

# ALGEBRĂ

## Capitolul II

### CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

#### Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice



#### Citesc și rețin

Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice se efectuează la fel ca adunarea și scăderea fracțiilor ordinare.

1.  $\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{B(x)} = \frac{A(x) \pm C(x)}{B(x)}$ ,  $B(x) \neq 0$ .

2.  $\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)}$ ,  $B(x) \neq 0$ ,  $D(x) \neq 0$ , se efectuează astfel:

– se aduc la același numitor comun fracțiile algebrice  $\frac{A(x)}{B(x)}$  și  $\frac{C(x)}{D(x)}$ ;

– cu fracțiile aduse la același numitor comun se efectuează adunarea (scăderea) ca la punctul 1.

**Observație:** Proprietățile adunării fracțiilor ordinare se transferă și la adunarea fracțiilor algebrice.



#### Cum se aplică?

1. Calculați:

a)  $\frac{x-1}{4x} + \frac{3x-5}{4x}$ ;

b)  $\frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{x+2}{2x}$ .

**Soluție:**

a)  $\frac{x-1}{4x} + \frac{3x-5}{4x} = \frac{x-1+3x-5}{4x} = \frac{4x-6}{4x} = \frac{2(2x-3)}{4x} = \frac{2x-3}{2x}$ ;

b)  $\frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{x+2}{2x} = \frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{3x(x+2)}{6x^2} = \frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{3x^2+6x}{6x^2} = \frac{3x^2+1-(3x^2+6x)}{6x^2} =$   
 $= \frac{3x^2+1-3x^2-6x}{6x^2} = \frac{1-6x}{6x^2}$ .





7. Calculați:

a)  $\frac{4-3x^2}{x^2-2x} + \frac{3x-1}{x-2}$ ;

b)  $\frac{4x+1}{4x-4} + \frac{2-3x^2}{3x^2-3x}$ ;

c)  $\frac{6x-5}{4x+2} + \frac{7-3x^3}{2x^3+x^2}$ .

8. Calculați:

a)  $\frac{6x^2+1}{4x^2} - \frac{6x+3}{4x+2}$ ;

b)  $\frac{4x-1}{8x^2} - \frac{3x-1}{6x^2+2x}$ ;

c)  $\frac{3x-7}{9x^2-3x} - \frac{2x-5}{6x^2}$ .

9. Calculați:

a)  $\frac{5x^2-2x^3}{x^5} - \frac{4x-x^2}{x^4} + \frac{x+4}{x^3}$ ;

b)  $\frac{2-x}{x^2} + \frac{x^2-5x}{x^3} - \frac{7x-3x^2}{x^4}$ .

10. Calculați:

a)  $\frac{x^2+2}{6x^2-4x} - \frac{x-5}{9x-6} + \frac{x-1}{3x}$ ;

b)  $\frac{x-4}{6x-3} - \frac{x-2}{6x} + \frac{x^2+2x}{8x^2-4x}$ .

11. Calculați:

a)  $\frac{x}{x^2-6x+9} - \frac{x+3}{x^2-3x}$ ;

b)  $\frac{2-x}{x^2+2x} + \frac{x}{x^2+4x+4}$ ;

c)  $\frac{3x-1}{3x^2+x} - \frac{9x}{9x^2+6x+1}$ ;

d)  $\frac{1-2x}{2x^2+x} + \frac{4x}{4x^2+4x+1}$ .

12. Calculați:

a)  $\frac{3x}{x+2} + \frac{6x+4}{x^2-4} - \frac{2x}{x-2}$ ;

b)  $\frac{9-15x}{x^2-9} + \frac{4x}{x-3} - \frac{3x}{x+3}$ ;

c)  $\frac{4x}{x-5} - \frac{4x^2+10x}{x^2-25} + \frac{x}{x+5}$ ;

d)  $\frac{3x}{2x+1} + \frac{x-2}{1-2x} - \frac{4x+1}{4x^2-1}$ .

13. Calculați:

a)  $\frac{4x+8}{x^2-9} - \frac{x+1}{x^2+3x} - \frac{3x}{x^2-3x}$ ;

b)  $\frac{1-x}{x^2+2x} + \frac{x-3}{2x-x^2} + \frac{2x}{x^2-4}$ .

14. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a)  $E(x) = \frac{x+1}{4x^2-1} - \frac{x^2+2}{2x^3+x^2} + \frac{x+5}{x^2-2x^3}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$ ;

b)  $E(x) = \frac{x^3+4}{3x^4-2x^3} + \frac{6x-1}{4-9x^2} + \frac{x^3-1}{3x^4+2x^3}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right\}$ .

15. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a)  $E(x) = \frac{13x}{x^2-6x+9} - \frac{x-1}{x^2-9} + \frac{2x}{x+3}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ ;

b)  $E(x) = \frac{15x}{x^2+4x+4} + \frac{x+1}{x^2-4} - \frac{4x}{x-2}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ .

# Capitolul III

## FUNȚII

### Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite



#### Citesc și rețin

**Definiție:** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi nevide. O lege (un procedeu)  $f$  prin care se asociază fiecărui element din  $A$  un singur element din  $B$  se numește **funcție** definită pe mulțimea  $A$  cu valori în mulțimea  $B$ .

Notăm  $f : A \rightarrow B$  și citim „funcția  $f$  este definită pe mulțimea  $A$  cu valori în mulțimea  $B$ ”.

Mulțimea  $A$  se numește **domeniul de definiție** al funcției, mulțimea  $B$  se numește **codomeniul** sau **domeniul de valori** al funcției, iar legea (procedeu)  $f$  se numește **legea de corespondență** a funcției.

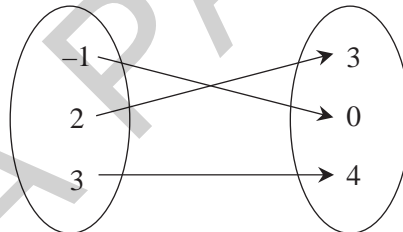
Dacă  $x \in A$ , elementul  $f(x) \in B$  se numește **imaginea lui  $x$  prin funcția  $f$**  sau **valoarea funcției  $f$  în punctul  $x$** .

#### Moduri de definire a unei funcții

O funcție poate fi definită:

##### 1. printr-o diagramă

Exemplu:



##### 2. printr-un tabel

Exemplu:

$x$	-1	2	3
$f(x)$	0	3	4

##### 3. printr-o formulă analitică

Exemplu:

$$f: \{-1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 3, 4\}, f(x) = x + 1$$

**Definiție:** Fie  $f : A \rightarrow B$  o funcție. Mulțimea  $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\}$  se numește **imaginea funcției  $f$**  sau **mulțimea valorilor funcției  $f$** .  $\text{Im } f \subset B$ .

**Definiție:** Fie  $f : A \rightarrow B$  o funcție. Dacă  $A \subset \mathbb{R}$  și  $B \subset \mathbb{R}$ , atunci funcția  $f$  se numește **funcție numerică**.

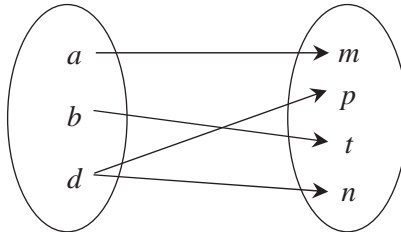
**Definiție:** Două funcții  $f : A \rightarrow B$  și  $g : C \rightarrow D$  se numesc **egale** dacă  $A = C$ ,  $B = D$  și  $f(x) = g(x)$ , oricare ar fi  $x \in A$ .

Notăm  $f = g$  și citim „funcțiile  $f$  și  $g$  sunt egale”.



## Cum se aplică?

1. Stabiliți dacă diagrama următoare definește o funcție.



### Soluție:

Diagrama nu definește o funcție, deoarece elementul  $d$  din domeniul de definiție are două imagini,  $p$  și  $n$ .

2. Se consideră funcția  $f : \{-2, -1, 0, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 4\}$ ,  $f(x) = x^2$ . Determinați mulțimea  $\text{Im } f$ .

### Soluție:

Calculăm imaginile elementelor din domeniul de definiție:  $f(-2) = 4$ ,  $f(-1) = 1$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(2) = 4$ , prin urmare  $\text{Im } f = \{0, 1, 4\}$ .

3. Se consideră funcția  $g : \{-6, -4, 0, 4, 6\} \rightarrow A$ ,  $g(x) = \frac{x}{2} + 5$ .

a) Calculați media aritmetică a numerelor  $g(-4)$  și  $g(4)$ .

b) Calculați media geometrică a numerelor  $g(-6)$  și  $g(6)$ .

