

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programă școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Ramona Rossall

Tehnoredactare: Iuliana Ene

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION

Matematică – algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru – 7 /

Ion Tudor. – Ed. a 8-a. – Pitești : Paralela 45, 2024

2 vol.

ISBN 978-973-47-4114-4

Partea 2. – 2024. – ISBN 978-973-47-4193-9

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2024

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

7

Ediția a VIII-a

Editura Paralela 45

ALGEBRĂ

Capitolul II

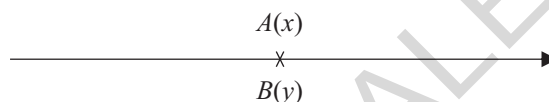
ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități



Citesc și rețin

Numerele reale x și y sunt egale, dacă punctele de pe axa numerelor care au coordonatele x , respectiv y sunt identice ($A(x) = B(y)$).



Pe mulțimea numerelor reale, relația de egalitate are următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Simetrie: dacă $x = y$, atunci și $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Tranzitivitate: dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

În $\mathbb{R}$, o egalitate se transformă într-o egalitate echivalentă, dacă:

– se adună sau se scade din ambii membri ai egalității același termen:

$$x = y \Leftrightarrow x + z = y + z; x = y \Leftrightarrow x - z = y - z;$$

– se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității cu același factor nenul:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z; x = y \Leftrightarrow x : z = y : z.$$

De asemenea, dacă se adună, se scad, se înmulțesc sau se împart membru cu membru două egalități, se obține tot o egalitate.

Dacă $x = y$ și $z = t$, atunci $x + z = y + t$, $x - z = y - t$, $x \cdot z = y \cdot t$ și $x : z = y : t$ ($z \neq 0, t \neq 0$).

Definiție: O egalitate care conține una sau mai multe variabile și care este adevărată pentru orice valori atribuite acestora se numește **identitate**.



Cum se aplică?

1. Știind că $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, arătați că $x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31$.

Soluție:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = y \cdot 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31.$$

Exerciții și probleme de dificultate medie

6. Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, cu proprietatea $6x = 2\sqrt{3}y$. Arătați că:

a) $2\sqrt{3}x = 2y$; b) $\sqrt{3}x = y$; c) $\sqrt{6}x = \sqrt{2}y$.

7. Dacă a, b, c și d sunt numere reale care îndeplinesc condițiile $10a = 15b$ și $35c = 28d$, arătați că $2a + 5c = 3b + 4d$.

8. Se consideră numerele $a, b \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condițiile $\sqrt{3}a^3 = \sqrt{6}b$ și $2\sqrt{3}a = \sqrt{6}b^3$. Arătați că $|a| = |b|$.

9. Verificați identitățile:

a) $xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$; b) $xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$.

10. Verificați identitățile:

a) $\frac{1}{2}xy + x + y + 2 = \frac{1}{2}(x + 2)(y + 2)$; b) $\frac{1}{3}xy - x - y + 3 = \frac{1}{3}(x - 3)(y - 3)$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

11. Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, care îndeplinesc condițiile $a + b + c = 1$ și $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0$. Arătați că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.

12. Se consideră numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condițiile $x \cdot y \cdot z = 1$ și $\frac{x^2 + yz}{1 + x^3} + \frac{y^2 + zx}{1 + y^3} + \frac{z^2 + xy}{1 + z^3} = 0$. Arătați că: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$. Arătați că:

a) $x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $\frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$.

(3p) 2. Se consideră numerele reale z și t , care îndeplinesc condiția $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y$. Arătați că $\sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$.

(3p) 3. Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condițiile $4a = 5b$ și $14c = 10d$. Arătați că $12a + 7c = 15b + 5d$.

Lecția 2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$



Citesc și rețin

O ecuație de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și $x \in \mathbb{R}$ (1), se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută**.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numește **soluție a ecuației** (1), dacă $au + b = 0$ (u verifică ecuația).

A rezolva ecuația (1) înseamnă a determina **mulțimea de soluții**

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au + b = 0\}.$$

Definiție: Două ecuații de gradul I cu o necunoscută se numesc **echivalente**, dacă au aceeași mulțime de soluții.

Pentru a rezolva ecuația (1) putem folosi proprietățile relației de egalitate pe $\mathbb{R}$.



Cum se aplică?

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ următoarele ecuații:

a) $-20x = -35$;

b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6}$.

Soluție:

$$\text{a) } -20x = -35 \Leftrightarrow x = \frac{-35}{-20} \Leftrightarrow x = +\frac{35^{(5)}}{20} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = 1\frac{3}{4};$$

$$\text{b) } 3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \frac{-6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}.$$

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $1,5 + 0,6x = 2$;

b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{a) } 1,5 + 0,6x = 2 &\Leftrightarrow 0,6x = 2 - 1,5 \Leftrightarrow 0,6x = 0,5 \Leftrightarrow \frac{6^{(3)}}{9}x = \frac{5^{(5)}}{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2} &\Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = \sqrt{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = (8\sqrt{6}) : (2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3. Rezolvați ecuația $\frac{3x}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2(7x+5)}{15}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \frac{6^{(3)}3x}{5} - \frac{15^{(15)}1}{2} &= \frac{2^{(2)}2(7x+5)}{15} \Leftrightarrow 18x - 15 = 4(7x+5) \Leftrightarrow 18x - 15 = 28x + 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 18x - 28x = 20 + 15 \Leftrightarrow -10x = 35 \Leftrightarrow x = \frac{35^{(5)}}{-10} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$



1. Verificați dacă numărul real 4 este soluție pentru fiecare dintre următoarele ecuații, apoi completați caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”:

c) $x : (-2) = 2.$

[illegible]

c) $2\frac{1}{2} + x = 2$.

[illegible]

c) $\sqrt{6}x - \sqrt{2} = \sqrt{2}.$ ☐

[illegible]

h) $-15x = -9$.

[illegible]

h) $x - 6 = -5$.

Lecția 4. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute



Citesc și rețin

Definiție:

O ecuație de forma $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ și $x, y \in \mathbb{R}$ (1), se numește **ecuație liniară cu două necunoscute**.



Definiție:

Perechea ordonată $(u; v)$, unde $u, v \in \mathbb{R}$, se numește **soluție a ecuației** (1), dacă $au + bv + c = 0$ (u și v verifică ecuația). Ecuația (1) are o infinitate de soluții.

Definiție:

Ansamblul a două ecuații liniare cu două necunoscute x și y , scris sub forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}, \text{ unde } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ (2), se numește}$$



sistem de două ecuații cu două necunoscute.

Definiție:

Perechea ordonată $(u; v)$, unde $u, v \in \mathbb{R}$, se numește **soluție a sistemului** (2), dacă $a_1u + b_1v + c_1 = 0$ și $a_2u + b_2v + c_2 = 0$.

A rezolva sistemul de ecuații (2) înseamnă a determina mulțimea soluțiilor sale. Mulțimea soluțiilor unui sistem se notează cu S .

Mulțimea soluțiilor S ale sistemului de ecuații (2) este intersecția mulțimilor de soluții ale ecuațiilor componente.

Definiție:

Două sisteme de ecuații se numesc **echivalente**, dacă au aceeași mulțime a soluțiilor.

A. Rezolvarea sistemului (2) prin metoda substituției

Etapele principale ale rezolvării sistemului (2) prin metoda substituției sunt:

- exprimarea uneia dintre necunoscute dintr-o ecuație în funcție de cealaltă necunoscută;
- substituirea necunoscutei respective în cealaltă ecuație a sistemului, care devine astfel o ecuație cu o singură necunoscută;
- rezolvarea ecuației cu o necunoscută;
- aflarea celeilalte necunoscute și determinarea mulțimii soluțiilor sistemului.



Cum se aplică?

1. Rezolvați prin metoda substituției sistemul de ecuații $\begin{cases} x = 7y \\ 2x - y = 13 \end{cases}$.

Soluție:

$$\begin{cases} x = 7y \\ 2 \cdot 7y - y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ 14y - y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ 13y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ deci } S = \{(7; 1)\}.$$

2. Rezolvați prin metoda substituției sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$.

Soluție:

$$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ 5x + 4(-3x - 2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ 5x - 12x - 8 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ -7x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ x = -\frac{14}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = -2 \end{cases}, \text{ deci } S = \{(-2; 4)\}.$$

3. Rezolvați prin metoda substituției sistemul de ecuații $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$.

Soluție:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y}{5} \\ 3 \cdot \frac{2y}{5} - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y}{5} \\ \frac{6y}{5} - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y}{5} \\ 6y - 10y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y}{5} \\ -4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y}{5} \\ y = -\frac{20}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y}{5} \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \cdot (-5)}{5} \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}, \text{ deci } S = \{(-2; -5)\}.$$

B. Rezolvarea sistemului (2) prin metoda reducerii

Etapele principale ale rezolvării sistemului (2) prin metoda reducerii sunt:

- înmulțirea fiecărei ecuații cu câte un număr, astfel încât prin adunarea ecuațiilor obținute termenii care conțin una dintre necunoscute să se reducă;
- rezolvarea ecuației obținute după reducerea uneia dintre necunoscute;
- reducerea celeilalte necunoscute în mod asemănător sau aflarea acesteia prin metoda substituției și determinarea mulțimii soluțiilor sistemului.



Cum se aplică?

1. Rezolvați prin metoda reducerii sistemul de ecuații $\begin{cases} -x + y = -4 \\ x + 7y = 12 \end{cases}$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + y = -4 \\ x + 7y = 12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 8y = 8 \\ x + 7y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{8} \\ x + 7y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + 7 \cdot 1 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + 7 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 12 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 5 \end{cases}, \text{ deci } S = \{(5; 1)\}. \end{aligned}$$

2. Rezolvați prin metoda reducerii sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x - 2y - 3 = 0 \\ 14x - 3y = -5 \end{cases}$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 2y - 3 = 0 \\ 14x - 3y = -5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 14x - 3y = -5 \end{cases} \cdot \begin{matrix} (-3) \\ 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 6y = -9 \\ 28x - 6y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x = -19 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{19}{19} \\ 3x - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 3 \cdot (-1) - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -3 - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -2y = 3 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}, \text{ deci } S = \{(-1; -3)\}. \end{aligned}$$

3. Rezolvați prin metoda reducerii sistemul de ecuații $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = 4 \\ 8x + 3y = -\sqrt{2} \end{cases}$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}y = 4 \\ 8x + 3y = -\sqrt{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{y\sqrt{2}}{2} = 4 \\ 8x + 3y = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{y\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{2} \\ 8x + 3y = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{2} = 8 \cdot 3 \\ 8x + 3y = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y = 24 \\ 8\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11\sqrt{2}x = 22 \\ 8x + 3y = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{11\sqrt{2}} \\ 8x + 3y = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot 2 \\ 8x + 3y = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}}{2} \\ 8x + 3y = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} + 3y = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Fișă pentru portofoliul elevului

Numele și prenumele:

Clasa a VII-a

Capitolul: Ecuații și sisteme de ecuații liniare

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziția este adevărată, subliniați litera A, iar dacă propoziția este falsă, subliniați litera F.

(7p) 1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, atunci $\sqrt{5}x = y\sqrt{5}$. A F

(7p) 2. Soluția ecuației $\frac{1}{7} + x = \frac{8}{7}$, unde $x \in \mathbb{R}$, este $x = 1$. A F

(7p) 3. Mulțimea $S = \{(3; -2)\}$ este soluția sistemului $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$. A F

II. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) 1. Frațiile ordinare $\frac{n+1}{6}$ și $\frac{2}{3}$, $n \in \mathbb{N}$, sunt echivalente pentru $n = \dots\dots\dots$.

(7p) 2. Știind că, după o ieftinire cu 5%, o rachetă de tenis de câmp costă 152 lei, înseamnă că prețul rachetei înainte de ieftinire era de $\dots\dots\dots$ lei.

