7a = 3b + 21$;
b) $7a + 9 = 3b + 30$;
c) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} + 1$;
d) $4a = 3(b - a + 7)$;
e) $a(b - 7) - b(a - 3) = -21$.

Editura Paralela 45

Soluţie: Avem: $7a = 3b + 21 \mid +9 \Leftrightarrow 7a + 9 = 3b + 30$, deci a) $\Leftrightarrow$ b); $7a = 3b + 21 \mid : 21 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{7} + 1$, deci a) $\Leftrightarrow$ c); $7a = 3b + 21 \mid -3a \Leftrightarrow 4a = 3(b - a + 7)$, deci a) $\Leftrightarrow$ d); e) $\Leftrightarrow ab - 7a -$ $- ba + 3b = -21 \Leftrightarrow -7a + 3b = -21 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow 7a - 3b = 21 \mid + 3b \Leftrightarrow 7a = 3b + 21$, deci a) $\Leftrightarrow$ e).

4. Arătaţi că $E = -3(x - y) + x(y + 2) - y(x - 1) - 5(y - 1) = 3$, pentru orice x, y numere reale ce verifică condiţia $x + y = 2$.

Soluţie: $E = -3x + 3y + xy + 2x - xy + y - 5y + 5 = -x - y + 5 = -(x + y) + 5 = -2 + 5 = 3$.

PROBLEME PROPUSE

1. Dacă $a = 1440$ şi $b = 3780$, arătaţi că:
a) $21a = 8b$; b) $ab = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$; c) $a : b = 8 : 21$.

2. Fie a, b, c numere reale, astfel încât $a + 2b = 7$, $4b + 3c = 11$. Calculaţi $5a + 22b + 9c$.

3. Dacă a, b, c sunt numere reale, astfel încât $3a + b = 7$ şi $5b - 4c = 1$, calculaţi:
$$12a - 11b + 12c.$$

4. Fie a, b numere reale, astfel încât $3a + 2 = 5b$. Arătaţi că:
a) $3a - 1 = 5b - 3$; b) $\frac{a}{5} + \frac{2}{15} = \frac{b}{3}$;
c) $3ab + 2b = 5b^2$; d) $9a^2 + 6a = 15ab$.

5. Dacă x, y sunt numere reale şi $x - 2y = 0$, calculaţi $2x^2 - 3xy - 2y^2$.

6. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ şi $2x = 3y$, calculaţi: $6x - 9y - 2$, $\frac{3x}{y} - 5$ şi $\frac{x^2 - y^2}{xy}$.

7. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $2x - 5y = 3y - 4x$, calculaţi $(-3x + 4y - 1)^7$.

8. Fie x, y numere reale, $y \neq 0$, astfel încât $4x + 3y = 0$. Calculaţi $\frac{2x - y}{x - 3y}$.

9. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ şi $2x \neq y$ şi $\frac{5x + 2y}{2x - y} = 0{,}75$, calculaţi $\frac{x}{y}$.

10. Considerăm propoziţia: „Dacă $a = b$ şi $c = d$, atunci $ac = bd$.” Studiaţi dacă reciproca propoziţiei este adevărată sau falsă.

11. Fie a, b, c numere reale, astfel încât $a + b = 7$, $b + c = 41$, $c + a = 20$. Calculaţi $a + b + c$.

12. Fie a, b, c numere reale pozitive, astfel încât $ab = 6$, $bc = 10$, $ac = 15$. Calculaţi abc.

13. Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $5a + 6b + 7c = 58$ şi $7a + 6b + 5c = 62$, arătaţi că $a + b + c = 10$ şi $a - c = 2$.

14. Dacă a, b, c sunt numere reale şi $c^2 + ac + bc = 60$, $c = 5$, arătaţi că $a + b = 7$ şi calculaţi:
$$3c + 5a + 5b,\ c^2 - 2ac - 2bc,\ (a - 5)(b - c)(c - 5).$$

Editura Paralela 45

CAPITOLUL III
ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

III.1. DATE STATISTICE – RECAPITULARE ŞI COMPLETĂRI. POLIGONUL FRECVENŢELOR

O serie de date statistice poate fi **descrisă** printr-un tabel de forma:

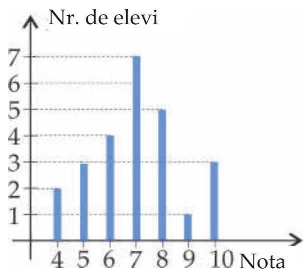
x	x_1	x_2	...	x_k
n	n_1	n_2	...	n_k

unde x_1, x_2, ..., x_k, sunt valorile care caracterizează un anumit fenomen, iar n_1, n_2, ..., n_k indică **frecvenţele** fiecăreia dintre valorile x_1, x_2, ..., x_k.

Seriile statistice pot fi reprezentate prin tabele, diagrame (cu bare, circulare), printr-un grafic sau folosind poligonul frecvenţelor. Vom descrie aceste modalităţi de reprezentare în problemele rezolvate mai jos.

PROBLEME REZOLVATE

1. Notele obţinute la teză de către elevii unei clase sunt cele din diagrama alăturată.



a) Câţi elevi sunt în clasă? Câţi dintre ei au obţinut note cel puţin egale cu 9?
b) Care este nota cu cea mai mare frecvenţă?
c) Calculaţi media clasei la matematică.

Soluţie: a) Numărul elevilor din clasă este $2 + 3 + 4 + 7 + 5 + 1 + 3 = 25$.
Dintre aceştia, $1 + 3 = 4$ elevi au obţinut note cel puţin egale cu 9.
b) Nota cu cea mai mare frecvenţă este 7 (iar frecvenţa acesteia este 7).
c) Suma notelor este $4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 3 = 175$. Media clasei este $175 : 25 = 7{,}00$.

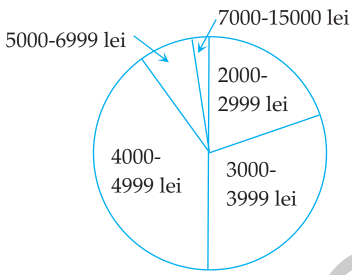
2. În tabelul de mai jos este descrisă distribuţia angajaţilor dintr-o întreprindere după salariul brut pe care îl primesc:

Salariul brut lunar (lei)	Numărul de angajaţi
2000 – 2999	200
3000 – 3999	300
4000 – 4999	400
5000 – 6999	75
7000 – 15000	25

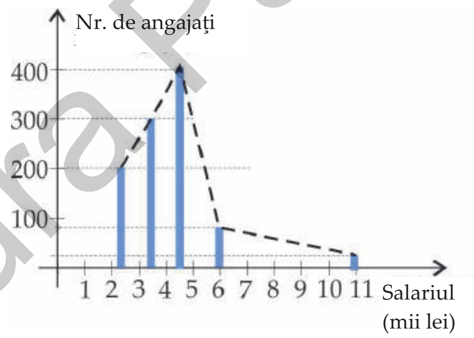
Editura Paralela 45

Reprezentaţi distribuţia angajaţilor, utilizând:
a) o diagramă circulară;
b) o diagramă cu bare (folosiţi valoarea centrală a fiecărei clase de salarizare pe axa orizontală);
c) poligonul frecvenţelor.