### Soluție:

$$\text{a) } g(-4) = -\frac{4}{2} + 5 = 3 \text{ și } g(4) = \frac{4}{2} + 5 = 7; m_a = \frac{g(-4) + g(4)}{2} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5;$$

$$\text{b) } g(-6) = -\frac{6}{2} + 5 = 2 \text{ și } g(6) = \frac{6}{2} + 5 = 8; m_g = \sqrt{g(-6) \cdot g(6)} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4.$$



## Știu să rezolv

### Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele funcții:

a)  $f : E \rightarrow F, f(x) = 10x$ ;

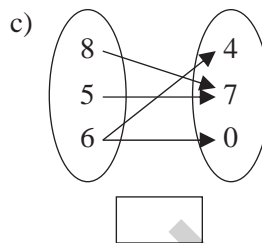
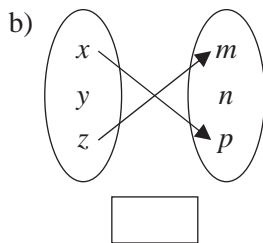
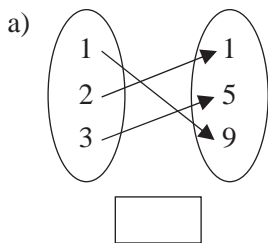
b)  $g : \{-1, 1, 2\} \rightarrow \{1, 4\}, g(x) = x^2$ ;

c)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = |x|$ .

2. Se consideră funcția  $f : A \rightarrow B, f(x) = 5x$ . Numiți:

a) domeniul de definiție;    b) domeniul de valori;    c) legea de corespondență.

3. Verificați dacă următoarele diagrame reprezintă funcții, completând caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”. Justificați răspunsul.



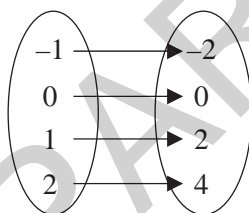
4. Se consideră funcția  $f: A \rightarrow B$ , definită prin tabelul următor:

$x$	1	2	3	5
$f(x)$	2	3	4	6

Completați spațiul punctat cu:

- a) mulțimea care reprezintă domeniul de definiție al funcției; .....
- b) mulțimea care reprezintă domeniul de valori al funcției; .....
- c) legea de corespondență (exprimată printr-o formulă) a funcției. ....

5. Se consideră funcția  $f: E \rightarrow F$ , definită prin diagrama următoare:



Completați spațiul punctat cu:

- a) mulțimea care reprezintă domeniul de definiție al funcției; .....
- b) mulțimea care reprezintă domeniul de valori al funcției; .....
- c) legea de corespondență (exprimată printr-o formulă) a funcției. ....

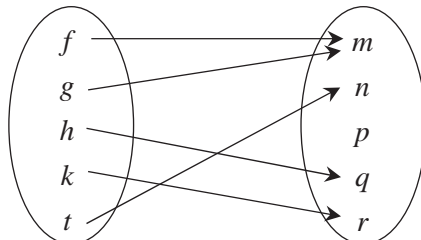
6. Se consideră funcția  $f: A \rightarrow B$ , definită prin tabelul următor:

$x$	-2	1	2	3	7
$f(x)$	-3	0	1	2	6

Completați spațiul punctat cu valoarea funcției  $f$  în punctul:

- a) 1; .....
- b) 7; .....
- c) -2; .....
- d) 3; .....
- e) 2. ....

7. Se consideră funcția  $s: E \rightarrow F$ , definită prin diagrama următoare:



Completați spațiul punctat cu imaginea prin funcția  $s$  a elementului:

a)  $f$ ; ..... b)  $k$ ; ..... c)  $t$ ; ..... d)  $g$ ; ..... e)  $h$ . .....

**8.** Se consideră funcția  $h : \{13, 17, 24, 33, 91\} \rightarrow \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție produsul cifrelor sale. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $h(13) = 3$ ;  b)  $h(24) = 6$ ;  c)  $h(17) = 7$ ;

d)  $h(33) = 3$ ;  e)  $h(91) = 9$ ;  f)  $h(24) = 8$ .

**9.** Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5x - 2$ . Calculați oral:

a)  $f(4) = \dots\dots\dots$ ; b)  $f(6) = \dots\dots\dots$ ; c)  $f(0) = \dots\dots\dots$ ; d)  $f(-3) = \dots\dots\dots$ .

### Exerciții și probleme de dificultate medie

**10.** Stabiliți care dintre următoarele notații reprezintă o funcție:

a)  $f : \{-1, 2, 3\} \rightarrow \{-3, 6, 9\}$ ,  $f(x) = 3x$ ; b)  $g : \{-2, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 1, 4\}$ ,  $g(x) = x^2$ ;

c)  $h : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 3\}$ ,  $h(x) = x^3$ ; d)  $s : \{-4, 5\} \rightarrow \{-5, 0, 1, 4\}$ ,  $s(x) = -x$ .

**11.** Arătați că  $f : \{201, 365, 402\} \rightarrow \{2, 3, 4, 5, 9\}$ , unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție divizorul său din domeniul de valori, nu este o funcție.