(7p) 3. Soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ este perechea de numere reale $(x; y) = \dots\dots\dots$.

III. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) 1. Un sfert dintr-un număr este cu 3,5 mai mic decât trei cincimi din numărul respectiv. Numărul este egal cu:

A. 15; B. 28; C. 10; D. 12.

(8p) 2. Rotunjind la prima zecimală soluția ecuației $3 - \sqrt{6}x = 3\sqrt{2} - \sqrt{3}x$, unde $x \in \mathbb{R}$, obținem numărul:

A. 1,7; B. 1,4; C. 2,5; D. 3,2.

(8p) 3. Într-o clasă sunt 28 de elevi. Știind că numărul fetelor este cu 5 mai mic decât dublul numărului băieților, atunci numărul băieților este egal cu:

A. 10; B. 15; C. 12; D. 11.

IV. Radu a cheltuit o sumă de bani în 3 zile. În prima zi a cheltuit $\frac{3}{8}$ din sumă, în ziua următoare a cheltuit $\frac{8}{9}$ din suma cheltuită în ziua precedentă, iar în ultima zi a cheltuit restul de 175 lei. Calculați suma de bani cheltuită de Radu a doua zi.

LA 45

V. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{3y}{\sqrt{3}} = 2 \\ \frac{x + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{y - 2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \end{cases}, \text{ unde } x, y \in \mathbb{R}.$$

(8p) b) Comparați numerele reale x și y .

[illegible]

Capitolul III

ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

Lecția 6. Produsul cartezian a două mulțimi nevide



Citesc și rețin

Definiție: Produsul cartezian a două mulțimi nevide A și B , notat $A \times B$, este mulțimea formată cu perechile ordonate (a, b) , unde $a \in A$ și $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}.$$

Observații:

1. $(a, b) \neq (b, a)$, dacă $a \neq b$.
2. $A \times B \neq B \times A$, dacă $A \neq B$.

Teoremă: Dacă $\text{card } A = m$ și $\text{card } B = n$, atunci $\text{card}(A \times B) = m \cdot n$.



Cum se aplică?

1. Se consideră mulțimile $A = \{d, f\}$ și $B = \{p, b\}$. Determinați mulțimea $A \times B$.

Soluție:

$$A \times B = \{(d, p), (d, b), (f, p), (f, b)\}.$$

2. Determinați mulțimile $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ și $D \setminus C$, știind că $D \times C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$.

Soluție:

Din $D \times C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$ rezultă că $D = \{0, 3\}$ și $C = \{0, 1, 3, 5\}$, prin urmare $C \cup D = \{0, 1, 3, 5\}$, $C \cap D = \{0, 3\}$, $C \setminus D = \{1, 5\}$ și $D \setminus C = \emptyset$.

3. Se consideră mulțimile $E = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\}$ și $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid |y| < 2\}$.

- a) Enumerați elementele mulțimilor E și F .
- b) Determinați mulțimile $E \times F$ și $F \times E$.

Soluție:

$$\text{a) } E = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\} = \{1, 2\}, F = \{y \in \mathbb{Z} \mid |y| < 2\} = \{-1, 0, 1\};$$

$$\text{b) } E \times F = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\};$$
$$F \times E = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}.$$



1. Cititi următoarele notații:

- 2.** Se consideră mulțimile $A = \{3\}$ și $B = \{4, 5\}$. Determinați mulțimea $A \times B$.

3. Se consideră mulțimile $C = \{a, b\}$ și $D = \{d, f\}$. Determinați mulțimea $C \times D$.

4. Enumerați elementele mulțimilor $A \times B$ și $B \times A$ în fiecare dintre cazurile:

- 5.** Se consideră mulțimile $A = \{6, 7\}$ și $B = \{4, 8, 9\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

6. Se consideră mulțimile $E = \{g, h, i\}$ și $F = \{m, n\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- 7.** Determinați card $C \times D$ în următoarele cazuri:

16. Se consideră mulțimile $E = \{y \mid \overline{xy} \text{ este număr prim}\}$ și $F = \{c \mid \overline{abc} \text{ este pătrat perfect}\}$. Determinați card $E \times F$.

17. Se consideră mulțimile $A = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = b^2, a \neq 0\}$ și $B = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} = z^3, x \neq 0\}$. Efectuați $B \times A$.

18. Enumerați elementele mulțimii $A \times B$, știind că mulțimile A și B îndeplinesc simultan condițiile:

- i) $A \cup B = \{b, c, d\}$; ii) $A \cap B = \{b, d\}$; iii) $A \setminus B = \emptyset$.

19. Determinați mulțimea $E \times F$, pentru mulțimile E și F care îndeplinesc simultan condițiile:

- i) $E \cap F = \{4, 5\}$; ii) $E \setminus F = \emptyset$; iii) $F \setminus E = \{7, 8\}$.

20. Determinați mulțimea $E \times D$, știind că mulțimile D și E îndeplinesc simultan condițiile:

- i) $D \cup E = \{d, g, p, t\}$; ii) $D \setminus E = \emptyset$; iii) $E \setminus D = \{d, t\}$.

21. Se consideră mulțimile A și B . Dacă card $A \cap B = 5$, card $A \setminus B = 2$ și card $B \setminus A = 3$, calculați card $A \times B$.

22. Se consideră mulțimile E și F . Dacă card $E \cup F = 9$, card $E \setminus F = 1$ și card $F \setminus E = 4$, determinați card $F \times E$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

23. Determinați card $E \times F$, unde $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |1 - 2x| \leq 3\}$ și $F = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+7}{2x+3} \in \mathbb{N}\right\}$.

24. Se consideră mulțimile $A = \{3n - 2, n + 5, 5n + 4\}$ și $B = \{3n - 1, n + 4, 4n + 7\}$. Determinați numărul întreg n , știind că $A \times B = B \times A$.

25. Determinați card $A \times B$ pentru mulțimile:

$$A = \{\overline{abc} \mid \sqrt{a+b+c} \in \mathbb{N}^* \text{ și } \sqrt{a \cdot b \cdot c} \in \mathbb{N}^*\} \text{ și } B = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} = (1+2+3+\dots+yz) - 5x\}.$$



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) **1.** Se consideră mulțimile $E = \{2, 4\}$ și $F = \{4, 5, 6\}$. Determinați mulțimile:
a) $E \times F$; b) $F \times E$.
- (3p) **2.** Determinați mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$, știind că $A \times B = \{(x, y), (x, t), (y, y), (y, t), (z, y), (z, t), (t, y), (t, t)\}$.
- (3p) **3.** Se consideră mulțimile $E = \{x \mid 2 \mid \overline{7x} \text{ și } 4 \nmid \overline{7x}\}$ și $F = \{y \mid 3 \mid \overline{8y5} \text{ și } 9 \nmid \overline{8y5}\}$. Efectuați $F \times E$.

Lecția 7. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale



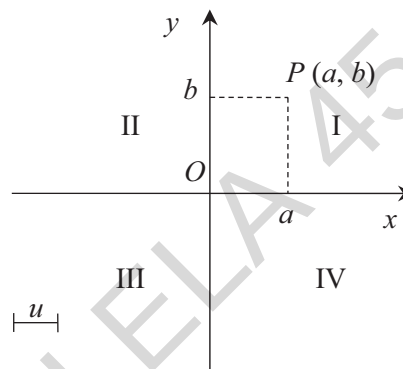
Citesc și rețin

Definiție: Prin **sistem de axe ortogonale** înțelegem figura formată din două axe ale numerelor, care sunt perpendiculare și care au drept origine punctul lor de intersecție.

În figura alăturată, xOy este un sistem de axe ortogonale cu originea în punctul O . Dreapta Ox se numește **axa absciselor**, dreapta Oy se numește **axa ordonatelor**, iar segmentul de lungime u a fost ales drept unitate de măsură.

Sistemul de axe ortogonale xOy împarte planul în patru părți numite **cadre**, notate cu cifrele romane I, II, III și IV ca în figură.

Fiecărei perechi de numere $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ îi asociem ca în figură un punct P , notat $P(a, b)$ și care se citește „punctul P de abscisă a și ordonată b ” sau „punctul P de coordonate a și b ”.



Observație: Fie M mijlocul segmentului AB . Dacă $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$, atunci

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

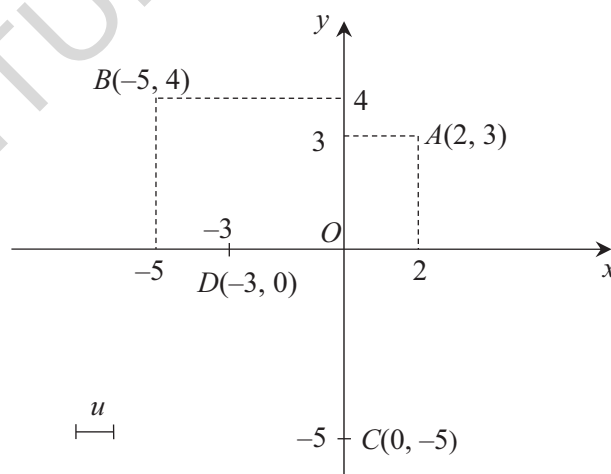


Cum se aplică?

1. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy următoarele puncte:

- a) $A(2, 3)$; b) $B(-5, 4)$; c) $C(0, -5)$; d) $D(-3, 0)$.

Soluție:



2. Notăm cu M mijlocul segmentului EF . Considerând punctele $M(-1, 4)$ și $F(2, -3)$, determinați coordonatele punctului E .

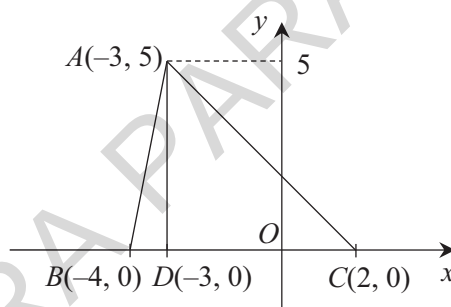
Soluție:

Notăm cu x și cu y abscisa, respectiv ordonata punctului E . Deoarece $M(-1, 4)$ și $M\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+(-3)}{2}\right)$, rezultă că $\frac{x+2}{2} = -1$ și $\frac{y+(-3)}{2} = 4$. Din $\frac{x+2}{2} = -1$ rezultă $x+2 = -2$, de unde obținem $x = -4$. Din $\frac{y+(-3)}{2} = 4$ rezultă $y+(-3) = 8$, de unde obținem $y = 11$. Prin urmare, $E(-4, 11)$.

3. Reprezentați în sistemul de axe ortogonale xOy punctele $A(-3, 5)$, $B(-4, 0)$ și $C(2, 0)$ și apoi calculați aria triunghiului ABC .

Soluție:

Observăm că $BC = |BO| + |OC| = |-4| + |2| = 4 + 2 = 6u$, iar înălțimea corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC este segmentul AD a cărui lungime reprezintă ordonata punctului A , prin urmare $AD = 5u$; $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{6u \cdot 5u}{2} = 15u^2$.