Soluţie: a) Unghiurile la centru corespunzătoare celor cinci sectoare ale reprezentării sunt: $\frac{200}{1000} \cdot 360° = 72°$; $\frac{300}{1000} \cdot 360° = 108°$; $\frac{400}{1000} \cdot 360° = 144°$; $\frac{75}{1000} \cdot 360° = 27°$, respectiv $\frac{25}{1000} \cdot 360° = 9°$. Diagrama circulară este cea din figura de mai jos.



b), c) Valorile centrale ale claselor de salarizare sunt 2500 lei, 3500 lei, 4500 lei, 6000 lei, respectiv 11000 lei. Diagrama cu bare este cea din figura de mai jos, iar poligonul frecvențelor este reprezentat cu linie întreruptă.

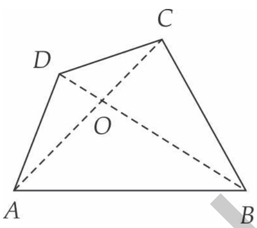


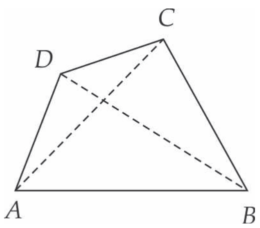
Editura Paralela 45

CAPITOLUL IV
PATRULATERUL

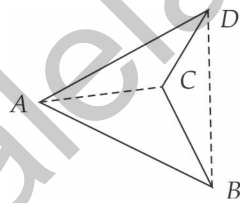
IV.1. PATRULATERUL CONVEX

Elementele:
- laturi: segmentele AB, BC, CD; DA;
- diagonale: segmentele AC, BD;
- unghiuri: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$.





Patrulater convex: ambele diagonale se află în interiorul patrulaterului.



Patrulater concav: una dintre diagonale se află în exteriorul patrulaterului.

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este 360°.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex în care $AB = AD = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $\sphericalangle ADB = 60°$ şi $\sphericalangle CBD = 90°$ (fig. 1).

a) Determinaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B$.

b) Aflaţi perimetrul patrulaterului.

c) Desenaţi patrulaterul $ABCD$.

Soluţie: a) Triunghiul ABD este isoscel şi are un unghi de 60°, deci este echilateral; rezultă că $BD = 3$ cm, iar $\sphericalangle A = \sphericalangle ABD = 60°$. Astfel, $\sphericalangle B = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = 150°$.

b) Cu teorema lui Pitagora în triunghiul BCD, obţinem $CD = 5$ cm. Deducem că $\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 15$ cm.

c) Folosind compasul, desenăm triunghiul echilateral ABD cu latura de 3 cm. În exteriorul acestuia, folosind echerul, desenăm triunghiul dreptunghic BCD, $\sphericalangle B = 90°$, cu $BC = 4$ cm. Patrulaterul $ABCD$ este cel căutat.

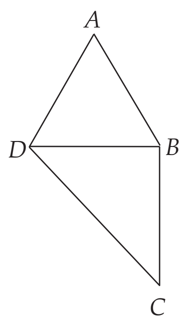


Fig. 1

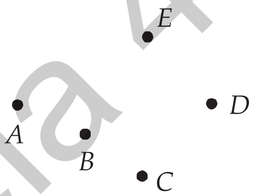
Editura Paralela 45

2. Notăm cu M mulţimea unghiurilor ascuţite ale unui patrulater convex. Câte elemente poate avea mulţimea M?

Soluţie: Există patrulatere cu 0 unghiuri ascuţite (cele cu unghiurile 90°, 90°, 90°, 90°), cu 1 unghi ascuţit (de exemplu cele cu unghiurile 60°, 100°, 100°, 100°), cu 2 unghiuri ascuţite (de exemplu cele cu unghiurile 60°, 60°, 120°, 120°) şi cu 3 unghiuri ascuţite (de exemplu cele cu unghiurile 80°, 80°, 80°, 120°). Dacă, prin absurd, un patrulater ar avea toate unghiurile ascuţite, suma lor ar fi mai mică decât $4 \cdot 90° = 360°$, fapt imposibil. În concluzie, mulţimea M poate avea 0, 1, 2 sau 3 elemente.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră punctele A, B, C, D, E, ca în figura alăturată. Desenaţi şi notaţi două patrulatere convexe şi două patrulatere concave, având vârfurile în câte patru dintre cele cinci puncte.



2. a) Desenaţi un patrulater convex $ABCD$.
b) Numiţi perechile de laturi opuse ale patrulaterului.
c) Numiţi diagonalele patrulaterului.
d) Numiţi perechile de unghiuri alăturate ale patrulaterului.

3. Alegem, la întâmplare, două dintre unghiurile unui patrulater. Care este probabilitatea ca unghiurile alese să fie opuse?

4. Laturile unui patrulater, exprimate în metri, sunt patru numere naturale consecutive. Aflaţi lungimile laturilor patrulaterului, ştiind că perimetrul său este 46 m.

5. Ionuţ parcurge traseul $A \to B \to C \to D \to A$ din figura 2. El face 500 de paşi. Care este lungimea pasului lui Ionuţ?

6. Perimetrul patrulaterului din figura 3 este 100 cm. Perimetrele triunghiurilor ABC şi ACD sunt 75 cm, respectiv 8 dm. Aflaţi lungimea diagonalei AC.

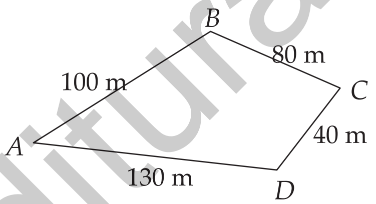


Fig. 2

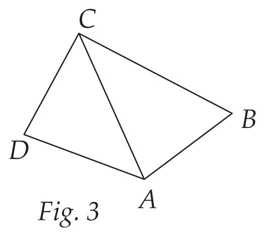


Fig. 3

7. Construiţi un patrulater convex $ABCD$, ştiind că triunghiul ABD este isoscel cu $AB = BD = 5$ cm şi $AD = 4$ cm, iar triunghiul BCD este echilateral. Calculaţi perimetrul patrulaterului.

8. Construiţi un patrulater convex $ABCD$ care nu are toate unghiurile drepte şi:
a) $\measuredangle A = \measuredangle B = 90°$; b) $\measuredangle A = \measuredangle C = 90°$.

9. Construiţi un patrulater convex $ABCD$, astfel încât:
a) $\measuredangle A = 40°$, $\measuredangle B = 70°$, $\measuredangle C = 150°$, $\measuredangle D = ?°$; b) $\measuredangle A = 100°$, $\measuredangle B = ?°$, $\measuredangle C = 120°$, $\measuredangle D = 20°$.

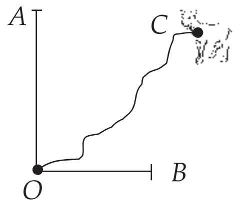
Editura Paralela 45

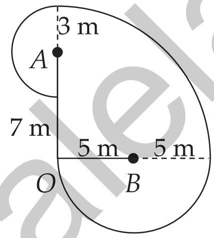
CAPITOLUL V
CERCUL

V.1. PROBLEME RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASEI A VI-A

PROBLEME REZOLVATE

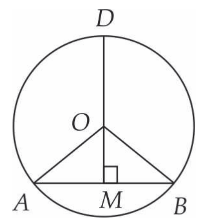
1. O capră C este legată cu o funie lungă de 10 m de un punct O şi este situată în interiorului unghiului $\sphericalangle AOB$, ca în figura de mai jos din stânga. OA este un gard de 7 m, iar OB un gard de 5 m, pe care capra nu le poate sări. Desenaţi suprafaţa de iarbă pe care o poate paşte capra.