**12.** Se consideră funcția  $f : \{-3, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow A$ . Determinați  $\text{Im } f$  pentru legea de corespondență:

a)  $f(x) = 3x + 1$ ; b)  $f(x) = 2x - 3$ ; c)  $f(x) = -7x + 4$ .

**13.** Se consideră funcția  $f : \left\{4, 25, 36, \frac{49}{16}, \frac{64}{81}\right\} \rightarrow A$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ . Determinați  $\text{Im } f$ .

**14.** Se consideră funcția  $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow A$ ,  $f(x) = 3^x$ . Determinați  $\text{Im } f$ .

**15.** Se consideră funcția  $g : \{-2, 0, 4\} \rightarrow A$ . Determinați  $\text{Im } g$  în fiecare dintre cazurile:

a)  $g(x) = \frac{x}{2} + 7$ ; b)  $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$ ; c)  $g(x) = 1 - \frac{3x}{2}$ .

**16.** Se consideră funcția  $h : \{-\sqrt{2}, 0, 3\sqrt{2}\} \rightarrow E$ . Determinați  $\text{Im } h$ , dacă:

a)  $h(x) = \sqrt{2}x + 5$ ; b)  $h(x) = \sqrt{2}x - 4$ ; c)  $h(x) = 1 - \sqrt{2}x$ .

**17.** Se consideră funcția  $f : \{-9, -7, -4, -2, -1\} \rightarrow E$ ,  $f(x) = -2x + 7$ . Calculați:

a) media aritmetică a numerelor  $f(-2)$  și  $f(-7)$ ;

b) media geometrică a numerelor  $f(-1)$  și  $f(-9)$ .

**18.** Se consideră funcția  $h : \{\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, 3\sqrt{6}\} \rightarrow A$ ,  $h(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{2}$ . Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor  $h(\sqrt{6})$  și  $h(3\sqrt{6})$ .

**19.** a) Se consideră funcțiile  $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $f(x) = x^2$  și  $g : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $g(x) = |x|$ . Arătați că  $f = g$ .



## Cuprins

### ALGEBRĂ

#### CAPITOLUL II. CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice.....	5
Lecția 2. Înmulțirea fracțiilor algebrice.....	9
Lecția 3. Împărțirea fracțiilor algebrice.....	13
Lecția 4. Ridicarea la putere cu exponent natural a fracțiilor algebrice .....	17
Lecția 5. Ordinea efectuării operațiilor cu fracții algebrice și folosirea parantezelor.....	20
Lecția 6. Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$ , $x, a, b, c \in \mathbb{R}$ , $a \neq 0$ .....	27
<i>Teste de evaluare sumativă</i> .....	32
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i> .....	34

#### CAPITOLUL III. FUNCȚII

Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite .....	37
Lecția 8. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice .....	42
Lecția 9. Funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = ax + b$ , $a, b \in \mathbb{R}$ . Interpretare geometrică. Lecturi grafice .....	47
Lecția 10. Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = ax + b$ , $a, b \in \mathbb{R}$ și $D \subset \mathbb{R}$ . Interpretare geometrică. Lecturi grafice .....	53
Lecția 11. Elemente de statistică .....	56
<i>Teste de evaluare sumativă</i> .....	60
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i> .....	61
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i> .....	63

### GEOMETRIE

#### CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte .....	66
Lecția 2. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment .....	70
Lecția 3. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă .....	74
Lecția 4. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul dintre două plane.....	79
Lecția 5. Plane perpendiculare .....	84
<i>Teste de evaluare sumativă</i> .....	88
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i> .....	89

#### CAPITOLUL II. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

##### II.1. POLIEDRE

Lecția 6. Prisma regulată.....	91
Lecția 7. Paralelipipedul dreptunghic.....	98
Lecția 8. Cubul.....	103
<i>Teste de evaluare sumativă</i> .....	107
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i> .....	108

Lecția 9. Piramida regulată.....	110
Lecția 10. Trunchiul de piramidă regulată .....	118
Teste de evaluare sumativă .....	125
Fișă pentru portofoliul elevului.....	127
<b>II.2. CORPURI ROTUNDE</b>	
Lecția 11. Cilindrul circular drept .....	129
Lecția 12. Conul circular drept.....	133
Lecția 13. Trunchiul de con circular drept .....	138
Lecția 14. Sfera .....	143
Teste de evaluare sumativă .....	148
Fișă pentru portofoliul elevului.....	149
Probleme din realitatea cotidiană.....	151
<b>MODELE DE TEZE PENTRU SEMESTRUL AL II-LEA .....</b>	<b>155</b>
<b>TESTE DE EVALUARE FINALĂ.....</b>	<b>158</b>
<b>MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ .....</b>	<b>161</b>
<b>INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....</b>	<b>188</b>