Știi să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

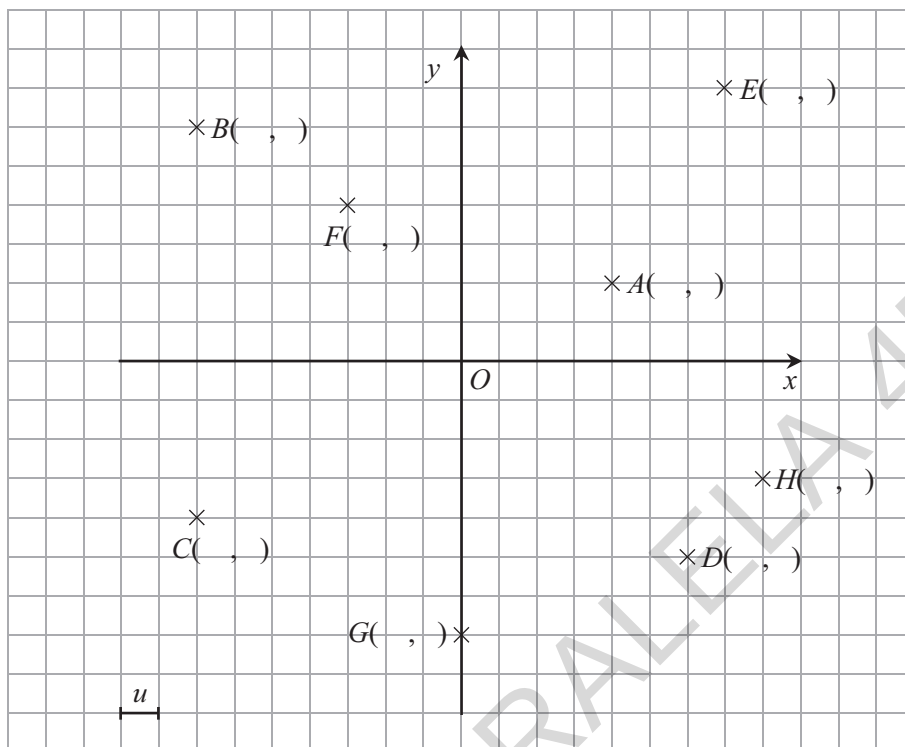
1. Citiți următoarele propoziții:

- a) $A(2, \sqrt{5})$; b) $D(-7, 1)$; c) $G(4, -9)$; d) $E(-2, -3)$.

2. Numiți ordonata și abscisa pentru fiecare dintre punctele:

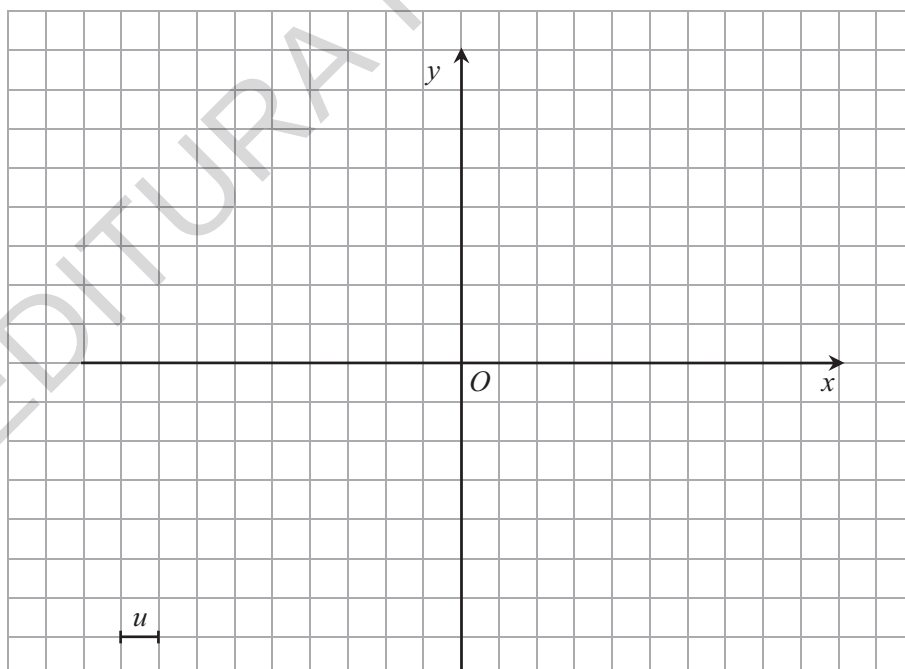
- a) $M(0, \sqrt{2})$; b) $E(-1, 3)$; c) $B(7, \sqrt{6})$; d) $N(-2, -1)$.

3. În figura următoare sunt reprezentate punctele A, B, C, D, E, F, G și H în sistemul de axe ortogonale xOy . Completați parantezele cu coordonatele punctelor respective:



4. Reprezentați în sistemul de axe ortogonale xOy punctele:

- | | | | |
|------------------|-----------------|-----------------|------------------|
| a) $A(2, 3)$; | b) $B(3, 5)$; | c) $C(-2, 4)$; | d) $D(-5, 2)$; |
| e) $E(-6, -1)$; | f) $F(-7, 6)$; | g) $G(8, -4)$; | h) $H(-4, -5)$. |



GEOMETRIE

Capitolul III

ASEMĂNAREA TRIUNGHILOR

Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante



Citesc și rețin

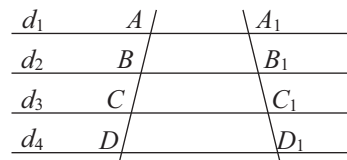
Definiție: Raportul a două segmente este **raportul lungimilor** lor exprimate în aceleași unități de măsură.

Definiție: Segmentele $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ și $E_1F_1, E_2F_2, \dots, E_nF_n$ se numesc **proporționale** dacă rapoartele lungimilor lor, exprimate cu aceleași unități de măsură, formează șirul de rapoarte egale:

$$\frac{A_1B_1}{E_1F_1} = \frac{A_2B_2}{E_2F_2} = \dots = \frac{A_nB_n}{E_nF_n}.$$

Teorema paralelelor echidistante: Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci acestea determină pe orice secantă segmente congruente.

$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4, AB \equiv BC \equiv CD \Rightarrow \\ \Rightarrow A_1B_1 \equiv B_1C_1 \equiv C_1D_1.$$



Cum se aplică?

1. Determinați raportul segmentelor AB și EF cu lungimile de 4 cm, respectiv 140 mm.

Soluție:

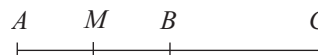
Exprimăm lungimea segmentului EF în centimetri: $EF = 140 \text{ mm} = 140 : 10 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$, deci $\frac{AB}{EF} = \frac{4 \text{ cm}}{14 \text{ cm}} = \frac{2}{7}$.

2. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B și C , în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC$ și notăm cu M mijlocul segmentului AB . Arătați că segmentele AM, MB, AB și BC sunt proporționale.

Soluție:

Notăm $AB = 2x$, deci $BC = 2x, AM = x$ și $MB = x$;

$$\frac{AM}{AB} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \text{ și } \frac{MB}{BC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}, \text{ prin urmare } \frac{AM}{AB} = \frac{MB}{BC}.$$



Aflați rapoartele: $\frac{DF}{DE}$, $\frac{DE}{EF}$ și $\frac{EF}{DF}$.

A horizontal line segment with three points marked by vertical tick marks. The points are labeled E , D , and F from left to right. E is at the left end, D is in the middle, and F is at the right end.



Exerciții și probleme de dificultate minimă

3. Determinați raportul segmentelor AB și CD în următoarele cazuri:

[illegible]

Matematică. Clasa a VII-a

5. Determinați raportul segmentelor AB și CD în următoarele cazuri:

- a) $AB = 15 \text{ m}$ și $CD = 2,4 \text{ dam}$; b) $AB = 28 \text{ m}$ și $CD = 0,08 \text{ hm}$;
c) $AB = 6 \text{ dam}$ și $CD = 450 \text{ dm}$; d) $AB = 72 \text{ dm}$ și $CD = 450 \text{ cm}$.

[illegible]

6. Arătați că segmentele AB , CD , EF și MN sunt proportionale, știind că:

- a) $AB = 12$ cm, $CD = 9$ cm, $EF = 28$ cm și $MN = 21$ cm;
b) $AB = 8$ cm, $CD = 25$ cm, $EF = 20$ cm și $MN = 10$ cm.

b)

Exerciții și probleme de dificultate medie

7. Dacă notăm cu M mijlocul segmentului AB și cu P mijlocul segmentului AM , aflați rapoartele:

- a) $\frac{AM}{AB}$; b) $\frac{AP}{AB}$; c) $\frac{PB}{AM}$; d) $\frac{AB}{PB}$.

8. Punctul C este mijlocul segmentului AB , iar punctul D este interior segmentului BC astfel încât $BC = 3BD$. Aflați:

- a) $\frac{BD}{BC}$; b) $\frac{DC}{DA}$; c) $\frac{CD}{AB}$; d) $\frac{AB}{AD}$.

9. Punctul M este interior segmentului AB . Dacă:

- a) $\frac{MA}{MB} = \frac{4}{5}$, aflați $\frac{MB}{MA}, \frac{MA}{AB}, \frac{AB}{MB}$; b) $\frac{MA}{AB} = \frac{2}{7}$, aflați $\frac{AB}{AM}, \frac{MB}{MA}, \frac{MB}{AB}$.

10. Se consideră triunghiul echilateral ABC și punctele E_1, E_2 interioare laturii AB , astfel încât $AE_1 \equiv E_1E_2 \equiv E_2B$. Paralelele la dreapta BC , construite prin punctele E_1 și E_2 , intersectează latura AC în punctele F_1 , respectiv F_2 . Știind că $AF_1 = 7,5$ cm, calculați $\mathcal{P}_{ABC}$.

11. Pe o dreaptă considerăm punctele A, B, C și D , în această ordine, astfel încât $AB \equiv BC \equiv CD$ și notăm cu M mijlocul segmentului AB . Arătați că:

- a) segmentele AB , MB , AD și MC sunt proporționale;
b) segmentele DB , DA , BC și MC sunt proporționale.

12. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, și punctele M_1, M_2, M_3 interioare laturii AD , astfel încât $AM_1 \equiv M_1M_2 \equiv M_2M_3 \equiv M_3D$. Paralelele la dreapta AB , construite prin punctele M_1, M_2 și M_3 , intersectează latura BC în punctele N_1, N_2 , respectiv N_3 . Dacă $AD = 16$ cm și $BC = 20$ cm, calculați lungimile segmentelor:

- a) AM_1, M_1M_2, M_2M_3 si M_3D ; b) BN_1, N_1N_2, N_2N_3 si N_3C .

Lecția 4. Triunghiuri asemenea

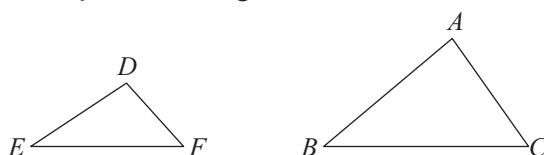


Citesc și rețin

Definiție: Triunghiurile DEF și ABC se numesc **triunghiuri asemenea** dacă:

$$\sphericalangle D \equiv \sphericalangle A, \sphericalangle E \equiv \sphericalangle B, \sphericalangle F \equiv \sphericalangle C \text{ și } \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA}.$$

Notăm $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ și citim: triunghiul DEF este asemenea cu triunghiul ABC .



Definiție: Dacă $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, atunci oricare dintre rapoartele $\frac{DE}{AB}, \frac{EF}{BC}, \frac{FD}{CA}$ se numește **raportul de asemănare** a celor două triunghiuri.

Teoremă: Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \sim \triangle DEF \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = k \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}} = k^2$$



Cum se aplică?

1. Știind că $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, $\sphericalangle D = 43^\circ$ și $\sphericalangle E = 62^\circ$, determinați $\sphericalangle C$.