Soluţie: Capra poate paşte iarba din interiorul sfertului de cerc de centru O şi rază 10 m, din interiorul semicercului de centru B şi rază 5 m şi din interiorul semicercului de centru A şi rază 3 m, ca în figura de mai sus din dreapta.

2. Fie A, B două puncte ale cercului $\mathscr{C}(O, R)$. Perpendiculara din O pe AB intersectează cercul $\mathscr{C}(O, R)$ în D (D aparţine arcului mare AB). Dacă $\sphericalangle OAB = 40°$, aflaţi măsurile arcelor mici $\overset{\frown}{DA}$, $\overset{\frown}{DB}$ şi $\overset{\frown}{AB}$.



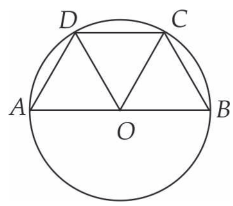
Soluţie: Fie $DO \cap AB = \{M\}$. Din triunghiul AOM obţinem că $\sphericalangle AOM = 50°$, deci $\overset{\frown}{DOA} = 130°$. Rezultă că măsura arcului $\overset{\frown}{AD}$ este 130° şi, analog, măsura arcului $\overset{\frown}{BD}$ este tot 130°. Cum $\sphericalangle AOB = 100°$, măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ este 100°.

3. Fie A, B puncte diametral opuse în cercul $\mathscr{C}(O, R)$, iar C şi D două puncte pe unul dintre semicercurile determinate de AB, astfel încât arcele $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ şi $\overset{\frown}{DA}$ au măsurile egale. Arătaţi că:

a) măsura unghiului $\sphericalangle DOC$ este 60°;

b) patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel;

c) patrulaterul $BCDO$ este romb.



Soluţie: Cum măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ este 180° şi arcele $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ şi $\overset{\frown}{DA}$ sunt egale, fiecare arc va avea 60°.

Editura Paralela 45

a) Măsura unghiului la centru $\sphericalangle DOC$ este egală cu măsura arcului $\overset{\frown}{DC}$, adică 60°.
b) Triunghiurile AOD, DOC şi COB sunt echilaterale. Din $\sphericalangle DCO = \sphericalangle COB$ (= 60°) deducem că $DC \parallel AB$, prin urmare $ABCD$ este trapez. Cum $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ (= 60°), trapezul este isoscel.
c) Patrulaterul $BCDO$ are toate laturile egale, deci este romb.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie P un punct din planul caietului vostru.
a) Desenaţi trei cercuri care trec prin P.
b) Câte cercuri situate în planul caietului trec prin punctul P?

2. Fie A şi B două puncte (diferite) din planul caietului vostru.
a) Desenaţi trei cercuri care trec prin A şi B.
b) Câte cercuri situate în planul caietului trec prin punctele A şi B? Unde se află centrul acestor cercuri?

3. Fie A, B şi C trei puncte (diferite) dintr-un plan. Câte cercuri trec prin cele trei puncte, dacă:
a) A, B, C sunt coliniare; b) A, B, C sunt necoliniare.

4. Într-un sat sunt trei case, A, B, C, nesituate în linie dreaptă. Unde trebuie săpată o fântână, astfel încât aceasta să fie egal depărtată de cele trei case?

5. O echipă de arheologi a descoperit un amfiteatru de formă circulară. Cum pot afla ei centrul amfiteatrului?

6. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se construiesc două diametre perpendiculare, AC şi BD. Arătaţi că $ABCD$ este pătrat.

7. Fie $ABCD$ un pătrat cu centrul în O şi $AB = 6$ cm. Stabiliţi poziţiile punctelor B, C, D şi O faţă de cercul $\mathcal{C}(A, r)$, unde $r = 6$ cm.

8. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $AB = AC = 10$ cm şi $BC = 16$ cm. Notăm cu D mijlocul lui BC şi cu E mijlocul lui AC.
a) Stabiliţi poziţiile punctelor B, D şi E faţă de cercul $\mathcal{C}(A, r)$, unde $r = 6$ cm.
b) Stabiliţi poziţiile punctelor A, B, C şi E faţă de cercul $\mathcal{C}(D, r)$, unde $r = 6$ cm.

9. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu laturile $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm şi $\{O\} = AC \cap BD$. Stabiliţi poziţiile punctelor B, C, D şi O faţă de $\mathcal{C}(A, r)$, unde $r = 6$ cm.

10. Desenaţi, cu ajutorul unei monede, cinci cercuri care trec prin acelaşi punct P. Arătaţi că centrele lor sunt puncte conciclice (se află pe un cerc).

11. Fie un segment AB cu lungimea de 3 cm. Notăm cu M şi N punctele de intersecţie a cercurilor $\mathcal{C}(A, r)$ şi $\mathcal{C}(B, r)$, unde $r = 2$ cm (fig. 1).
a) Arătaţi că $AMBN$ este romb şi MN este mediatoarea segmentului AB.

Editura Paralela 45

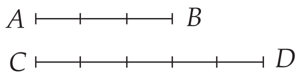
CAPITOLUL VI
ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

VI.1. Segmente proporţionale. Teorema paralelelor echidistante

1. Raportul a două segmente este raportul lungimilor lor (exprimate prin aceeaşi unitate de măsură).

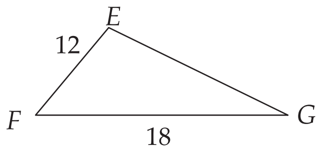
Exemple:

a)



Dacă $AB = 3$ cm şi $CD = 5$ cm, atunci raportul segmentelor AB şi CD este $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$.

b)



Dacă $EF = 12$ mm şi $FG = 18$ mm, atunci raportul segmentelor EF şi FG este $\frac{EF}{FG} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

2. Şirurile de segmente (A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ...) şi (C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, ...) se numesc (direct) proporţionale dacă şirurile lungimilor lor sunt (direct) proporţionale, adică:

$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = ... = k.$$

Valoarea comună, k, a acestor rapoarte se numeşte **factor de proporţionalitate**.

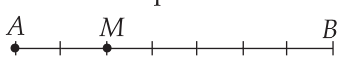
Exemplu: Dacă $A_1B_1 = 2$ m, $A_2B_2 = 5$ m, $A_3B_3 = 7$ m, $C_1D_1 = 6$ m, $C_2D_2 = 15$ m, $C_3D_3 = 21$ m, atunci:

$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = \frac{1}{3}$, deci ($A_1B_1$, A_2B_2, A_3B_3) şi (C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3) sunt (direct) **proporţionale**, iar $k = \frac{1}{3}$ este factorul lor de proporţionalitate.

3. Împărţirea unui segment într-un raport dat

Propoziţia 1. Există un singur punct interior unui segment care împarte segmentul considerat într-un raport dat.

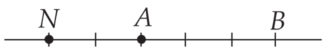
Exemplu:



$M \in (AB)$, $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$

Propoziţia 2. Există un singur punct exterior unui segment (dar situat pe dreapta suport a segmentului) care împarte segmentul considerat într-un raport dat, diferit de 1.

Editura Paralela 45

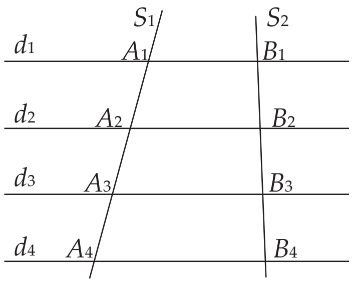
Exemplu: 

$N \in AB$, $N \notin [AB]$, $\frac{NA}{NB} = \frac{2}{5}$

Observaţie: Pe dreapta AB există exact două puncte, $M \in (AB)$ şi $N \notin [AB]$, astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$, unde $k > 0$, $k \neq 1$. Cele două puncte, M şi N, se numesc **puncte conjugate armonic** în raport cu A şi B.

4. Teorema paralelelor echidistante

Dacă dreptele paralele $d_1, d_2, ..., d_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) determină pe o secantă segmente de lungimi egale, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente de lungimi egale.

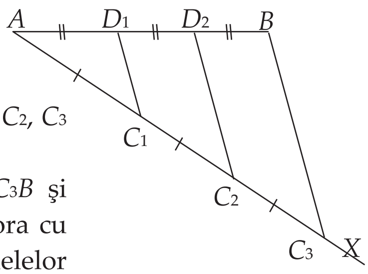


Dacă $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$ şi $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, atunci $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.

5. Împărţirea unui segment în n părţi egale ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$)

Să împărţim un segment AB în trei părţi egale.

Pentru aceasta, procedăm astfel:



I. Trasăm o semidreaptă $(AX$ (cu direcţia diferită de AB) şi alegem un punct oarecare $C_1 \in AX$.

II. Construim cu ajutorul unui compas punctele C_2, $C_3 \in (AX$, astfel încât $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$.

III. Prin punctele C_1 şi C_2 ducem paralele la C_3B şi notăm cu D_1, respectiv D_2 intersecţiile acestora cu segmentul AB. Conform teoremei paralelelor echidistante, avem $AD_1 = D_1D_2 = D_2B$.

Procedăm analog pentru a împărţi un segment AB în n părţi egale ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$).

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie un segment AB cu lungimea de 14 cm şi un punct $C \in (AB)$, astfel încât $\frac{CA}{CB} = \frac{2}{5}$. Aflaţi lungimile segmentelor CA şi CB (fig. 1).

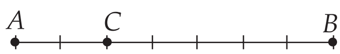


Fig. 1

Editura Paralela 45

CAPITOLUL VII
RELAŢII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

VII.1. Proiecţii ortogonale pe o dreaptă

- Proiecţia ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei din acel punct pe dreaptă.
- Proiecţia ortogonală a unei mulţimi F pe o dreaptă este mulţimea F' a tuturor proiecţiilor punctelor mulţimii F pe acea dreaptă.
- Proiecţia unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.

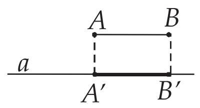
Problemă rezolvată

Fiind dată o dreaptă a şi un segment AB, determinaţi proiecţia segmentului AB pe dreapta a.

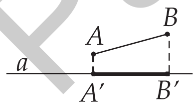
Soluţie: Fie A' şi B' proiecţiile punctelor A, respectiv B, pe dreapta a. Analizăm situaţiile:

I. Segmentul AB nu are puncte comune cu dreapta a.

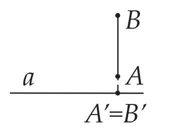
a) $AB \parallel a$;



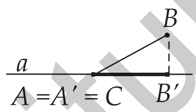
b) $AB \nparallel a$, $AB \not\perp a$;

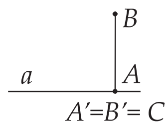


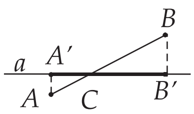
c) $AB \nparallel a$, $AB \perp a$.



II. Segmentul AB are un singur punct, C, comun cu dreapta a.



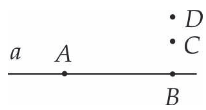




III. Segmentul AB este inclus în dreapta a.

Probleme propuse

1. În figura alăturată, punctele A şi B sunt pe dreapta a, iar B, C, D sunt coliniare şi $BC \perp a$. Găsiţi proiecţia mulţimii $F = \{A, B, C, D\}$ pe dreapta a.



Editura Paralela 45

2. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Proiecţiile laturilor neparalele ale trapezului pe dreapta AB au lungimile egale cu 2 cm şi, respectiv, 4 cm. Dacă $CD = 6$ cm, determinaţi lungimea bazei AB.

3. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O. Determinaţi: :

a) proiecţiile punctului A pe dreptele BD, BC, respectiv AC;

b) proiecţiile segmentului AB pe dreptele AD, respectiv AC;

c) proiecţia segmentului AC pe dreapta AB.

4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, iar D proiecţia punctului A pe BC. Determinaţi proiecţia:

a) catetei AC pe ipotenuză; b) ipotenuzei BC pe AB; c) înălţimii AD pe BC;

d) catetei AB pe AC; e) catetei AB pe AD.

5. Segmentul AB, având lungimea de 6 cm, formează cu o dreaptă a un unghi de 60°. Aflaţi lungimea proiecţiei segmentului AB pe dreapta a.

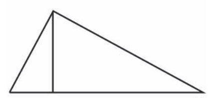
6. Într-un sistem de coordonate xOy considerăm punctul $A(2, -3)$. Care sunt coordonatele punctelor M şi N, proiecţiile punctului A pe Ox, respectiv Oy?

7. În sistemul de coordonate xOy considerăm punctele $A(1, 3)$ şi $B(-2, 1)$. Care sunt lungimile proiecţiilor segmentului AB pe Oy, respectiv Ox?

VII.2. Teorema înălţimii

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălţimii din vârful unghiului drept este medie proporţională între lungimile proiecţiilor catetelor pe ipotenuză.

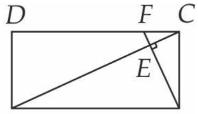
ΔABC, $\sphericalangle BAC = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC \Rightarrow AD^2 = BD \cdot DC$.



Probleme rezolvate

1. O grădină are formă de dreptunghi. Construim o alee BF, $F \in (DC)$, astfel încât $BF \perp AC$. Dacă $\{E\} = AC \cap BF$, $AE = 240$ m şi $CE = 60$ m, aflaţi:

a) aria terenului; b) lungimea aleii BF.



Soluţie: a) Din teorema înălţimii în triunghiul ABC rezultă că $BE^2 = AE \cdot EC$ şi de aici obţinem $BE = 120$ m. Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = 36000 \text{ m}^2 = 3{,}6$ ha.

b) Folosind teorema înălţimii în triunghiul BCF, avem $CE^2 = BE \cdot EF$. Rezultă că $EF = 30$ m. Deci, $BF = 150$ m.

2. (Reciproca teoremei înălţimii) Dacă într-un triunghi ABC înălţimea AD (cu D între B şi C) este medie proporţională între proiecţiile laturilor AB şi AC pe BC, atunci triunghiul este dreptunghic în A.

Editura Paralela 45

PROBLEME RECAPITULATIVE

ALGEBRĂ

1. Determinaţi $\sqrt{x}$, ştiind că:

a) $x = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$;

b) $x = \frac{5}{9} \cdot \left\{1 - \frac{1}{4} \cdot \left[1 - \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} : \frac{5}{4}\right)\right]\right\}$.