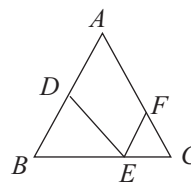
Soluție:

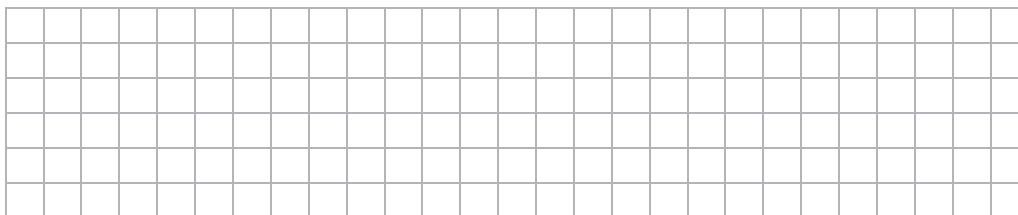
Deoarece $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, rezultă că $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle C$. În triunghiul DEF avem: $\sphericalangle D + \sphericalangle E + \sphericalangle F = 180^\circ$, deci $43^\circ + 62^\circ + \sphericalangle F = 180^\circ$, de unde rezultă că $\sphericalangle F = 75^\circ$, prin urmare $\sphericalangle C = 75^\circ$.

2. Se consideră $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, raportul lor de asemănare fiind $\frac{2}{3}$. Știind că $DE = 14$ cm, $EF = 18$ cm și $FD = 22$ cm, calculați AB , BC și CA .

Soluție:

Deoarece $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, rezultă că $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = \frac{2}{3}$; $\frac{DE}{AB} = \frac{2}{3}$, deci $\frac{14 \text{ cm}}{AB} = \frac{2}{3}$, de unde rezultă că $AB = 21$ cm. Analog se arată că $BC = 27$ cm și $CA = 33$ cm.





6. Se consideră $\triangle DEF \sim \triangle MNP$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{2}{3}$. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Raportul $\frac{\mathcal{A}_{DEF}}{\mathcal{A}_{MNP}}$ este egal cu:

- A. $\frac{2}{3}$; B. $\frac{4}{6}$; C. $\frac{6}{9}$; D. $\frac{4}{9}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

7. Se consideră $\triangle MNP \sim \triangle ABC$. Știind că:

- a) $\frac{\mathcal{A}_{MNP}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{25}{36}$, aflați $\frac{MN}{AB}$; b) $\frac{\mathcal{A}_{MNP}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{16}{49}$, aflați $\frac{NP}{BC}$.

8. Se consideră $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, raportul lor de asemănare fiind $\frac{2}{5}$.

- a) Dacă $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm și $CA = 20$ cm, aflați DE , EF și FD .
b) Dacă $DE = 10$ cm, $EF = 14$ cm și $FD = 22$ cm, aflați AB , BC și CA .

9. Se consideră $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{4}{5}$. Știind că:

- a) $\mathcal{A}_{ABC} = 64$ cm², calculați $\mathcal{A}_{DEF}$; b) $\mathcal{A}_{DEF} = 75$ cm², calculați $\mathcal{A}_{ABC}$.

10. Se consideră $\triangle DEF \sim \triangle MNP$, raportul lor de asemănare fiind $\frac{5}{7}$. Dacă:

- a) $\mathcal{P}_{DEF} = 65$ cm, aflați $\mathcal{P}_{MNP}$; b) $\mathcal{P}_{MNP} = 63$ cm, aflați $\mathcal{P}_{DEF}$.

11. Se consideră $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Știind că:

- a) $AB = 7$ cm, $BC = 8$ cm, $CA = 10$ cm și $\mathcal{P}_{DEF} = 75$ cm, calculați DE , EF și FD ;
b) $DE = 7$ cm, $EF = 9$ cm, $FD = 12$ cm și $\mathcal{P}_{ABC} = 70$ cm, calculați AB , BC și CA .

12. În triunghiul ABC , notăm cu M , N și P mijloacele laturilor AB , BC , respectiv CA . Dacă $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, arătați că triunghiul ABC este echilateral.

13. Se consideră triunghiul ABC și punctele D , E și F situate pe laturile AB , BC , respectiv CA . Știind că $\triangle DBE \sim \triangle FEC$, arătați că patrulaterul $ADEF$ este paralelogram.

14. Știind că $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ și $\triangle DEF \sim \triangle MNP$, arătați că $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.

15. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și punctele E și F situate pe laturile AB , respectiv BC . Dacă $\triangle DAE \sim \triangle EBF$, determinați măsura unghiului DEF .

16. Se consideră dreptunghiul $MNPQ$ și punctele D și E situate pe laturile NP , respectiv PQ . Dacă $\triangle MND \sim \triangle NPE$, arătați că $MD \perp NE$.

17. În triunghiul ABC , construim înălțimea AD , D este interior laturii BC . Știind că $\triangle DAB \sim \triangle DCA$, arătați că:

a) $AD^2 = BD \cdot CD$;

b) $\angle BAC = 90^\circ$.

18. În triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$, bisectoarea unghiului ABC intersectează latura AC în punctul D . Dacă $\triangle ABC \sim \triangle BDC$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

Exerciții și probleme de dificultate avansată

19. Se consideră triunghiul obtuzunghic ABC cu $AB \equiv AC$. Perpendiculara construită în A pe dreapta AB intersectează latura BC în punctul D . Știind că $\triangle ABC \sim \triangle DCA$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

20. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, arătați că $AB(EF + FD) = DE(BC + CA)$, $BC(FD + DE) = EF(CA + AB)$ și $CA(DE + EF) = FD(AB + BC)$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Determinați măsurile unghiurilor triunghiului DEF , știind că $\triangle DEF \sim \triangle EFD$.

(3p) **2.** Se consideră $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, raportul lor de asemănare fiind egal cu $\frac{3}{5}$.

Știind că $MN = 15$ cm, $NP = 20$ cm și $PM = 25$ cm, calculați $\mathcal{P}_{ABC}$.

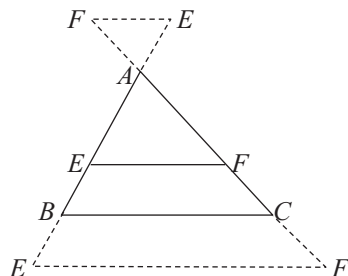
(3p) **3.** Se consideră triunghiul obtuzunghic ABC cu $AB \equiv AC$ și punctul D situat pe latura BC , astfel încât $CA \equiv CD$. Știind că $\triangle ABC \sim \triangle DBA$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

Lecția 5. Teorema fundamentală a asemănării



Citesc și rețin

Teorema fundamentală a asemănării: O paralelă construită la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi ale triunghiului (sau cu prelungirile lor) un triunghi asemenea cu triunghiul dat.



$$EF \parallel BC \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC$$

Capitolul IV

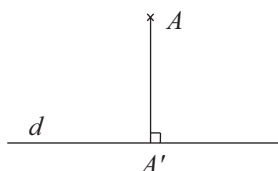
RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIEL DREPTUNGHIC

Lecția 7. Proiecții ortogonale pe o dreaptă



Citesc și rețin

Definiție: Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei construite din acel punct pe dreapta respectivă.

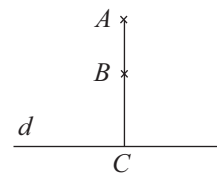
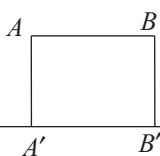
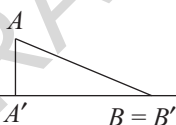
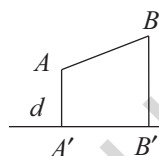


Notăm $pr_d A = A'$.

Teoremă:

Proiecția unui segment pe o dreaptă este:

- un segment, dacă dreapta suport a segmentului nu este perpendiculară pe dreapta respectivă;
- un punct, dacă dreapta suport a segmentului este perpendiculară pe dreapta respectivă.



Notăm $pr_d AB = A'B'$

$pr_d AB = C$



Cum se aplică?

1. Se consideră triunghiul DEF cu $\angle D = 90^\circ$ din figura alăturată.

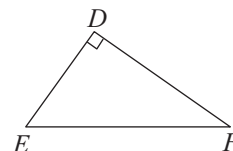
Alegeți răspunsul corect:

A. $pr_{DE} F = E$;

B. $pr_{DE} F = D$.

Soluție:

Deoarece $FD \perp DE$, rezultă că răspunsul corect este B, $pr_{DE} F = D$.



2. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Determinați:

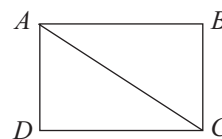
a) $pr_{DC} AB$;

b) $pr_{AD} AC$.

Soluție:

a) Cum $\text{pr}_{DC} A = D$ și $\text{pr}_{DC} B = C$, rezultă că $\text{pr}_{DC} AB = DC$;

b) Cum $\text{pr}_{AD} A = A$ și $\text{pr}_{AD} C = D$, rezultă că $\text{pr}_{AD} AC = AD$.



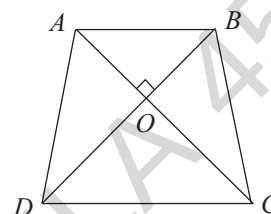
3. Trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ are diagonalele perpendiculare. Știind că $\text{pr}_{AC} AD$ și $\text{pr}_{BD} BC$ sunt segmente congruente, arătați că trapezul $ABCD$ este isoscel.

Soluție:

$AC \cap BD = \{O\}$. Observăm că $\text{pr}_{AC} AD = AO$ și $\text{pr}_{BD} BC = BO$, deci $AO \equiv BO$. Deoarece $AB \parallel CD$,

aplicând teorema lui Thales, rezultă că $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$,

prin urmare $AC \equiv BD$, de unde deducem că trapezul $ABCD$ este isoscel.

**Știu să rezolv****Exerciții și probleme de dificultate minimă**

1. Citiți următoarele propoziții:

a) $\text{pr}_{BC} E = F$;

b) $\text{pr}_a M = N$;

c) $\text{pr}_{EF} D = P$.

2. Citiți următoarele propoziții:

a) $\text{pr}_{AB} EF = MN$;

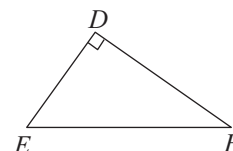
b) $\text{pr}_a CD = M$;

c) $\text{pr}_{EF} MN = PQ$.

3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul DEF cu $\angle D = 90^\circ$. Alegeți răspunsul corect încercuind litera corespunzătoare acestuia:

A. $\text{pr}_{DF} E = F$;

B. $\text{pr}_{DF} E = D$.

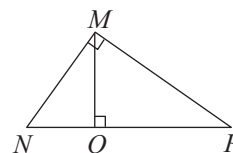


4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul MNP cu $\angle M = 90^\circ$ și înălțimea MQ , $Q \in NP$. Alegeți răspunsul corect încercuind litera corespunzătoare acestuia:

A. $\text{pr}_{NP} M = N$;

B. $\text{pr}_{NP} M = P$;

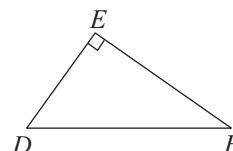
C. $\text{pr}_{NP} M = Q$.



5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul DEF cu $\angle E = 90^\circ$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\text{pr}_{EF} DE = E$; ☐

b) $\text{pr}_{ED} FE = E$. ☐

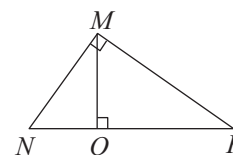


6. În figura alăturată este reprezentat triunghiul MNP cu $\angle M = 90^\circ$ și înălțimea MQ , $Q \in NP$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\text{pr}_{NP} MN = NQ$; ☐

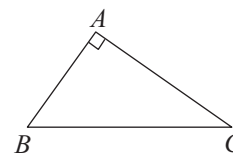
b) $\text{pr}_{NP} MP = NP$; ☐

c) $\text{pr}_{NP} MP = QP$. ☐



7. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.

a) $\text{pr}_{AC} BC = \dots\dots\dots$; b) $\text{pr}_{AB} BC = \dots\dots\dots$.