2. Calculaţi:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{50}$;

b) $2\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 10\sqrt{3}$.

3. Fie trei puncte *A*, *B*, *C*, astfel încât $AB = \sqrt{605}$ cm, $BC = \sqrt{180}$ cm şi $CA = \sqrt{125}$ cm. Arătaţi că punctele *A*, *B* şi *C* sunt coliniare.

4. Arătaţi că numărul $a = \left(\sqrt{50} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{18}\right) : \sqrt{8}$ este natural.

5. Arătaţi că $a = \left(\sqrt{2} + \sqrt{72}\right) : \left(\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{32}\right)$ este număr raţional.

6. Calculaţi:

a) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \cdot \sqrt{6}$;

b) $\left(\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) : \left(\sqrt{2}\right)^{-1}$.

7. Calculaţi:

a) $3 \cdot (3{,}5 - 0{,}25 \cdot 10) - \left(\sqrt{5} - \frac{2{,}5}{\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{5}$;

b) $(-1)^9 + 2\frac{1}{2} : \sqrt{0{,}25} - \frac{20}{\sqrt{300}} + \frac{\sqrt{48}}{6}$.

8. Arătaţi că numărul $a = \left(\sqrt{3} + \frac{15}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3} - \left(\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{5} + \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\right) : \frac{1}{\sqrt{72}}$ este cubul unui număr natural.

9. Fie numerele reale $a = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{7}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{6} + \left|12 - 7\sqrt{3}\right|$ şi $b = \sqrt{6^2 + 8^2} - \frac{8}{\sqrt{2}}$.

a) Arătaţi că $a = 4\left(\sqrt{2} - 3\right)$.

b) Calculaţi $(a + b)^{10}$.

10. Fie $a = \left(\sqrt{8} + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{27} - \sqrt{3}\right)$ şi $b = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{12} + 2\sqrt{75}\right) : \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{8} - \sqrt{18}\right)$. Arătaţi că numărul $\left(a\sqrt{2}\right) : b$ este număr natural.

11. Ordonaţi crescător numerele reale:

a) $a = 7$, $b = 4\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{13}$ şi $d = 5\sqrt{2}$;

b) $t = -3\sqrt{2}$, $x = -4$, $y = -2\sqrt{5}$ şi $z = -5$.

Editura Paralela 45

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

PROBLEME RECAPITULATIVE. CLASA A VI-A

ALGEBRĂ

1. $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{0, 1, 4, 9\}$; $A \cup B = \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A \cap B = \{4, 9\}$; $A \setminus B = \{5, 6, 7, 8\}$; $B \setminus A = \{0, 1\}$. **2.** $X = \{1, 5, 7, 9, 10\}$ şi $Y = \{3, 4, 5, 7, 9\}$. **3.** $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 41$. **4.** a) $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, $\{2, 9\}$; b) A are 6 submulţimi cu cinci elemente; c) $2^6 = 64$. **5.** $a = 2^3 \cdot 3^2$, $b = 3 \cdot 5^2$, $c = 7 \cdot 13$, $d = 2 \cdot 3 \cdot 23$. Numărul a are cei mai mulţi divizori naturali. **6.** $n = 12$. **7.** $(a; b) = 12$, $[a; b] = 2520$. **8.** Cel mai mare divizor comun al celor două numere este $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Deci, numerele 126 şi 420 au opt divizori comuni. **9.** Din relaţiile $248 = na + 14$ şi $107 = nb + 17$ ($a, b \in \mathbb{N}$, $n > 17$) obţinem $234 = na$ şi $90 = nb$, deci n este divizor comun al numerelor 234 şi 90. Cum $n > 17$, rezultă că $n = 18$. **10.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 24 şi 36 este 72. Numerele cerute sunt: $72 \cdot 0$, $72 \cdot 1$, $72 \cdot 2$, $72 \cdot 3$ şi $72 \cdot 4$. **11.** Numărul căutat, n, este cel mai mic multiplu comun al numerelor 8, 12 şi 18, deci $n = 72$. **12.** Notăm numărul de mere cu m. Din relaţiile $m = 3a + 1 = 4b + 1$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$) rezultă că $m - 1$ este multiplu de 12, ceea ce, având în vedere că $4m < 100$, ne conduce la concluzia că $m = 13$. **13.** a) 21 de băieţi; b) 30 de elevi. **14.** 2400 lei. **15.** a) $\frac{2}{11}$; b) $\frac{3}{4}$. **16.** Fie A, B şi C măsurile unghiurilor triunghiului considerat. Avem $\frac{A}{1} = \frac{B}{5} = \frac{C}{6} = \frac{A+B+C}{12} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$, deci $C = 6 \cdot 15^\circ = 90^\circ$. **17.** a) Din relaţia $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$ ($k \in \mathbb{Q}$, $n > 0$) obţinem $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$, deci $n = 3k \cdot \frac{3}{k} = 9 \in \mathbb{N}$; b) Având în vedere cele stabilite la punctul a), observăm că $\frac{a+c}{2} = \frac{2k+4k}{2} = 3k = b$. **18.** Avem $3a = 4b = 6c = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), de unde rezultă că $a = \frac{k}{3}$, $b = \frac{k}{4}$, $c = \frac{k}{6}$ şi k este multiplu de 12. Înlocuind în inegalitatea din enunţ, obţinem $\frac{2k}{3} + \frac{3k}{4} - \frac{4k}{6} < 15$, deci $k < 20$, de unde $k = 12$ (deoarece $k \vdots 12$). Deci, $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$. **19.** Din relaţiile $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ şi $b \cdot \frac{1}{6} = c \cdot \frac{1}{2}$ rezultă că $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{1}$. a) Avem $c = \frac{1}{2}a = 50\%a$; b) Înlocuind în egalitatea din ipoteză, obţinem $6c^2 + 3c^2 + 2c^2 = 176$, deci $c = 4$ şi $a = 8$, $b = 12$. **20.** a) Din egalitatea $\frac{\overline{ab}}{5} = \frac{\overline{bc}}{4}$, rezultă că $4\overline{ab} = 5\overline{bc}$, de unde obţinem $5 \mid \overline{ab}$, deci $b = 5$ (căci $b \neq 0$); b) Relaţia $4\overline{ab} = 5\overline{bc}$ este echivalentă cu $8a = 46 + c$, de unde rezultă că $a = 6$, $c = 2$. Avem $\overline{ab} = 65$, $\overline{bc} = 52$. **21.** a) 25; 9; b) 7,00. **22.** a) $210 - 165 = 45$; b) $p = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$. **23.** Deoarece $A = \{102, 111, 120,$

Editura Paralela 45

TESTE INIŢIALE

Testul 1. **I. 1.** B. **2.** C. **3.** B. **4.** B. **5.** D. **6.** A. **7.** D. **8.** C. **II. 1.** $x = 3$. **2.** $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$. **3.** $\sphericalangle CBD = 15°$. **4.** a) Deoarece triunghiul ABC este echilateral şi D este mijlocul lui BC, rezultă că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = 30°$. Triunghiul AOE este isoscel cu baza AE, căci $OA = OE$ (fiind raze ale cercului considerat), deci $\sphericalangle AOE = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$. Aşadar, arcul mic AE are măsura de 120°. Cum dreapta BC este perpendiculară în D pe raza OD, rezultă că cercul este tangent dreptei BC; b) Analog, obţinem că $m(\sphericalangle AOF) = 120°$. Din congruenţa triunghiurilor AOE şi AOF ($AO = AO$, $OE = OF$, $m(\sphericalangle AOE) = m(\sphericalangle AOF) = 120°$) deducem că $AE = AF$. Deoarece $AE = AF$ şi AD este bisectoarea unghiului EAF, rezultă că $AD \perp EF$ şi, cum avem şi $AD \perp BC$, înseamnă că $BC \parallel EF$.