Exerciții și probleme de dificultate medie

8. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $\angle A = 90^\circ$. Determinați:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $\text{pr}_{AD} B$; | b) $\text{pr}_{DC} A$; | c) $\text{pr}_{AD} C$; |
| d) $\text{pr}_{AD} CD$; | e) $\text{pr}_{AB} DA$; | f) $\text{pr}_{AD} BC$. |

9. Se consideră pătratul $ABCD$. Determinați:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $\text{pr}_{BC} A$; | b) $\text{pr}_{CD} B$; | c) $\text{pr}_{AC} D$; |
| d) $\text{pr}_{BD} AB$; | e) $\text{pr}_{AC} AD$; | f) $\text{pr}_{BC} DC$. |

10. Se consideră rombul $ABCD$. Determinați:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $\text{pr}_{AC} B$; | b) $\text{pr}_{BD} C$; | c) $\text{pr}_{AC} D$; |
| d) $\text{pr}_{AC} AB$; | e) $\text{pr}_{BD} CD$; | f) $\text{pr}_{AC} BC$. |

11. Calculați aria rombului $ABCD$, știind că $\text{pr}_{AC} AB$ și $\text{pr}_{BD} BC$ au lungimile egale cu $3\sqrt{6}$ cm, respectiv $2\sqrt{3}$ cm.

12. Se consideră rombul $DEFG$. Știind că $\text{pr}_{DF} DE$ și $\text{pr}_{EG} DE$ sunt segmente congruente, arătați că $DEFG$ este pătrat.

13. Se consideră triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$ și o dreaptă d ce trece prin punctul A și este situată în exteriorul triunghiului. Dacă notăm cu D proiecția punctului A pe dreapta BC , iar cu E și F notăm proiecțiile punctelor B , respectiv C pe dreapta d , arătați că $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

14. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $\angle A = 90^\circ$ și $AC \perp BD$. Dacă $\text{pr}_{DC} AC$ și $\text{pr}_{AB} BD$ au lungimile egale cu $6\sqrt{3}$ cm, respectiv $2\sqrt{6}$ cm, calculați AD .

15. În interiorul unghiului AOB cu măsura de 60° considerăm segmentul CD , astfel încât proiecțiile segmentelor OC și OD pe dreptele OA , respectiv OB sunt segmente congruente. Arătați că $d(C, OA) + d(D, OB) = CD$ dacă și numai dacă $\angle COD = 30^\circ$.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Trapezul $DEFG$ cu $DE \parallel FG$ are diagonalele perpendiculare. Determinați:

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) $\text{pr}_{DF} GF$; | b) $\text{pr}_{EG} D$; | c) $\text{pr}_{EG} EF$. |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|

25. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$. Dacă notăm cu R_1, R_2 și R_3 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor OAB, OBC , respectiv OCA , arătați că:

$$R \leq \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3}. \quad (\text{I. Tudor})$$



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

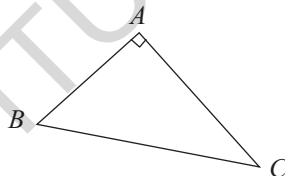
- (3p) **1.** În triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$, construim înălțimea $AD, D \in BC$. Știind că $BD = 9$ cm și $CD = 16$ cm, calculați $\mathcal{P}_{ABC}$.
- (3p) **2.** Din punctul A exterior cercului $\mathcal{C}(O, 6$ cm) construim tangentele AB și $AC, B, C \in \mathcal{C}(O, 6$ cm). Știind că $AO = 12$ cm, calculați $\mathcal{P}_{ABC}$.
- (3p) **3.** Notăm cu O punctul de intersecție a diagonalelor rombului $ABCD$, cu $\angle A < 90^\circ$. Perpendiculara construită în punctul B pe latura BC intersectează diagonala AC în punctul E . Știind că lungimile segmentelor AE, EO și OC , exprimate în centimetri, sunt trei numere naturale consecutive de aceeași paritate, calculați $\mathcal{P}_{ABCD}$.

Lecția 10. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora



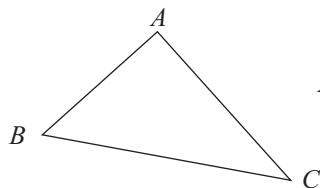
Citesc și rețin

Teorema lui Pitagora: Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.



$$\angle A = 90^\circ \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Reciproca teoremei lui Pitagora: Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii a treia, atunci unghiul care se opune acestei laturi este drept.



$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \angle A = 90^\circ$$

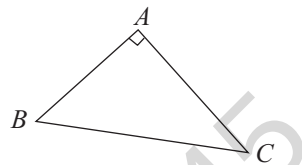


Cum se aplică?

1. Se consideră triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$. Știind că $AB = 12$ cm și $AC = 16$ cm, calculați BC .

Soluție:

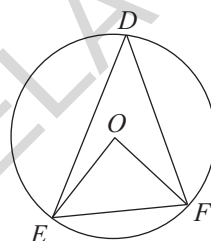
Aplicăm teorema lui Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2$, deci $BC^2 = 12^2 + 16^2$ sau $BC^2 = 144 + 256$, așadar $BC^2 = 400$, de unde rezultă că $BC = \sqrt{400}$ cm și obținem $BC = 20$ cm.



2. Triunghiul ascuțitunghic DEF este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, 3\sqrt{2}$ cm). Știind că $EF = 6$ cm, determinați $\angle EDF$.

Soluție:

În triunghiul OEF , observăm că $EF^2 = 36$, iar $OE^2 + OF^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 18 + 18 = 36$, prin urmare $EF^2 = OE^2 + OF^2$, de unde rezultă că $\angle EOF = 90^\circ$, deci $\widehat{EF} = 90^\circ$; $\angle EDF = \frac{\widehat{EF}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

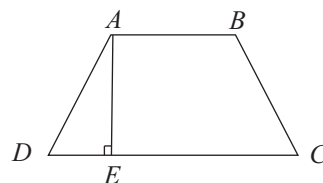


3. În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ construim înălțimea AE , $E \in CD$. Știind că $AB = 7$ cm, $CD = 19$ cm și $AE = 8$ cm, calculați perimetrul trapezului $ABCD$.

Soluție:

Deoarece $ABCD$ este trapez isoscel rezultă că $DE = \frac{CD - AB}{2}$, așadar $DE = \frac{19 \text{ cm} - 7 \text{ cm}}{2}$, de unde

obținem $DE = 6$ cm. În $\triangle AED$, aplicăm teorema lui Pitagora: $AD^2 = AE^2 + ED^2$, deci $AD^2 = 8^2 + 6^2$ sau $AD^2 = 100$, prin urmare $AD = \sqrt{100}$, de unde rezultă că $AD = 10$ cm, deci $BC = 10$ cm. $\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 7 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 19 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 46 \text{ cm}$.

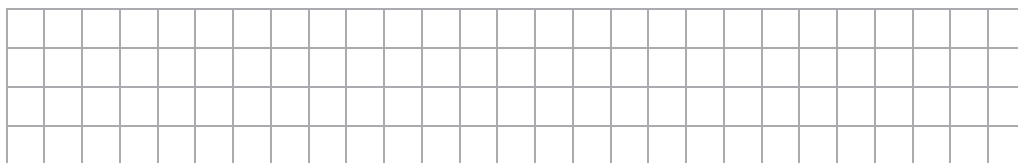


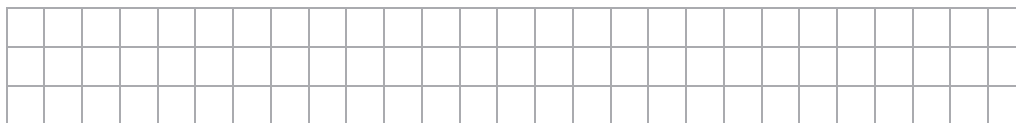
Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Construiești triunghiul MNP cu $\angle N = 90^\circ$ și apoi stabilești valoarea de adevăr a propozițiilor:

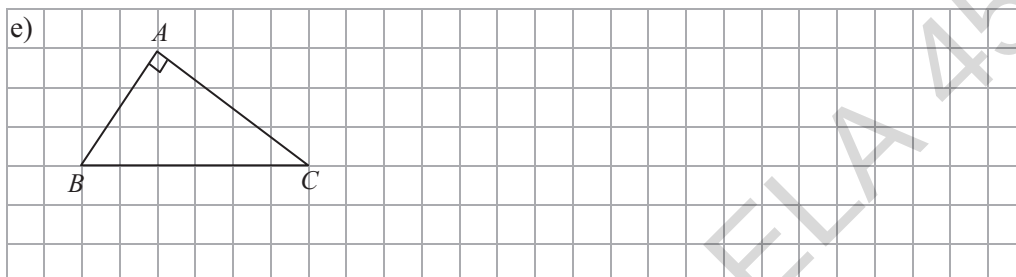
- a) $MN^2 = NP^2 + PM^2$; ☐ b) $NP^2 = PM^2 + MN^2$; ☐ c) $PM^2 = MN^2 + NP^2$. ☐





2. Se consideră triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$. Calculați BC în următoarele cazuri:

- a) $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm; b) $AB = 8$ cm și $AC = 6$ cm;
c) $AB = 5$ cm și $AC = 12$ cm; d) $AB = 12$ cm și $AC = 9$ cm;
e) $AB = 2\sqrt{5}$ cm și $AC = 4$ cm; f) $AB = 6$ cm și $AC = 3\sqrt{3}$ cm.



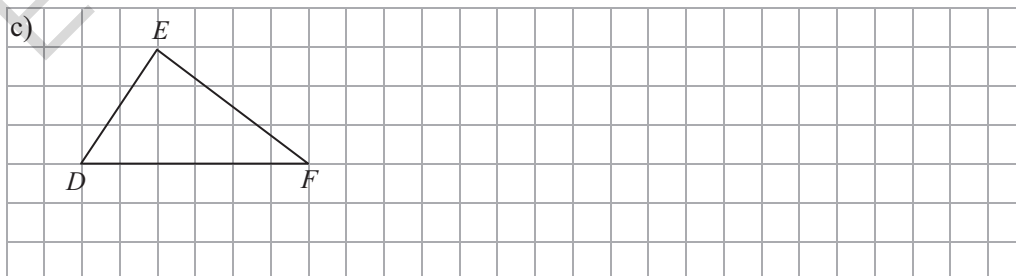
3. Se consideră triunghiul DEF cu $\angle D = 90^\circ$. Știind că:

- a) $DE = 12$ cm și $EF = 20$ cm, aflați DF ;
b) $EF = 26$ cm și $DF = 10$ cm, aflați DE ;
c) $DE = 4\sqrt{3}$ cm și $EF = 6\sqrt{2}$ cm, aflați DF ;
d) $EF = 4\sqrt{5}$ cm și $DF = 2\sqrt{2}$ cm, aflați DE .



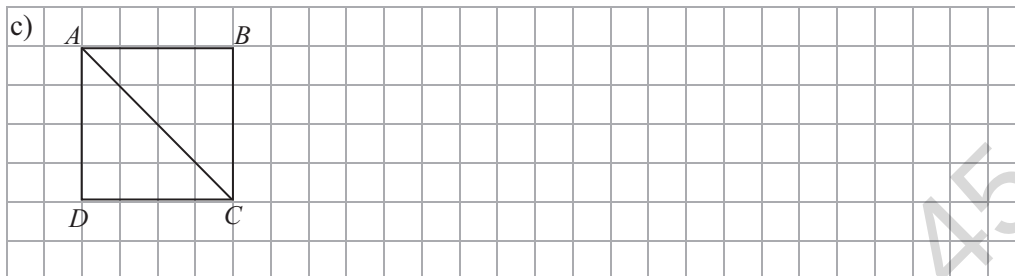
4. Se consideră triunghiul DEF .

- a) Știind că $DE = 12$ cm, $EF = 15$ cm și $FD = 9$ cm, aflați $\angle D$.
b) Știind că $DE = 13$ cm, $EF = 5$ cm și $FD = 12$ cm, aflați $\angle F$.
c) Știind că $DE = 6$ cm, $EF = 2\sqrt{7}$ cm și $FD = 8$ cm, aflați $\angle E$.



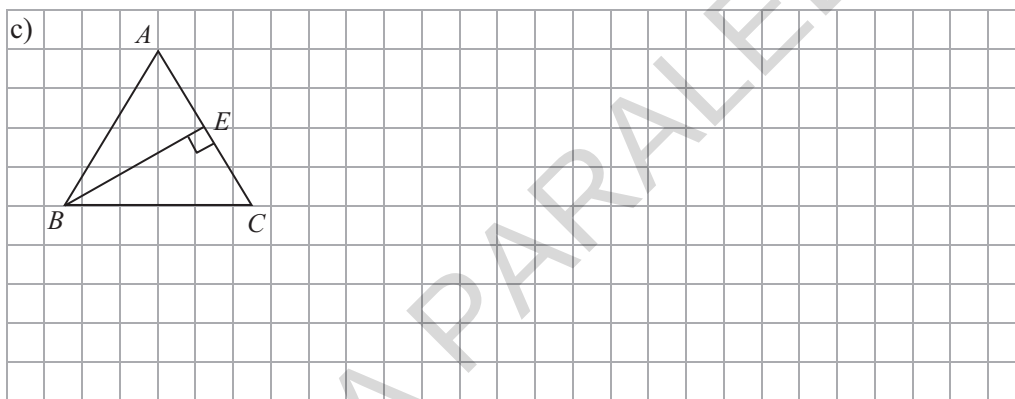
5. Notăm cu d lungimea diagonalei pătratului $ABCD$. Calculați d , știind că pătratul are latura de:

- a) 5 cm; b) $3\sqrt{2}$ cm; c) $7\sqrt{2}$ cm; d) a cm.



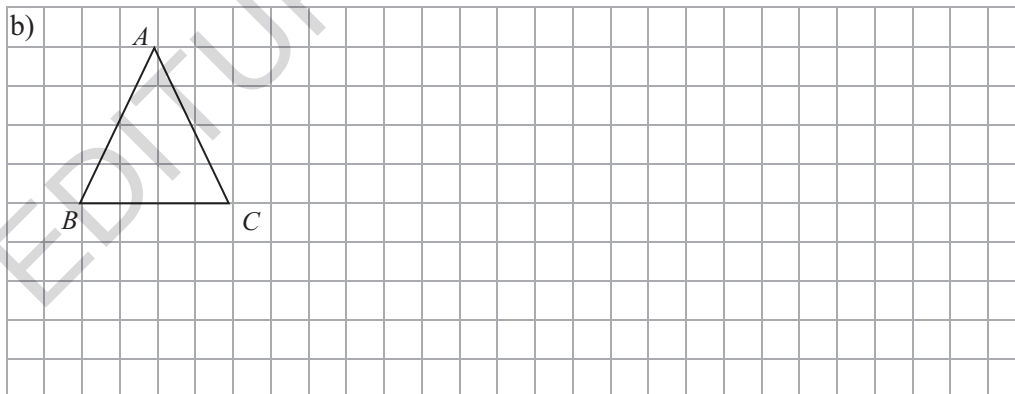
6. În triunghiul echilateral ABC notăm cu h lungimea înălțimii BE , $E \in AC$. Calculați h , știind că latura triunghiului echilateral ABC este de:

- a) 8 cm; b) $4\sqrt{3}$ cm; c) $6\sqrt{6}$ cm; d) a cm.



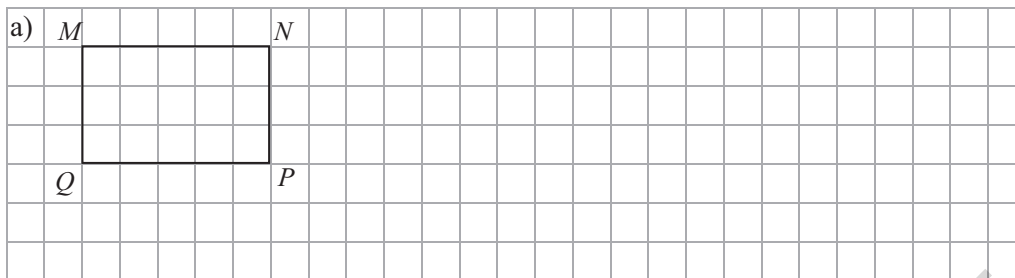
7. Calculați aria triunghiului ABC în următoarele cazuri:

- a) $AB = AC = 13$ cm și $BC = 10$ cm; b) $BA = BC = 15$ cm și $AC = 18$ cm.



8. Se consideră dreptunghiul $MNPQ$. Știind că:

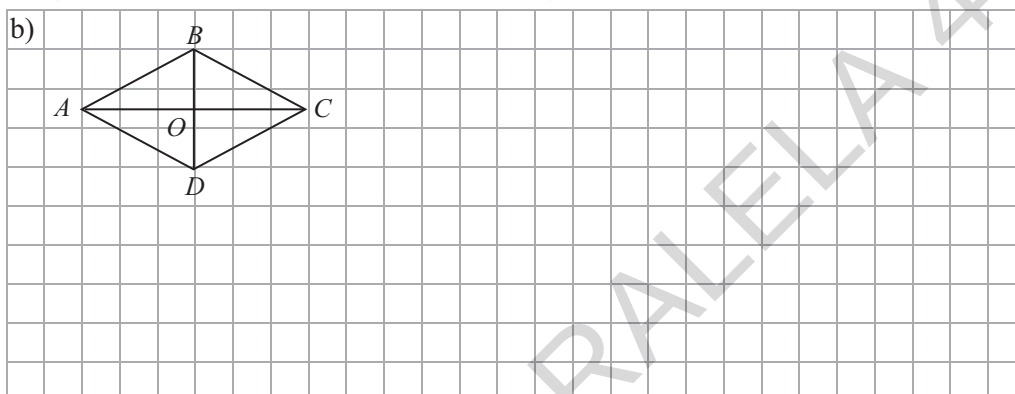
- a) $MN = 4\sqrt{2}$ cm și $NP = 2$ cm, calculați MP ;
b) $NP = 1$ cm și $PQ = 4\sqrt{3}$ cm, calculați NQ .



9. Calculați perimetrul rombului $ABCD$ în următoarele cazuri:

a) $AC = 12$ cm și $BD = 16$ cm;

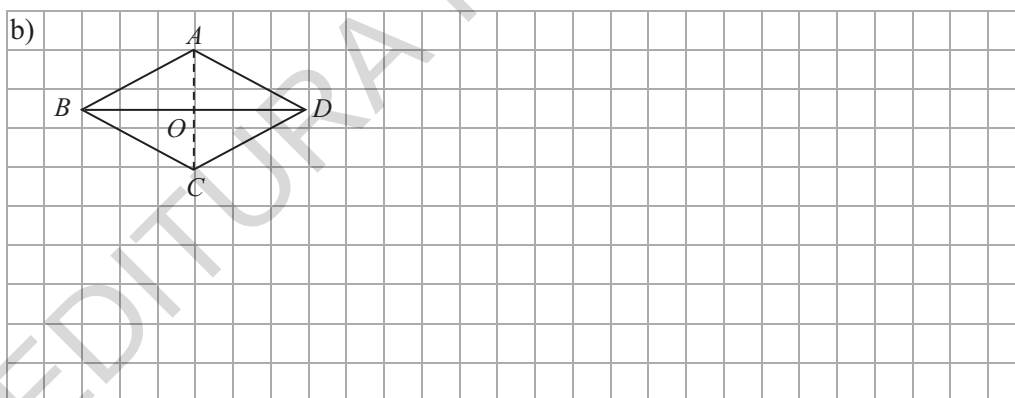
b) $AC = 24$ cm și $BD = 18$ cm.



10. Se consideră rombul $ABCD$ cu perimetrul de 52 cm. Calculați aria rombului $ABCD$, știind că:

a) $AC = 24$ cm;

b) $BD = 8\sqrt{3}$ cm.



Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Pe cercul $\mathcal{C}(O, 10$ cm) considerăm punctele E și F . Calculați aria triunghiului OEF în următoarele cazuri:

a) $d(O, EF) = 6$ cm;

b) $d(O, EF) = 5$ cm.

12. Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$ considerăm punctele A și B . Aflați R în următoarele cazuri:

a) $AB = 16$ cm și $d(O, AB) = 6$ cm;

b) $AB = 24$ cm și $d(O, AB) = 5$ cm.

Lecția 11. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic



Citesc și rețin

Definiții:

Într-un triunghi dreptunghic considerăm un unghi ascuțit cu măsura de x° și numim:

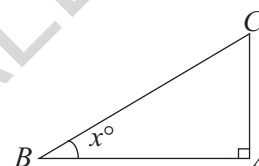
- **sinus de x°** , notat **$\sin x^\circ$** , raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea ipotenuzei;
- **cosinus de x°** , notat **$\cos x^\circ$** , raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea ipotenuzei;
- **tangentă de x°** , notată **$\operatorname{tg} x^\circ$** , raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea catetei alăturate;
- **cotangentă de x°** , notată **$\operatorname{ctg} x^\circ$** , raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea catetei opuse.

$$\sin x^\circ = \frac{AC}{BC},$$

$$\cos x^\circ = \frac{AB}{BC},$$

$$\operatorname{tg} x^\circ = \frac{AC}{AB},$$

$$\operatorname{ctg} x^\circ = \frac{AB}{AC}.$$



Sinusul, cosinusul, tangenta și cotangentă se numesc **funcții trigonometrice**.

Proprietățile funcțiilor trigonometrice:

1. $\sin x^\circ = \cos (90^\circ - x^\circ)$, $\cos x^\circ = \sin (90^\circ - x^\circ)$,
 $\operatorname{tg} x^\circ = \operatorname{ctg} (90^\circ - x^\circ)$, $\operatorname{ctg} x^\circ = \operatorname{tg} (90^\circ - x^\circ)$;
2. $\sin x^\circ < 1$, $\cos x^\circ < 1$;
3. $\sin^2 x^\circ + \cos^2 x^\circ = 1$.

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile cu măsura de 30° , 45° și 60° :

	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$



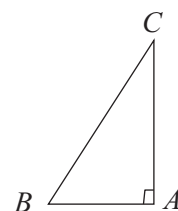
Cum se aplică?

1. Se consideră triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm și $CA = 4$ cm. Calculați:

- a) $\sin B$; b) $\cos B$; c) $\operatorname{tg} C$; d) $\operatorname{ctg} C$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin B &= \frac{AC}{BC} = \frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0,8; \text{ b) } \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0,6; \\ \text{c) } \operatorname{tg} C &= \frac{AB}{AC} = \frac{3 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 0,75; \text{ d) } \operatorname{ctg} C = \frac{AC}{AB} = \frac{4 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 1, (3). \end{aligned}$$



2. În triunghiul MNP , construim înălțimea MD , D interior laturii NP . Știind că $MD = 6 \text{ cm}$, $ND = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ și $MP = 6\sqrt{2} \text{ cm}$, determinați:

a) $\sphericalangle MNP$;

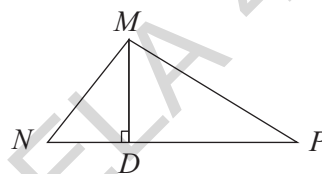
b) $\sphericalangle MPN$;

c) $\sphericalangle NMP$.