Testul 2. **I. 1.** B. **2.** C. **3.** C. **4.** A. **5.** C. **6.** B. **7.** C. **8.** B. **II. 1.** $a = \frac{4}{3}$; $b = 2$; $c = \frac{8}{3}$. **2.** $A = \{-2, -1, 0, 1\}$; $S = -2$; $P = 0$. **3.** Ultima cifră a lui N este 3, deci restul cerut este 3. **4.** a) În triunghiul isoscel ABC, mediana bazei AM este atât înălţime, cât şi bisectoare. Triunghiul AMC este dreptunghic şi MN este mediana ipotenuzei, deci $AC = 2MN = 10$ cm; cu teorema lui Pitagora, $AM = 8$ cm. Atunci $\mathscr{P}_{ABC} = 2 \cdot 10 + 12 = 32$ cm; b) Triunghiul APN este isoscel şi AM este bisectoarea unghiului din vârf, prin urmare $AM \perp PN$.

Testul 2. **I. 1.** B. **2.** C. **3.** B. **4.** D. **5.** C. **6.** A. **7.** C. **8.** A. **II. 1.** $a = 7{,}5$ şi $b = 2{,}5$. **2.** 1125 lei. **3.** $P = (1 \cdot 24) \cdot (2 \cdot 12) \cdot (3 \cdot 8) \cdot (4 \cdot 6) = \left(2^3 \cdot 3\right)^4 = 2^{12} \cdot 3^4$. **4.** a) $\sphericalangle A = 180° - 2 \cdot \sphericalangle B = 108°$; b) Cum $DA = DC$ (D se află pe mediatoarea lui AC), avem $\sphericalangle DAC = \sphericalangle C = 36°$. Rezultă că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle DAC = 72°$, $\sphericalangle BDA = 180° - \sphericalangle B - \sphericalangle BAD = 72°$, deci triunghiul BAD este isoscel, cu $BA = BD$.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULŢIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect

1. 121, 144, 169, 196, 225, 400 şi 25600. **2.** 2^{10}, $2^6 \cdot 3^2$, $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $3^{22} \cdot 5^{14}$, $2^{2n} \cdot 7^{4n+2}$. **3.** $225 = 15^2$, $256 = 16^2$, $289 = 17^2$, $324 = 18^2$, $361 = 19^2$, $400 = 20^2$, $441 = 21^2$ şi $484 = 22^2$. **4.** a) $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, $81 = 9^2$, $100 = 10^2$, $900 = 30^2$; b) $5^4 = (5^2)^2$, $2^6 = (2^3)^2$, $12^{10} = (12^5)^2$, $6^{2n} = (6^n)^2$, $13^{4n+6} = (13^{2n+3})^2$. **5.** a) 5^2; b) 13^2; c) $(2 \cdot 3^3)^2$; d) $(2^5)^2$; e) $(2^3 \cdot 3^4)^2$; f) $(2^5 \cdot 3^4)^2$. **6.** a) 12^2; b) 25^2; c) $(3 \cdot 2^{25})^2$; d) $(2 \cdot 3^{24})^2$. **7.** Mulţimea $A = \{0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 30^2, 31^2\}$ are 32 de elemente. **8.** a) Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci $u(x^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$; b) Cum $u(5n + 2)$, $u(5n + 7) \in \{2, 7\}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $5n + 2$ şi $5n + 7$ nu sunt pătrate perfecte. **9.** Deoarece $u(3^{45}) = u(3^{44} \cdot 3) = u(81^{11} \cdot 3) = 3$ şi $u(2^{62}) = u(2^{60} \cdot 2^2) = u(16^{15} \cdot 4) = 4$, rezultă că $u(a) = 7$, deci a nu este pătrat perfect. **10.** a) 2, 8, 9, 14, 50; b) 2, 3^3, $2 \cdot 5^3$, $6^2 \cdot 3^4 = 2^2 \cdot 3^6$, $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; c) 2^n, 3^{2m}, $2^n \cdot 5^{3m}$, 7^{2n+1}, 2^{3m-2}; d) $2 \cdot 3^6$; $2^7 \cdot 3$; $2^4 \cdot 3^7$; $3 \cdot 7^{15}$; $2 \cdot 3^{10}$. **11.** a) 15, 21, 24; b) 42, 56, 84; c) 102, 225, 254. **12.** a) 5; b) 2; c) 5; d) 2; e) 20; f) 80; g) 2; h) 1. **13.** a) 6; b) 2; c) 8; d) 12; e) 48; f) 25; g) 13; h) $12 \cdot 7^5$. **14.** a) $x = 225$; b) $x = 258$; c) $x =$

Editura Paralela 45

Testul 3. **1.** O latură a foii are 8 cm $(16 \cdot 0{,}5)$. **2.** $n = 15 \in \mathbb{N}$. **3.** Cum $\sqrt{500} = 22{,}36...$, înseamnă că $a = 22$ este o aproximare mai bună decât $b = 23$. **4.** Deoarece $a = 8 + 3\sqrt{2}$, $b = 8 + 2\sqrt{5}$ şi $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$, rezultă că $a < b$. **5.** $x = \frac{25}{6}$. **6.** $a = \frac{7}{2} \in \mathbb{Q}$. **7.** $x = 7$, $y = -5$. **8.** a) $a^2 + b^2 = 8$ şi $a \cdot b = 1$; b) $x^2 = 6 \in \mathbb{N}$ şi $x + \sqrt{6} = 0 \in \mathbb{N}$.

CAPITOLUL II. ECUAŢII ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

II.1. Transformarea unei egalităţi într-o egalitate echivalentă. Identităţi

2. 68. **3.** 25. **4.** a) $3a + 2 = 5b \mid -3 \Rightarrow 3a - 1 = 5b - 3$; b) $3a + 2 = 5b \mid :15 \Rightarrow \frac{a}{5} + \frac{2}{15} = \frac{b}{3}$; c) $3a + 2 = 5b \mid \cdot b \Rightarrow 3ab + 2b = 5b^2$; d) $3a + 2 = 5b \mid \cdot 3a \Rightarrow 9a^2 + 6a = 15ab$. **5.** 0. **6.** $-2; -\frac{1}{2}; \frac{5}{6}$. **7.** -1. **8.** $\frac{2}{3}$. **9.** $-\frac{11}{14}$. **10.** Este falsă: $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$ şi $3 \neq 2$, $4 \neq 6$. **11.** 34. **12.** 30. **14.** 50; -45; 0. **15.** Scăzând egalităţile date, obţinem $a - c = 2c - 2a$, deci $a = c$, apoi $b = 2c - a = a$. **16.** Din $\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{a+d}{b+c} = 1$ rezultă $a = b$, $d = c$. **17.** a) $|2| = |-2|$ şi $2 \neq -2$; b) Din $a \cdot b \geq 0$ rezultă $a \geq 0$ şi $b \geq 0$ sau $a \leq 0$, $b \leq 0$. În primul caz, din $|a| = |b|$ rezultă $a = b$, iar în al doilea caz, rezultă $-a = -b$, deci $a = b$. **21.** Deoarece $a + b + c = 0$, rezultă că $a^2 + ab + ac = a(a + b + c) = 0$.