Soluție:

a) În $\triangle MDN$ cu $\sphericalangle D = 90^\circ$, avem $\operatorname{tg} N = \frac{MD}{ND}$, deci

$$\operatorname{tg} N = \frac{6 \text{ cm}}{2\sqrt{3} \text{ cm}} = \frac{\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \frac{3}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3}, \text{ așadar } \operatorname{tg} N = \sqrt{3}, \text{ de unde rezultă } \sphericalangle MNP = 60^\circ;$$



b) În $\triangle MDP$ cu $\sphericalangle D = 90^\circ$, avem $\sin P = \frac{MD}{MP}$, deci $\sin P = \frac{6 \text{ cm}}{6\sqrt{2} \text{ cm}} = \frac{\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, așadar $\sin P = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde rezultă că $\sphericalangle MPN = 45^\circ$;

c) $\sphericalangle NMP = 180^\circ - \sphericalangle MNP - \sphericalangle MPN = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.

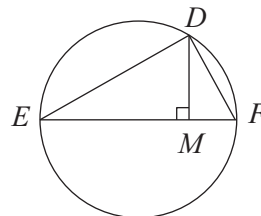
3. Pe cercul $\mathcal{C}(O, 2\sqrt{6} \text{ cm})$ se consideră punctele D, E și F , astfel încât segmentul EF este diametru și $\widehat{DE} = 2\widehat{DF}$. Calculați:

a) $\mathcal{A}_{DEF}$;

b) $d(D, EF)$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sphericalangle EDF &= \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ; \widehat{DE} + \widehat{DF} = 180^\circ \text{ sau } 2\widehat{DF} + \widehat{DF} = 180^\circ, \text{ deci } 3\widehat{DF} = 180^\circ, \text{ de unde rezultă că } \widehat{DF} = \\ &= 180^\circ : 3 = 60^\circ, \text{ deci } \sphericalangle DEF = 30^\circ. \text{ În } \triangle DEF \text{ cu } \sphericalangle D = 90^\circ, \\ \text{avem: } \sin E &= \frac{DF}{EF} \text{ sau } \sin 30^\circ = \frac{DF}{4\sqrt{6}}, \text{ deci } \frac{1}{2} = \frac{DF}{4\sqrt{6}}, \text{ de unde rezultă că } DF = \\ &= 2\sqrt{6} \text{ cm; } \operatorname{tg} E = \frac{DF}{DE} \text{ sau } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2\sqrt{6}}{DE}, \text{ deci } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{DE}, \text{ de unde rezultă că } DE = \\ &= 6\sqrt{2} \text{ cm; } \mathcal{A}_{DEF} = \frac{DE \cdot DF}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2; \end{aligned}$$



b) Construim $DM \perp EF$, $M \in EF$. În $\triangle DEM$ cu $\sphericalangle M = 90^\circ$, avem: $\sin E = \frac{DM}{DE}$ sau

$$\sin 30^\circ = \frac{DM}{6\sqrt{2}}, \text{ deci } \frac{1}{2} = \frac{DM}{6\sqrt{2}}, \text{ de unde rezultă că } DM = 3\sqrt{2} \text{ cm.}$$



Știu să rezolv

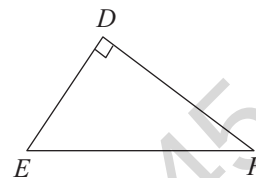
Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. În figura alăturată este reprezentat triunghiul DEF , cu $\angle D = 90^\circ$.

Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\cos E = \frac{DE}{EF}$; ☐ b) $\operatorname{tg} F = \frac{DF}{DE}$; ☐ c) $\sin F = \frac{DF}{EF}$; ☐

d) $\sin E = \frac{DF}{EF}$; ☐ e) $\operatorname{ctg} F = \frac{DF}{EF}$; ☐ f) $\cos F = \frac{DF}{DE}$; ☐



2. Se consideră triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm și $CA = 8$ cm.

Calculați:

a) $\sin B$;

b) $\sin C$;

c) $\cos B$;

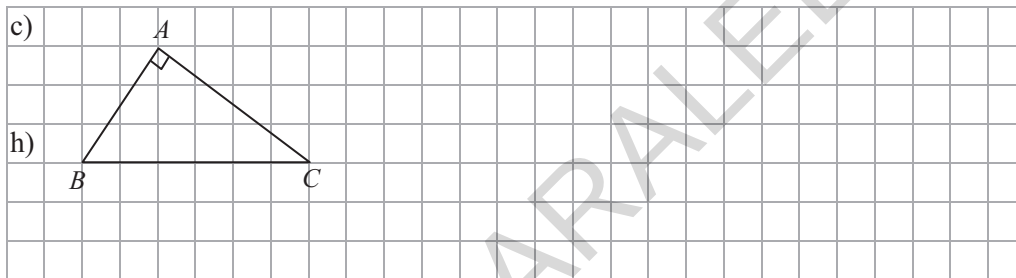
d) $\cos C$;

e) $\operatorname{ctg} B$;

f) $\operatorname{tg} C$;

g) $\operatorname{tg} B$;

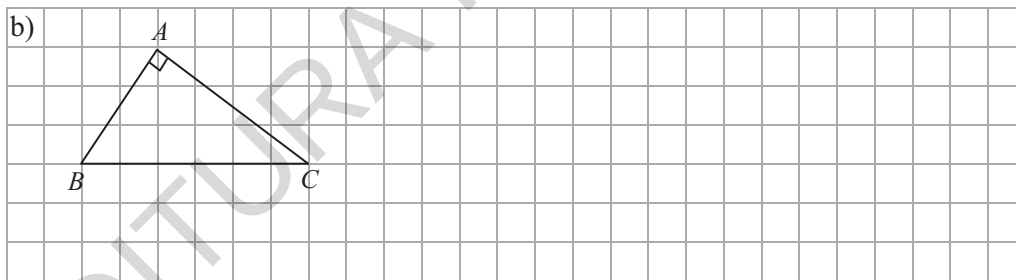
h) $\operatorname{ctg} C$.



3. În triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$, $\sin B = 0,25$. Știind că:

a) $AC = 10$ cm, calculați BC ;

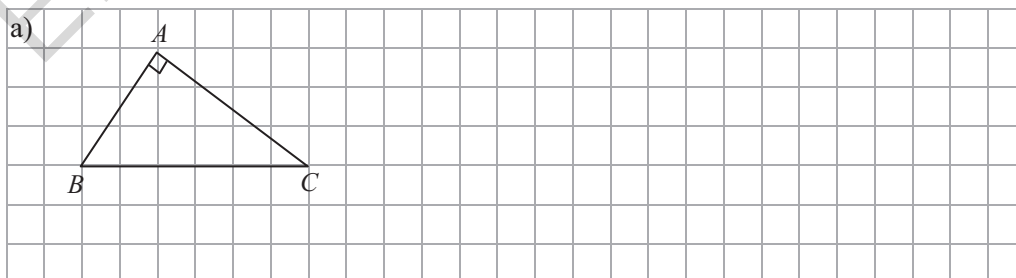
b) $BC = 12$ cm, calculați AC .



4. În triunghiul ABC cu $\angle A = 90^\circ$, $\cos B = 0,75$. Știind că:

a) $AB = 21$ cm, calculați BC ;

b) $BC = 24$ cm, calculați AB .



Modele de teste pentru evaluarea cunoștințelor

Capitolele: Ecuații și sisteme de ecuații liniare, Elemente de organizare a datelor, Asemănarea triunghiurilor, Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Subiectul I. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (7p) 1. Dacă reprezentăm punctul $A(-3, -5)$ în sistemul de axe ortogonale xOy , atunci acesta este situat în cadranul:
A. I; B. II; C. III; D. IV.
- (7p) 2. Soluția ecuației $\sqrt{7}x + 1 = 8$, unde $x \in \mathbb{R}$, este egală cu:
A. 3; B. $\sqrt{7}$; C. $\sqrt{5}$; D. 4.
- (7p) 3. Se consideră mulțimile $E = \{a, b\}$ și $F = \{c\}$. Mulțimea $E \times F$ este egală cu:
A. $\{(a, c), (b, c)\}$; B. $\{(a, b), (a, c)\}$; C. $\{(c, a), (c, b)\}$; D. $\{(c, b), (a, b)\}$.
- (7p) 4. Între mulțimile $A = \{-1, 2\}$ și $B = \{-1, -4\}$ se stabilește o dependență funcțională aplicând regula:
A. $x \rightarrow 2x$; B. $x \rightarrow (-x)^2$; C. $x \rightarrow -x^2$; D. $x \rightarrow 3x$.
- (7p) 5. Se consideră triunghiul DEF cu $\angle D = 90^\circ$. Dacă $\operatorname{tg}(\angle E) = \sqrt{3}$, atunci măsura unghiului F este egală cu:
A. 60° ; B. 45° ; C. 30° ; D. 75° .
- (7p) 6. Perimetrul triunghiului ABC cu măsura unghiului A egală cu 90° , $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm este egal cu:
A. 10 cm; B. 12 cm; C. 16 cm; D. 18 cm.

Subiectul al II-lea. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

- (8p) 1. Calculați distanța dintre punctele M și N , exprimată în centimetri, știind că $M(8, 3)$ și $N(1, 4)$.
- (8p) 2. Dublul sumei dintre 1,(3) și un sfert dintr-un număr rațional este egal cu diferența dintre triplul numărului respectiv și 0,(6). Aflați numărul.
- (8p) 3. Rezolvați sistemul de ecuații
$$\begin{cases} 2(3x - \sqrt{2}) + 5y = -\sqrt{2} \\ 4x - 3(2y + \sqrt{2}) = 7\sqrt{2} \end{cases}$$
, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
- (8p) 4. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M , N și P situate pe segmentele AD , BD , respectiv BC , astfel încât $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BD} = \frac{1}{3}$ și $\frac{BP}{BC} = \frac{1}{4}$.
Arătați că punctele M , N și P sunt coliniare.
5. Se consideră triunghiul ABC cu măsura unghiului A de 90° , $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm, punctul D situat pe latura BC , astfel încât $AD = 13$ cm.
- (8p) a) Calculați distanța de la punctul A la dreapta BC .
- (8p) b) Determinați raportul ariilor triunghiurilor ABD și ACD .

Teste de evaluare finală

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

PARTEA I. Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (0,5p) 1. Numărul $\sqrt{0,25}$ aparține mulțimii:
 A. $\mathbb{N}$; B. $\mathbb{Z}$; C. $\mathbb{Q}$; D. $\mathbb{I}$.
- (0,5p) 2. Rădăcina pătrată a numărului natural 100 este egală cu:
 A. 12; B. 14; C. 16; D. 10.
- (0,5p) 3. Dacă reprezentăm punctul $M(-5, -2)$ în sistemul de axe ortogonale xOy , atunci acesta aparține cadranelui:
 A. I; B. III; C. IV; D. II.
- (0,5p) 4. Regula prin care se stabilește o dependență funcțională între mulțimile $E = \{1, 3\}$ și $F = \{3, 9\}$ este:
 A. $x \rightarrow 3x$; B. $x \rightarrow x^2$; C. $x \rightarrow x^3$; D. $x \rightarrow 2x$.
- (0,5p) 5. Rezultatul calculului $\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{3}) + |-\sqrt{6}|$ este egal cu:
 A. $2\sqrt{6}$; B. 0; C. $\sqrt{6}$; D. $-\sqrt{6}$.
- (0,5p) 6. Soluția ecuației $6 - 5x = 1, x \in \mathbb{R}$, este:
 A. 1; B. $-\frac{1}{3}$; C. $-\frac{1}{2}$; D. 3.
- (0,5p) 7. Aria dreptunghiului cu $L = 15$ cm și $l = \frac{2}{3}L$ cm este egală cu:
 A. 100 cm^2 ; B. 20 cm^2 ; C. 30 cm^2 ; D. 150 cm^2 .
- (0,5p) 8. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\sphericalangle A = 42^\circ$ și $\sphericalangle B = 75^\circ$, atunci $\sphericalangle F$ este egală cu:
 A. 36° ; B. 50° ; C. 63° ; D. 48° .
- (0,5p) 9. Dacă triunghiul echilateral ABC cu perimetrul de 9 cm este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$, atunci R este egală cu:
 A. $\sqrt{3}$ cm; B. $2\sqrt{3}$ cm; C. $3\sqrt{2}$ cm; D. $\sqrt{6}$ cm.