II.2. Ecuaţii de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii. Ecuaţii echivalente

2. a) $x - 2 = 0$; b) $4x + 3 = 0$; c) $5x - 2 = 0$; d) $6x + 1 = 0$. **3.** a) $x = 2$; b) $x = 2$; c) $x \in \varnothing$; d) $x \in \varnothing$; e) $x = 20$; f) $x = -\frac{1}{5}$. **4.** a) $\frac{3}{5}$; b) 3; c) 3; d) 8; e) 0; f) 3; g) 6; h) $\frac{2}{3}$. **5.** a) 3; b) -4; c) 3; d) -1. **6.** a) 1; b) -3; c) 1; d) $\frac{6}{7}$. **7.** a) $\frac{5}{14}$; b) 0; c) 2; d) -2. **8.** a) 4; b) 1; c) -3; d) $\frac{7}{20}$. **9.** a) 2; b) 1; c) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{6}$. **10.** a) $x = -2$; b) $x = -1$; c) $x = 3$; d) $x = -5$; e) $x = 5$. **11.** a) -6; b) -4; c) -2; d) 4. **12.** $A = \{5\}$; $B = \left\{\frac{1}{6}\right\}$; $A \cup B = \left\{\frac{1}{6}, 5\right\}$; $A \cap B = \varnothing$. **13.** Cum $A = \{2\}$, avem $B = \{2\}$ dacă şi numai dacă $(a + 2) \cdot 2 - a = 1$, deci $a = -3$. **14.** $4x - 1 \in \{-21, -7, -3, -1, 1, 3, 7, 21\}$; $A = \{-5, 0, 1, 2\}$. **15.** $x = \frac{2}{a-1}$, $a - 1 \in \{1, 2\}$, deci $a \in \{2, 3\}$. **16.** a) $x = 1$; b) $x = 2$. **17.** Ecuaţiile au soluţia $x = -\frac{1}{7}$. **18.** a) $a = 3$; b) $a = 2$. **19.** $(a, b) \in \{(-2, -4); (-14, 0); (28, 1); (7, 2); (4, 3); (1, 10)\}$. **20.** $(a, b) \in \{(-2, -2); (-1, -10); (0, 14); (1, 6)\}$. **21.** a) $x = 6$; b) $x = 3$.

II.3. Sisteme de două ecuaţii liniare cu două necunoscute

1. $\left(-1, -\frac{1}{5}\right)$; $(2, 1)$; $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. **2.** a) $y = 1$; b) $x = -3$; c) $y = -1$; d) $x = -11$. **3.** Cum $x = -y - \frac{2(y-1)}{5}$, alegem y astfel încât $y - 1$ să se dividă cu 5. Avem $(-1, 1)$, $(6, -4)$, $(-8, 6)$.

Editura Paralela 45

GEOMETRIE

CAPITOLUL IV. PATRULATERUL

IV.1. Patrulaterul convex

3. $\frac{1}{3}$. **4.** 10 m, 11 m, 12 m, 13 m. **5.** Lungimea traseului este 350 m, iar lungimea pasului este 70 cm. **6.** 27,5 cm. **7.** $\mathcal{P}_{ABCD} = 19$ cm. **10.** $\sphericalangle A = 150°$; $\sphericalangle B = 45°$; $\sphericalangle C = 105°$; $\sphericalangle D = 60°$. **11.** 90 °. **12.** 36°; 72°; 108°; 144°. **13.** 144°; 96°; 72°; 48°. **14.** a) Fie *ABCDE* un pentagon. Trasăm diagonalele *AC* şi *AD*. Avem $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E = (\sphericalangle BAC + \sphericalangle B + \sphericalangle BCA) + (\sphericalangle CAD + \sphericalangle ACD + \sphericalangle ADC) + (\sphericalangle DAE + \sphericalangle ADE + \sphericalangle E) = 180° + 180° + 180° = 540°$; b) Analog, obţinem rezultatul 720°. **15.** Se aplică teorema lui Pitagora în ΔBCD şi în ΔABD. Obţinem: $BD = 12$ cm, $AD = 9{,}6$ cm, $\mathcal{P}_{ABCD} = 34{,}8$ cm. **16.** Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA*. Obţinem: $AB = AD = 13$ cm, $BC = CD = 20$ cm; $\mathcal{P}_{ABCD} = 66$ cm. **17.** Punctele *A* şi *C* sunt egal depărtate de capetele segmentului *BD*, deci se află pe mediatoarea acestuia. **18.** În ΔABC, mediana *BM* este egală cu jumătate din latura pe care cade, prin urmare $\sphericalangle B = 90°$. Analog, $\sphericalangle D = 90°$. **19.** a) Punctele *A* şi *C* se află pe mediatoarea lui *BD*, deci $AB = AD$ şi $CB = CD$. Aplicăm L.L.L.; b) Triunghiurile *OAB* şi *BAC* sunt 90°–60°–30°, deci $AO = \frac{1}{2}AB = 3$ cm, $AC = 2AB = 12$ cm. Obţinem că $OC = 9$ cm. **20.** a) ΔABC este echilateral, deci $\sphericalangle BAC = 60°$, de unde $\sphericalangle CAD = 45°$. Din $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = 45°$ obţinem că $AC = CD$; b) Avem $BC = AC = CD$, aşadar ΔBCD este isoscel, cu unghiul din vârf $\sphericalangle C = 150°$. Găsim că $\sphericalangle DBC = 15°$. **21.** Notăm $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PAD = a$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = b$, $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle QCD = c$; atunci $2a + 2b + 2c = 360°$, deci $a + b + c = 180°$. Unghiul $\sphericalangle APC$ este exterior triunghiului *APD*, aşadar $\sphericalangle APC = a + b$. Deducem că $\sphericalangle QCP + \sphericalangle APC = c + (a + b) = 180°$, prin urmare $AP \parallel CQ$.

IV.2. Paralelogramul

1. 1200 m. **2.** $AD = 5$ cm, $AB = CD = 10$ cm. **3.** 10 dm. **4.** $\sphericalangle C = 48°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 132°$. **5.** $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 108°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 72°$. **6.** a) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 45°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 135°$; b) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 100°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 80°$. **7.** $AC = 8$ cm, $BD = 6$ cm. **8.** $\sphericalangle AOB = 100°$; $\sphericalangle BDC = 50°$; $\sphericalangle A = 70°$; $\sphericalangle B = 110°$. **9.** $BC = 5$ cm, $AB = CD = 10$ cm, $\sphericalangle C = 60°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 120°$. **10.** a) *D* este simetricul lui *B* faţă de mijlocul lui *AC*; b) *D* este simetricul lui *A* faţă de mijlocul lui *BC*. **13.** Avem $\sphericalangle BMP = \sphericalangle C$ (alt. int.) $\Rightarrow \sphericalangle BMP = \sphericalangle B \Rightarrow PM = PB$ şi, analog, $NM = NC$. Atunci $\mathcal{P}_{APMN} = AP + PM + NM + AN = AP + PB + CN + AN = AB + AC = 20$ cm. **14.** Notăm $PN \cap CD = \{S\}$; atunci *MNSD* şi *PQRS* sunt paralelograme, deci $MN + PQ = DS + SR = DR$, iar $NP + QR = NP + PS = NS = MD$, de unde rezultă concluzia. **15.** Fie *AP* şi *BP* bisectoare ale unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle B$ ale paralelogramului *ABCD*. Avem $\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBA = \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, de unde $\sphericalangle APB = 180° - 90° = 90°$. Fie *AE* şi *CF* bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A$, respectiv $\sphericalangle C$, $E \in DC$, $F \in AB$. Avem $\sphericalangle DEA = \sphericalangle EAB = \frac{1}{2}(\sphericalangle A) = \frac{1}{2}(\sphericalangle C) = \sphericalangle DCF$, deci $AE \parallel CF$. **16.** Fie *AP* şi *BP* cele două bisectoare, cu $P \in CD$. Cum $\sphericalangle DPA = \sphericalangle PAB$ (alt. int.) şi $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PAD$, deducem că $DA = DP$. Analog, $CP = CB$. Obţinem $\mathcal{P}_{ABCD} = 21$ cm. **17.** a) Segmentele *CD* şi *EF* sunt paralele şi egale; b) Folosim

Editura Paralela 45

având în vedere că $OP + PQ = 30$, obţinem $OP = 5$ cm şi $PQ = 25$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile OAP şi QBP, găsim $PA = 4$ cm şi $PB = 20$ cm, deci $AB = 24$ cm.

Capitolul VII. Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

VII.1. Proiecţii ortogonale pe o dreaptă

1. $F' = \{A, B\}$. **2.** $AB = 12$ cm sau $AB = 8$ cm. **3.** a) O; B; A; b) A; segmentul AO; c) segmentul AB. **4.** a) segmentul CD; b) segmentul AB; c) punctul D; d) punctul A; e) segmentul AD. **5.** 3 cm. **6.** $M(2, 0)$; $N(0, -3)$. **7.** 3, respectiv 2.

VII.2. Teorema înălţimii

1. a) $AD = 6$ cm; $BC = 13$ cm; b) $BC = 25$ cm; c) $AD = 12$ m, $BD = 9$ m. **2.** a) $AD = 2{,}4$ m; $BC = 8$ m; b) $AD = 10{,}5$ cm, $DC = 31{,}5$ cm; c) $BD = 6{,}75$ cm. **3.** a) $AD = 6$ cm; b) $CD = 2$ cm; c) $BC = 12$ cm. **4.** 30 m. **5.** 150 cm². **6.** $AD = \sqrt{440}$ m $< \sqrt{441}$ m $= 21$ m. **7.** 12 cm; 156 cm². **8.** $AE = 12$ cm, $EF = 27$ cm. **9.** Fie $AE \perp DC$ şi $BF \perp DC$, $E, F \in CD$; atunci $AE = FC = 6$ cm, $BF = 12$ cm, $\mathcal{A}_{ABCD} = 288$ cm². **10.** $\mathcal{A}_{ABC} = 2\sqrt{3}$ cm² şi $3{,}4 < 2\sqrt{3} < 3{,}5 \Leftrightarrow 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}75$, adevărat. **11.** a) $AC \parallel DE$ şi $DC \parallel AE$; b) $DE \parallel AC$, $AC \perp BD \Rightarrow DE \perp BD$; c) $AD^2 = AE \cdot AB \Rightarrow AD = 6$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{(AB+CD)\cdot AD}{2} = 39$ cm². **12.** AD este înălţime în ΔABC, D este între B şi C, iar $AD^2 = BD \cdot DC$, deci ΔABC este dreptunghic în A. **13.** Dacă AB şi AC ar fi perpendiculare, atunci ar trebui ca $AD^2 = BD \cdot CD$, fals. **14.** $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ADC = 90°$, deci triunghiul ABC nu este dreptunghic. Nu putem aplica reciproca teoremei înălţimii, deoarece D nu este între B şi C.

VII.3. Teorema catetei

1. a) $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm; b) $CD = 9$ cm, $AC = 6\sqrt{3}$ cm; c) $AB = 3\sqrt{5}$ cm. **2.** a) $AB = 21$ cm, $AC = 28$ cm; b) $DC = 19{,}2$ cm, $AC = 24$ cm; c) $BD = \dfrac{27}{200}$ m, $AB = \dfrac{9}{40}$ m. **3.** a) $AB = 6\sqrt{2}$ cm; $AC = 3\sqrt{10}$ cm; b) $CD = 2$ cm, $AC = 4$ cm; c) $BD = 4\sqrt{3}$ cm, $AB = 2\sqrt{15}$ cm. **4.** $BD = 24$ cm, $AC = 6\sqrt{5}$ cm; $AB = 12\sqrt{5}$ cm. **5.** $BC = 36$ cm, $AD = 8\sqrt{2}$ cm, $AC = 24\sqrt{2}$ cm. **6.** $CD = 8$ cm, $AC = 4\sqrt{13}$ cm, $AB = 6\sqrt{13}$ cm. **7.** $10\sqrt{13}$ cm. **8.** Dacă $DF \perp AB$, $CE \perp AB$, $E, F \in AB$, atunci $AF = EB = 4$ cm, $CE = 6$ cm, $BC = 2\sqrt{13}$ cm. $\mathcal{P}_{ABCD} = (4\sqrt{13} + 18)$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = 54$ cm². **9.** $AE = 2$ cm, $BE = 1$ cm, $BD = \sqrt{3}$ cm, $CD = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 3\sqrt{2}$ cm. **10.** $BC = 20$ cm. **11.** $BD = 2$ cm, $DC = 3$ cm, $AD = \sqrt{6}$ cm, $AC = \sqrt{15}$ cm. **12.** $AC = 2 \cdot AO = 40$ cm, $BD = 2 \cdot OB = 30$ cm. **13.** $BD = 16$ cm, $CD = 9$ cm, $AD = 12$ cm, $DE = \dfrac{27}{4}$ cm, $CE = \dfrac{45}{4}$ cm. **14.** Din $AB^2 = BD \cdot BC$ rezultă $\sphericalangle BAC = 90°$; $AC = 3\sqrt{5}$ cm. **15.** Ducem $AD \perp BC$, D mijlocul lui BC. Din $AC^2 = CD \cdot CE$ rezultă $CE = 50$ cm. Astfel, $ED = 32$ cm şi atunci din $AD^2 = ED \cdot DC$ obţinem $AD = 24$ cm. De asemenea, $AE^2 = ED \cdot EC$, deci $AE = 40$ cm. Rezultă $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 432$ cm² şi $\mathcal{P}_{ACE} = 120$ cm. **16.** a) AE este diametru; b) $R = 6{,}25$ cm. **17.** ΔABC este dreptunghic în C. Deducem $AC = 15$ cm, $BC = 20$ cm. $\mathcal{P}_{ABC} = 60$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 150$ cm². **18.** $\mathcal{P}_{OACB} = 70$ cm, $\mathcal{A}_{OACB} = 300$ cm². **19.** $OM^2 = MN \cdot MP$ şi folosim reciproca teoremei înălţimii. **20.** a) Observăm că $OC^2 = OM \cdot OB$ şi din reciproca

Editura Paralela 45

Cuprins

Editura Paralela 45

CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

GEOMETRIE

CAPITOLUL IV. PATRULATERUL

CAPITOLUL V. CERCUL

CAPITOLUL VI. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

Editura Paralela 45

Editura Paralela 45