PARTEA A II-A. La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

- (0,8p) 1. Se consideră numărul $a = \left(\frac{7}{2\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{6}{0,8(3)}} \right) : \frac{\sqrt{5}}{2}$. Arătați că $a \in \mathbb{Z}$.
2. Fie A și B două mulțimi. Se știe că $A \times B = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, b), (c, d)\}$.
- (0,7p) a) Determinați mulțimile A și B .
- (0,7p) b) Determinați mulțimea $B \times A$.
3. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Se știe că $AB = 4\sqrt{6}$ cm, $BC = 4\sqrt{6}$ cm și $\mathcal{P}_{ABCD} = 20\sqrt{6}$ cm.
- (0,8p) a) Aflați $\sphericalangle DAB$. (0,7p) b) Calculați $\mathcal{A}_{ABCD}$. (0,8p) c) Calculați $\mathcal{P}_{COD}$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

1. a) A; b) A; c) A; d) A. 2. a) A; b) A; c) A; d) A. 3. a) $24x = 36y \Leftrightarrow 24x : 4 = 36y : 4 \Leftrightarrow 6x = 9y$; b) și c) analog. 4. a) $x = y \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} = y \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} + 53 = y \cdot \frac{1}{2} + 53$; b) Analog. 5. a) $2z = 5t \Leftrightarrow 10 \cdot 2z = 10 \cdot 5t \Leftrightarrow 20z = 50t$; b) $2z = 5t \Leftrightarrow \frac{1}{10} \cdot 2z = \frac{1}{10} \cdot 5t \Leftrightarrow \frac{z}{5} = \frac{t}{2}$; c) $2z = 5t \Leftrightarrow \sqrt{7} \cdot 2z = \sqrt{7} \cdot 5t \Leftrightarrow 2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$. 6. a) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : \sqrt{3} = (2\sqrt{3}y) : \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x = 2y$; b) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : 2\sqrt{3} = (2\sqrt{3}y) : 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = y$; c) $6x = 2\sqrt{3}y \Leftrightarrow (6x) : \sqrt{6} = (2\sqrt{3}y) : \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6}x = \sqrt{2}y$. 7. Egalitățile se împart cu 5, respectiv cu 7 și se adună membru cu membru. 8. $6a^4 = 6b^4 \Leftrightarrow a^4 = b^4 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$. 9. a) $xy + x + y + 1 = x(y + 1) + (y + 1) = (x + 1)(y + 1)$; b) $xy - x - y + 1 = x(y - 1) - (y - 1) = (x - 1)(y - 1)$. 10. a) $\frac{1}{2}xy + x + y + 2 = \frac{xy + 2x + 2y + 4}{2} = \frac{x(y + 2) + 2(y + 2)}{2} = \frac{(y + 2)(x + 2)}{2} = \frac{1}{2}(x + 2) \cdot (y + 2)$; b) $\frac{1}{3}xy - x - y + 3 = \frac{xy + 3x - 3y + 9}{3} = \frac{x(y - 3) - 3(y - 3)}{3} = \frac{(y - 3)(x - 3)}{3} = \frac{1}{3}(x - 3) \cdot (y - 3)$. 11. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-c}{c} + \frac{1-a}{a} + \frac{1-b}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} - 1 + \frac{1}{a} - 1 + \frac{1}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. 12. $\frac{x^2 + yz}{1 + x^3} + \frac{y^2 + zx}{1 + y^3} + \frac{z^2 + xy}{1 + z^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + yz}{xyz + x^3} + \frac{y^2 + zx}{xyz + y^3} + \frac{z^2 + xy}{xyz + z^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + yz}{x(x^2 + yz)} + \frac{y^2 + zx}{y(y^2 + zx)} + \frac{z^2 + xy}{z(z^2 + xy)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $x = y \Leftrightarrow x\sqrt{2} = y\sqrt{2} \Leftrightarrow x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $x = y \Leftrightarrow x \cdot \frac{1}{2} = y \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$. 2. $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y \Leftrightarrow (\sqrt{10}x) : \sqrt{2} = (\sqrt{14}y) : \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$. 3. $4a = 5b \Leftrightarrow 4a \cdot 3 = 5b \cdot 3 \Leftrightarrow 12a = 15b$; $14c = 10d \Leftrightarrow (14c) : 2 = (10d) : 2 \Leftrightarrow 7c = 5d$. Din $12a = 15b$ și $7c = 5d$ rezultă că $12a + 7c = 15b + 5d$.

Lecția 2. Ecuatii de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

1. a) Da; b) Da; c) Nu. 2. a) Da; b) Da; c) Nu. 3. a) Nu; b) Da; c) Nu. 4. a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = \frac{3}{2}$; c) $x = \frac{3}{2}$; d) $x = \frac{1}{3}$; e) $x = -\frac{3}{2}$; f) $x = -\frac{2}{3}$; g) $x = \frac{4}{7}$; h) $x = \frac{3}{5}$. 5. a) $x = 4$; b) $x = 18$; c) $x = 13$;

GEOMETRIE

CAPITOLUL III. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

1. a) A; b) A; c) A; d) F. 2. a) $\frac{MP}{MN} = \frac{1}{3}$; b) $\frac{MQ}{MN} = \frac{2}{3}$; c) $\frac{MQ}{PN} = 1$; d) $\frac{NQ}{NP} = \frac{1}{2}$. 3. a) $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$; b) $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}$; c) $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{5}$; d) $\frac{AB}{CD} = \frac{7}{8}$. 4. a) $\frac{AB}{BE} = \frac{1}{3}$; b) $\frac{AC}{BE} = \frac{2}{3}$; c) $\frac{EA}{EB} = \frac{4}{3}$; d) $\frac{DE}{DA} = \frac{1}{3}$. 5. a) $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{8}$; b) $\frac{AB}{CD} = \frac{7}{2}$; c) $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$; d) $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{5}$. 6. a) $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{MN}$; b) $\frac{AB}{MN} = \frac{EF}{CD}$. 7. a) $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{4}$; c) $\frac{PB}{AM} = \frac{3}{2}$; d) $\frac{AB}{PB} = \frac{4}{3}$. 8. a) $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$; b) $\frac{DC}{DA} = \frac{2}{5}$; c) $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{3}$; d) $\frac{AB}{AD} = \frac{6}{5}$. 9. a) $\frac{MB}{MA} = \frac{5}{4}$, $\frac{MA}{AB} = \frac{4}{9}$, $\frac{AB}{MB} = \frac{9}{5}$; b) $\frac{AB}{MA} = \frac{7}{2}$, $\frac{MB}{MA} = \frac{5}{2}$, $\frac{MB}{AB} = \frac{5}{7}$. 10. $\mathcal{P}_{ABC} = 67,5$ cm. 11. a) Se arată că $\frac{AB}{AD} = \frac{MB}{MC} = \frac{1}{3}$; b) Se arată că $\frac{DB}{DA} = \frac{CB}{CM} = \frac{2}{3}$. 12. a) $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3D = 4$ cm; b) $BN_1 = N_1N_2 = N_2N_3 = N_3C = 5$ cm. 13. a) Se arată că $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{CE} = \frac{1}{3}$; b) Se arată că $\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{CD} = \frac{3}{2}$. 14. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EB}$, deci $\frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EB}$, sau $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AB}$, de unde rezultă că $AD \equiv AE$, prin urmare $D = E$. 15. $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{ACM}$, deci $\frac{AB \cdot ME}{2} = \frac{AC \cdot MF}{2}$, de unde rezultă că $AB \cdot ME = AC \cdot MF$ sau $\frac{AB}{AC} = \frac{MF}{ME}$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $\frac{ED}{EF} = \frac{2}{3}$; b) $\frac{FD}{FE} = \frac{1}{3}$; c) $\frac{FD}{DE} = \frac{1}{2}$. 2. $\frac{AB}{MN} = \frac{PQ}{CD} = \frac{2}{5}$. 3. $\frac{MP}{MN} = \frac{5}{9}$, $\frac{PN}{MN} = \frac{4}{9}$.

Lecția 2. Teorema lui Thales

1. a) A; b) A; c) F; d) A. 2. a) $FC = 6$ cm; b) $AE = 1$ cm; c) $AC = 40$ cm; d) $AE = 6$ cm; e) $FC = 3$ cm; f) $AB = 15$ cm. 3. a) $MN = 20$ cm; b) $EM = 5$ cm; c) $EM = 6$ cm; d) $FN = 9$ cm; e) $FN = 18$ cm; f) $EM = 21$ cm. 4. a) $AE = 4$ cm; b) $EC = 15$ cm; c) $AD = 4$ cm; d) $DB = 20$ cm. 5. a) $EC = 24$ cm; b) $AE = 5$ cm; c) $DB = 7$ cm; d) $AD = 5$ cm. 6. a) $BF = 16$ cm; b) $ED = 5$ cm; c) $FC = 15$ cm; d) $AE = 21$ cm. 7. a) $\mathcal{P}_{AEDF} = 88$ cm; b) $\mathcal{P}_{AEDF} = 104$ cm; c) $\mathcal{P}_{AEDF} = 108$ cm. 8. a) Dacă $E \in AB$, obținem $AF = 10,5$ cm și $CF = 17,5$ cm, iar dacă $A \in EB$, obținem $AF = 42$ cm și $CF = 70$ cm; b) Dacă $E \in AB$, obținem $AF = 9$ cm și $CF = 6$ cm, iar dacă $B \in AE$, obținem $AF = 45$ cm și $CF = 30$ cm. 9. a) Aplicând teorema bisectoarei obținem $BD = 10$ cm și $CD = 12$ cm; b) Analog obținem $BD = 9$ cm și $CD = 21$ cm. 10. a) Aplicând teorema bisectoarei obținem $AB = 9$ cm și $AC = 12$ cm; b) Analog obținem $AB = 12$ cm și $AC = 8$ cm. 11. $AG \cap BC = \{M\}$; $\frac{BE}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2BE}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow BE = \frac{BC}{3}$ și analog se arată că $CF = \frac{BC}{3}$.

Cuprins

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități	5
Lecția 2. Ecuatii de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$	8
Lecția 3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	14
Lecția 4. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute	19
Lecția 5. Probleme care se rezolvă cu ajutorul sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute.....	27
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	32
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	34
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	36

CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

Lecția 6. Produsul cartezian a două mulțimi nevide.....	38
Lecția 7. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale	42
Lecția 8. Distanța dintre două puncte în plan	47
Lecția 9. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice.....	51
Lecția 10. Elemente de statistică matematică. Poligonul frecvențelor	56
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	61
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	63
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	65

GEOMETRIE

CAPITOLUL III. ASEMĂNAREA TRIUNGHILOR

Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante	67
Lecția 2. Teorema lui Thales	70
Lecția 3. Reciproca teoremei lui Thales	76
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	81
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	83
Lecția 4. Triunghiuri asemenea	85
Lecția 5. Teorema fundamentală a asemănării	88
Lecția 6. Criterii de asemănare a triunghiurilor	94
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	100
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	102
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	103

CAPITOLUL IV. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIL DREPTUNGHIC

Lecția 7. Proiecții ortogonale pe o dreaptă	107
Lecția 8. Teorema înălțimii	110
Lecția 9. Teorema catetei	114
Lecția 10. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora	119
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	126

<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	127
Lecția 11. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic.....	129
Lecția 12. Rezolvarea triunghiului dreptunghic	136
Lecția 13. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat	143
<i>Teste de evaluare sumativă.....</i>	148
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	150
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	152
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTINȚELOR.....	155
TESTE DE EVALUARE FINALĂ.....	163
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....	166